Восстановление нот из двузвучия

Ботхолов А.Ж.

В данной работе рассматривается восстановление нот из одновременного звучания двух нот в терминах амплитуд и частот.

Приведены методы восстановления амплитуд двух нот, которые были одновременно сыграны двумя различными музыкальными инструментами.

Описаны случаи существования и не существования одновременно двух решений для задачи восстановления нот.

Ключевые слова: основной тон, обертон, амплитуда, частота, огибающая ноты, суммарная спектрограмма.

1. Введение

В данной работе рассматривается восстановление нот из двузвучия (одновременного звучания двух нот) в терминах амплитуд и частот. При колебании струны мы можем наблюдать единственный четкий тон звука, который называется основным тоном. Но как известно, большая часть музыкальных инструментов воспроизводит не только основные тона, но также и призвуки, которые называются обертонами, формирующие уникальное звучание для каждого инструмента, поэтому одна и та же нота будет звучать каждый раз уникально при воспроизведении разными инструментами. Обертоны бывают гармоническими и негармоническими. Частоты гармонических обертонов кратны частоте основного тона. Далее будем считать, что в составе звучания ноты, проигрываемой различными инструментами, находятся только гармонические обертоны и основной тон. То есть частоты всех тонов ноты можно записать как набор $(w_0, 2w_0, 3w_0, \ldots, n \cdot w_0)$, где w_0 — частота основного тона, $2w_0$, $3w_0$,..., $n \cdot w_0$ — частоты обертонов.

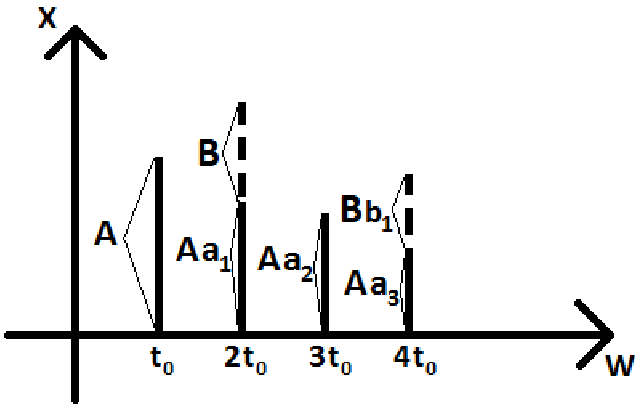
В работе описан случай существования единственного решения для задачи восстановления нот из двузвучия, а также приведен пример, когда возможно существование двух решений.

Автор выражает благодарность проф. Э.Э.Гасанову за постановку задачи.

2. Основные понятия

Пусть A — это амплитуда колебаний основного тона. Каждый i-ый обертон обладает собственной амплитудой колебаний, которая выражается как $a_i \cdot A$, будем считать, что a_i обязательно больше 0. Тогда можем записать амплитуды колебаний всех тонов ноты как набор $(A, a_1 \cdot A, a_2 \cdot A, \ldots, a_n \cdot A)$. Так как все амплитуды кратны A, то можем рассмотреть набор коэффициентов $(1, a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Назовем данный набор огибающей ноты.

Допустим, два различных музыкальных инструмента одновременно сыграли по одной произвольной ноте, тогда получаем общий суммарный набор, состоящий из частот тонов от каждой отдельной ноты, а также соответствующие амплитуды, причем некоторые частоты могут как совпадать, так и отличаться. И в случае, если частоты совпали, то амплитуды суммируются. Изобразим пример зависимости частот от амплитуд при звучании одновременно двух нот на графике, где на оси абсцисс отмечены частоты, а на оси ординат амплитуды, обычными линиями изображены амплитуды первой ноты, пунктиром амплитуды второй ноты.



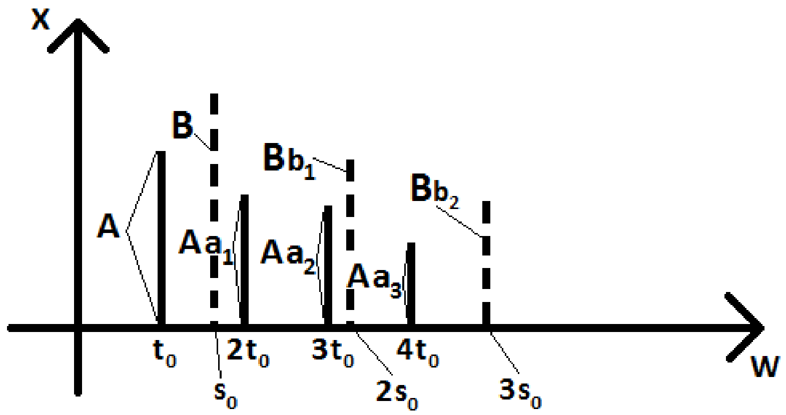
Как можно заметить, в данном примере вторая и четвертая частоты тонов разных нот совпали, поэтому амплитуды у данных частот суммируются. Данный график зависимости частот от амплитуд назовем общей спектрограммой.

3. Существование и единственность решения при вычислении амплитуд в случае конечных огибающих

Теорема 1. *Два различных инструмента одновременно играют по одной ноте. Известны конечные огибающие этих нот, причем отличные друг от друга, также известна суммарная спектрограмма. Тогда существуют единственные амплитуды A и B этих нот, удовлетворяющие данным условиям.*

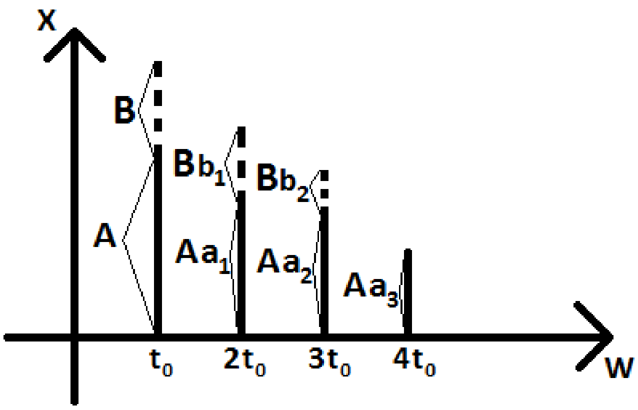
Доказательство. Существование. Обозначим через $(1, a_2, \ldots, a_n)$ огибающую первой ноты, а через $(1, b_2, \ldots, b_m)$ огибающую второй ноты. Также мы знаем суммарную спектрограмму, но не знаем к набору частот какой ноты относится каждая частота на графике. Обозначим через $(t_0, 2t_0, \ldots, n \cdot t_0)$ частоты первой ноты, а через $(s_0, 2s_0, \ldots, m \cdot t_0)$ частоты второй ноты. Данные наборы не известны. Рассмотрим всевозможные случаи расположения этих частот на суммарной спектрограмме.

Случай 1. Ни одна частота из набора $(s_0, 2s_0, 3s_0, \ldots, m \cdot t_0)$ не совпадает ни с одной частотой из набора $(t_0, 2t_0, 3t_0, \ldots, n \cdot t_0)$. То есть не существуют натуральные числа k и l, где $k \geqslant 1$, $l \geqslant 1$, такие что $k \cdot t_0 = l \cdot s_0$, значит количество частот суммарной спектрограммы равно $n + m$. Пример данного случая можно изобразить на графике:



Амплитуды A и B в таком случае равны амплитуде при частоте t_0 и амплитуде при частоте s_0 соответственно.

Случай 2. Частоты основных тонов двух нот равны, то есть $t_0 = s_0$. Следовательно, набор частот одной из нот полностью принадлежит набору частот второй ноты. Значит, количество частот суммарной спектрограммы равно либо n, либо m. Приведем пример такого случая на графике:

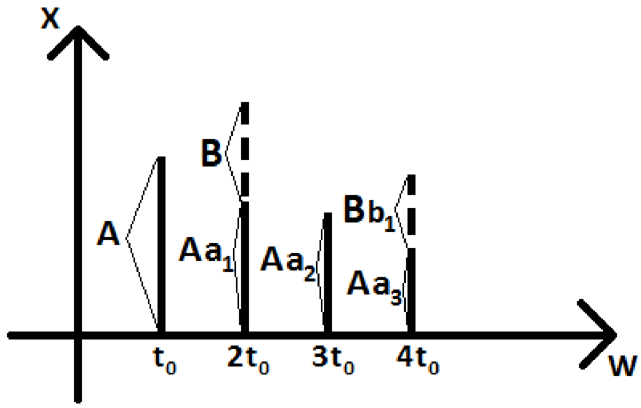


Пусть $n \geqslant m$. Чтобы вычислить амплитуды A и B составим следующую систему из двух уравнений, где R_1 и R_2 амплитуды суммарной спектрограммы для частот t_0 и $2t_0$ соответственно:

$$\begin{cases} A + B = R_1, \\ a_2 \cdot A + b_2 \cdot B = R_2 \end{cases}$$

Получаем, что $A = \dfrac{R_2 - b_2 \cdot R_1}{a_2 - b_2}$, $B = \dfrac{R_1 \cdot a_2 - R_2}{a_2 - b_2}$. Если полученные амплитуды A и B удовлетворяют также уравнениям для оставшихся амплитуд R_3, $\ldots$, R_n суммарной спектрограммы, то решение найдено, в противном случае, полученные A и B не являются решением. Так как огибающие нот отличны друг от друга, то рассмотренная система из двух уравнений линейно независима. То есть для рассматриваемого случая не может быть более одного решения.

Случай 3. Существует такое натуральное число k, где $k > 1$, что $k \cdot t_0 = s_0$, либо $k \cdot s_0 = t_0$. То есть частота основного тона второй ноты совпадает с одной из частот первой ноты, кроме частоты основного тона первой ноты, либо наоборот, частота основного тона первой ноты совпадает с одной из частот второй ноты, кроме частоты основного тона второй ноты. Следовательно, количество частот суммарной спектрограммы $< n+m$. Изобразим на графике возможный пример для данного случая:



Рассмотрим вариант, когда $k \cdot t_0 = s_0$. Для варианта, когда $k \cdot s_0 = t_0$, поиск решения аналогичен. Рассмотрим сначала следующую систему уравнений:

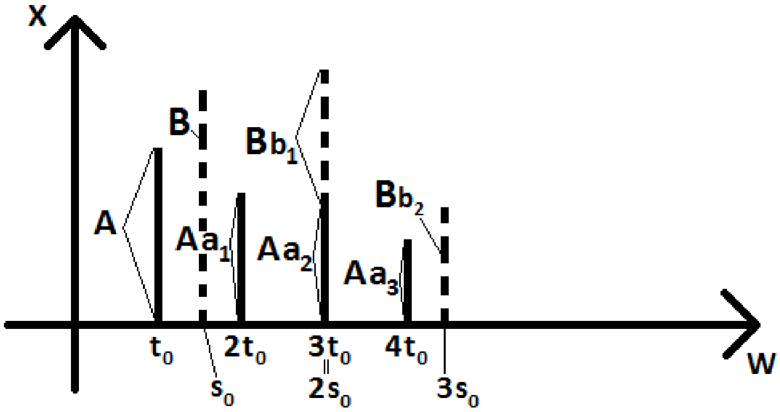
$$\begin{cases} A = R_1, \\ a_2 \cdot A + B = R_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow B = R_2 - a_2 \cdot A = R_2 - a_2 \cdot R_1$. Проверяем, полученный $B > 0$, или $B = 0$. Если $B > 0$, то амплитуды A и B найдены, остается только проверить, удовлетворяют ли A и B также уравнениям для оставшихся амплитуд. Если же $B = 0$, то рассматриваем систему уравнений:

$$\begin{cases} A = R_1, \\ a_3 \cdot A + B = R_3 \end{cases}$$

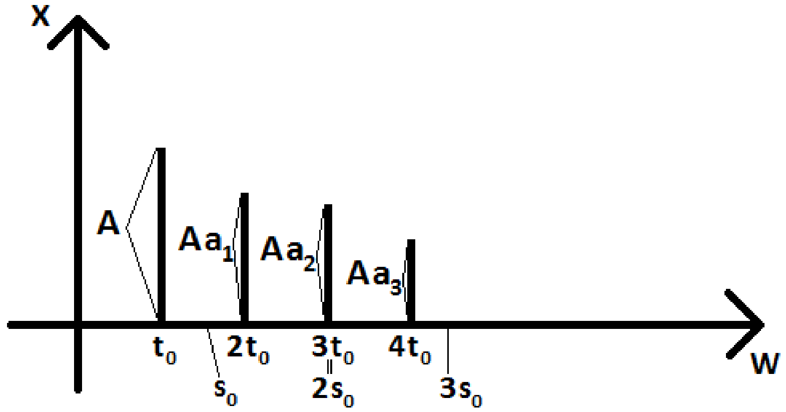
Также проверяем, является ли $B > 0$. В итоге, пытаемся найти такое k, что $a_k \cdot A + B = R_k$, где $B > 0$. Считаем, что $a_k = 0$, если $k > n$. Очевидно, что в рассмотренном случае 3 не может быть более одного решения.

Случай 4. Существуют натуральные числа k и l, где $k > 1$, $l > 1$, такие что $k \cdot t_0 = l \cdot s_0$, и не существует натуральное число p, где $p > 1$, что $p \cdot t_0 = s_0$, либо $p \cdot s_0 = t_0$. Пример данного случая изобразим на графике:



Допустим, что первая частота суммарной спектрограммы принадлежит первой ноте. Значит A будет равно амплитуде суммарной спектрограммы в данной частоте. Для предположения, что первая частота суммарной спектрограммы принадлежит второй ноте, поиск решения аналогичен.

Идем последовательно слева направо по набору частот суммарной спектрограммы и находим первую попавшуюся частоту, которая не кратна начальной частоте. Очевидно, что найденная частота есть частота основного тона второй ноты, и амплитуда B будет равна амплитуде суммарной спектрограммы в данной частоте. Вычтем из амплитуд суммарной спектрограммы, частоты которых кратны частоте основного тона второй ноты, произведения амплитуды B и соответствующего коэффициента огибающей. Тогда получим следующий график:



Проверяем, удовлетворяет ли найденная амплитуда A оставшимся амплитудам на графике суммарной спектрограммы. Если да, то решение найдено. Очевидно, что в рассмотренном случае 4 не может быть более одного решения.

Таким образом, для каждого отдельного случая расположения частот на суммарной спектрограмме мы определили свой метод вычисления амплитуд A и B.

Существование решения доказано.

Единственность. Докажем невозможность существования решения одновременно для нескольких случаев. Очевидно, что если случай 4 удовлетворяет суммарной спектрограмме, и решение для данного случая найдено, то остальные случаи точно не имеют решения. Аналогично, можно сказать и про случай 1. Поэтому для доказательства единственности решения остается рассмотреть только случаи 2 и 3.

Рассмотрим бесконечную последовательность целых неотрицательных чисел 1, a_2, $\ldots$, a_n, a_{n+1}, a_{n+2},$\ldots$, где первые n элементов есть коэффициенты огибающей первой ноты, а последующие элементы равны 0, то есть $a_{n+1} = 0$, $a_{n+2} = 0$, $\ldots$, бесконечную последовательность 1, b_2, $\ldots$, b_m, b_{m+1}, b_{m+2},$\ldots$, где первые m элементов есть коэффициенты огибающей второй ноты, а последующие элементы равны 0, то есть $b_{m+1} = 0$, $b_{m+2} = 0$, $\ldots$, а также бесконечную последовательность R_1, R_2, $\ldots$, где первые элементы есть амплитуды суммарной спектрограммы, а последующие элементы равны 0. Докажем, что не существуют натуральные числа A_1, B_1, A_2, B_2, k, такие что верна система уравнений:

$$
\begin{cases}
A_1 + B_1 = A_2 = R_1, \\
\vdots \\
a_{k-1} \cdot A_1 + b_{k-1} \cdot B_1 = a_{k-1} \cdot A_2 = R_{k-1} \\
a_k \cdot A_1 + b_k \cdot B_1 = a_k \cdot A_2 + B_2 = R_k \\
a_{k+1} \cdot A_1 + b_{k+1} \cdot B_1 = a_{k+1} \cdot A_2 = R_{k+1} \\
\vdots \\
a_{2k-1} \cdot A_1 + b_{2k-1} \cdot B_1 = a_{2k-1} \cdot A_2 = R_{2k-1} \\
a_{2k} \cdot A_1 + b_{2k} \cdot B_1 = a_{2k} \cdot A_2 + b_2 \cdot B_2 = R_{2k} \\
a_{2k+1} \cdot A_1 + b_{2k+1} \cdot B_1 = a_{2k+1} \cdot A_2 = R_{2k+1} \\
\vdots
\end{cases}
$$

Данная система состоит из уравнений вида $a_p \cdot A_1 + b_p \cdot B_1 = a_p \cdot A_2 = R_p$, если k не делит p, и уравнений вида $a_p \cdot A_1 + b_p \cdot B_1 = a_p \cdot A_2 + b_r \cdot B_2 = R_p$, если k делит p, и $r = \dfrac{p}{k}$

Допустим, что существуют натуральные числа A_1, B_1, A_2, B_2, k, такие что верна система уравнений из теоремы. Из данной системы рассмотрим первое и (km)-тое уравнения:

$$
\begin{cases}
A_1 + B_1 = A_2 = R_1, \\
a_{km} \cdot A_1 + b_{km} \cdot B_1 = a_{km} \cdot A_2 + b_m \cdot B_2 = R_{km}
\end{cases}
$$

Тогда возможны два варианта:

1) $km > n$. Тогда $a_{km} = 0$, $b_{km} = 0$, и система примет вид:

$$
\begin{cases}
A_1 + B_1 = A_2, \\
0 = b_m \cdot B_2
\end{cases}
$$

Имеем, что $b_m = 0$ — противоречие.

2) $km \leqslant n$. Тогда $a_{km} > 0$, $b_{km} = 0$, и система примет вид:

$$
\begin{cases}
A_1 + B_1 = A_2, \\
a_{km} \cdot A_1 = a_{km} \cdot A_2 + b_m \cdot B_2
\end{cases}
$$

Следовательно, $a_{km} \cdot A_1 = a_{km} \cdot (A_1 + B_1) + b_m \cdot B_2$. Получается, что $0 = a_{km} \cdot B_1 + b_m \cdot B_2$, значит $a_{km} = b_m = 0$ — противоречие.

Теорема доказана.

$\square$

4. Существование двух решений при вычислении амплитуд в случае бесконечных огибающих

Возможно ли существование нескольких решений, если предположить, что огибающие нот состоят из бесконечного числа ненулевых коэффициентов? Рассмотрим следующую теорему.

Теорема 2. *Существуют такие бесконечные огибающие и суммарная спектрограмма двух нот, одновременно сыгранных двумя различными инструментами, которым удовлетворяют две пары амплитуд первой и второй нот A_1 и B_1, а также A_2 и B_2.*

Доказательство. Из условия теоремы следует, что существует натуральное число k, где $k \geqslant 2$, такое что верна система уравнений:

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 = R_1, \\ \vdots \\ a_{k-1} \cdot A_1 + b_{k-1} \cdot B_1 = a_{k-1} \cdot A_2 = R_{k-1} \\ a_k \cdot A_1 + b_k \cdot B_1 = a_k \cdot A_2 + B_2 = R_k \\ a_{k+1} \cdot A_1 + b_{k+1} \cdot B_1 = a_{k+1} \cdot A_2 = R_{k+1} \\ \vdots \\ a_{2k-1} \cdot A_1 + b_{2k-1} \cdot B_1 = a_{2k-1} \cdot A_2 = R_{2k-1} \\ a_{2k} \cdot A_1 + b_{2k} \cdot B_1 = a_{2k} \cdot A_2 + b_2 \cdot B_2 = R_{2k} \\ a_{2k+1} \cdot A_1 + b_{2k+1} \cdot B_1 = a_{2k+1} \cdot A_2 = R_{2k+1} \\ \vdots \end{cases}$$

Данная система состоит из уравнений вида $a_p \cdot A_1 + b_p \cdot B_1 = a_p \cdot A_2 = R_p$, если k не делит p, и уравнений вида $a_p \cdot A_1 + b_p \cdot B_1 = a_p \cdot A_2 + b_r \cdot B_2 = R_p$, если k делит p, и $r = \dfrac{p}{k}$

Из (1)-ого и $(k-1)$-ого уравнений $\Rightarrow a_{k-1} \cdot A_1 + b_{k-1} \cdot B_1 = a_{k-1} \cdot (A_1 + B_1) = R_{k-1} \Rightarrow b_{k-1} = a_{k-1}$. По аналогии для всех натуральных p, таких что k не делит p, имеем $b_p = a_p \Rightarrow$ пусть $b_{t \cdot k + l} = a_{t \cdot k + l} = \dfrac{1}{t \cdot k + l}$, где $1 \leqslant l \leqslant k-1$, $t \geqslant 0 \Rightarrow R_{t \cdot k + l} = \dfrac{A_2}{t \cdot k + l}$.

Пусть $a_k = \dfrac{1}{k} \Rightarrow R_k = \dfrac{A_2}{k} + B_2$. Из (1)-ого и ($k$)-ого уравнений $\Rightarrow$ $a_k \cdot A_1 + b_k \cdot B_1 = a_k \cdot (A_1 + B_1) + B_2 \Rightarrow b_k \cdot B_1 = a_k \cdot B_1 + B_2 \Rightarrow b_k = a_k + \dfrac{B_2}{B_1}$ $\Rightarrow b_k = \dfrac{1}{k} + \dfrac{B_2}{B_1}$

Вычтем из (k)-ого уравнения ($2k$)-ое уравнение, умноженное на $b_2 \Rightarrow$ $(a_k \cdot b_2 - a_{2k}) \cdot A_1 + (b_k \cdot b_2 - b_{2k}) \cdot B_1 = (a_k \cdot b_2 - a_{2k}) \cdot A_2$. Так как $A_1 + B_1 = A_2$ $\Rightarrow (b_k \cdot b_2 - b_{2k}) \cdot B_1 = (a_k \cdot b_2 - a_{2k}) \cdot B_1 \Rightarrow b_k \cdot b_2 - b_{2k} = a_k \cdot b_2 - a_{2k}$ $\Rightarrow b_{2k} = b_2 \cdot (b_k - a_k) + a_{2k} \Rightarrow b_{l \cdot k} = b_l \cdot (b_k - a_k) + a_{l \cdot k}$, где $l \geqslant 2$. Пусть $a_{l \cdot k} = \dfrac{1}{l \cdot k}$, $l \geqslant 2$, тогда $b_{l \cdot k} = b_l \cdot (\dfrac{1}{k} + \dfrac{B_2}{B_1} - \dfrac{1}{k}) + \dfrac{1}{l \cdot k} = b_l \cdot \dfrac{B_2}{B_1} + \dfrac{1}{l \cdot k}$, где b_l — известно $\Rightarrow R_{l \cdot k} = \dfrac{A_2}{l \cdot k} + b_l \cdot B_2$.

Таким образом для любого натурального $k \geqslant 2$ мы определили все числа a_i, b_i, R_i, где $i \geqslant 2$.

Теорема доказана.

$\square$

Список литературы

[1] Клюкин И.И., *Удивительный мир звука*, 1978.

[2] Зарипов Р.Х., *Кибернетика и музыка*, «Знание», 1963.

[3] Вахромеев В.А., *Элементарная теория музыки*, «МУЗГИЗ», 1961.

Recovery of two notes sounding simultaneously

Botkholov A.J.

In this work recovery of two notes sounding simultaneously in terms of amplitudes and frequencies is considered.

The methods of recovery of amplitudes of two notes which were played at the same time by two different musical instruments are given.

Cases of existence and not existence of two solutions for a problem of recovery of notes are described.

Keywords: basic tone, overtone, amplitude, frequency, bending around note, total spectrogram.