О классификациях базисов в P_k по разрешимости полноты для автоматов

Кудрявцев В.Б., Бабин Д.Н.

Рассматривается проблема полноты систем автоматных функций с операциями суперпозиции и обратной связи вида $\Phi \cup \nu$, где $\Phi \subseteq P_k$, ν - конечно. При $k = 2$ решение этой задачи приводит к разделению решётки замкнутых классов Поста на сильные (наличие которых в исследуемой системе гарантирует разрешимость задачи полноты конечных базисов) и слабые (наличие которых в исследуемой системе этого не гарантирует). При $k = 2$ эта задача для систем автоматных функций произвольного вида была решена (Бабин Д.Н. 1998). В статье рассмотрены следствия и возможные обощения этой задачи, а также некоторые результаты для $P_k, k > 2$.
Ключевые слова: булева функция, конечный автомат, алгоритмическая разрешимосить.

1. Введение

Первый толчок к возникновению теории автоматов дала работа Э. Поста 1921 года [1]. В ней были получены фундаментальные результаты о строении решетки замкнутых классов булевых функций, которые были в дальнейшем методически переработаны и упрощены в книге Яблонского С.В., Гаврилова Г.П., Кудрявцева В.Б. "Функции алгебры логики и классы Поста"[2]. Последующие работы по изучению алгебр автоматов велись под большим влиянием известных статей А.В. Кузнецова [3] и С.В. Яблонского [4] по теории функций k-значной логики.

Функции k-значной логики P_k могут рассматриваться как автоматы без памяти, к которым применяются операции суперпозиции. Возникшие для таких функций постановки задач о выразимости, полноте, базисах, решетке замкнутых классов и другие оказались весьма действенными и для алгебр автоматных функций.

Основу результатов для функций из P_k составляет подход, опирающийся на понятие предполного класса. Для конечно-порожденных систем таких функций семейство предполных классов образует критериальную систему. Множество этих предполных классов оказалось конечным и из их описания вытекает алгоритмическая разрешимость задачи о полноте. На этом пути С.В. Яблонским путем явного описания всех предполных классов была решена задача о полноте для функций трехзначной логики. После усилий многих исследователей при $k > 3$ в P_k были описаны все семейства предполных классов. Заключительные построения в этой задаче провел Розенберг [5].

Одновременно с изучением функций без памяти, были сделаны попытки применения аппарата предполных классов в задаче полноты для автоматов. Сначала для автоматов без обратных связей, называемых функциями с задержками была эффективно решена задача о полноте и ее естественных модификациях [6]. После этого было проведено рассмотрение общего случая и на этом пути был получен фундаментальный результат негативного характера, который показал континуальность множества предполных классов автоматных функций [7]. В дальнейшем, Кратко М.И. была показана алгоритмическая неразрешимость задачи о полноте для автоматных функций [8].

Еще Слупецким [9] была решена задача о полноте в P_k для систем, содержащих все одноместные функции. Для автоматов в 1961 А.А. Летичевским [10] был получен алгоритм решения задачи о полноте для конечных систем автоматов, выдающих номер своего состояния (автоматы Медведева), при наличии в исследуемой системе всех булевых функций. В 1986 В.А. Буевич [11] показал алгоритмическую разрешимость задачи А-полноты для конечных систем автоматов, содержащих все булевы функции. В 1992 г. было показано [12], что существует алгоритм распознавания полноты при наличии в рассматриваемой системе автоматов всех булевых функций.

В этой ситуации было предложено использовать разрешимость автоматной полноты как инструмент для исследования базисов функций, а именно, исследовать на полноту (A-полноту) системы вида $\Phi \cup \nu$, где Φ — замкнутый класс функций из P_k (его конечный базис), а ν - конечная система автоматных функций. Была построена классификация базисов в P_2 по их способности гарантировать разрешимость полноты конечных систем автоматов. Оказалось, что класс является сильным, точно тогда, когда в классе Φ содержится функция $[x \oplus y \oplus z] = L_4$, либо функция $[xy \cup xz \cup yz] = D_2$ [15] (смотри рисунок 1).

Если выбирать множество автоматных функций ν из дефинитных автоматов, то задача полноты для системы $\Phi \cup \nu$ разрешима точно то-

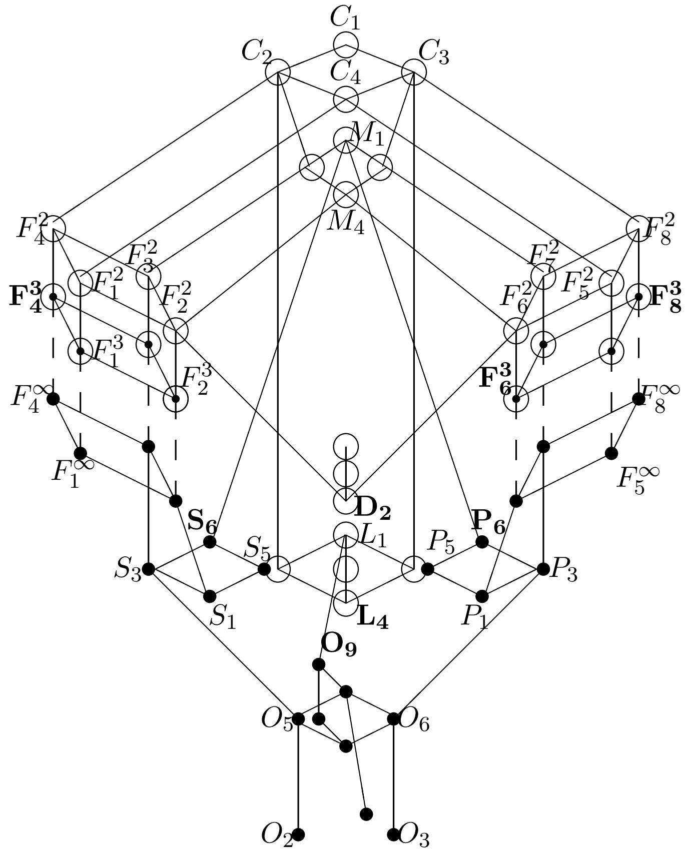

Рис.1 Белые кружки - сильные классы Поста,
черные кружки - слабые классы Поста.

гда, когда в классе Φ содержится функция $x \oplus y \oplus z$, либо функция $xy \cup xz \cup yz$, либо функции порождающие класс F_2^3, либо функции порождающие класс F_6^3 [16]. Заметим, что граница сильных классов в этом случае строго понижается (смотри рисунок 1). Оказывается, что (возможно не строгое) понижение границы сильных классов будет происходить при переходе к системам $\nu \subseteq M \subseteq P$. То есть, свойство классов быть сильными сохраняется при сужении множества $M \supseteq \nu$.

2. Обозначения и теоремы.

Пусть $E_k = \{0, 1, \dots k-1\}$, $g\colon E_k^n \to E_k^m$ вектор-функции, их множество обозначается через P_k. Пусть

$$E_k^\infty = \{a(1)a(2)\dots | a(j) \in E_k, j = 1, 2, \dots\}$$

— множество всех сверхслов, а

$$E_k^\tau = \{a(1)a(2)\dots a(\tau)|a(j) \in E_k, j = 1, 2, \dots \tau\}$$

— множество всех слов длины τ. Пусть

$$f\colon (E_k^\infty)^n \to (E_k^\infty)^m$$

— автоматная функция (a-функция), т.е. она задается рекуррентно соотношениями

$$\begin{cases} q(1) = q_1, \\ q(t+1) = \varphi(q(t), a_1(t), ..., a_n(t)), \\ b_j(t) = \psi_j(q(t), a_1(t), ..., a_n(t)), \quad j = 1, ..., m. \end{cases}$$

где $q \in Q = \{q_1, \dots, q_r\}$. Параметр q называется состоянием a-функции f, q_1 — ее начальным состоянием, вектор-буквы $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_m)$ называются входной и выходной буквами, а сверхслова $a(1)a(2)...$ и $b(1)b(2)...$ — входным и выходным сверхсловами, соответственно. Класс всех a-функций обозначим через P. В этом классе обычным образом введем операции суперпозиции и обратной связи. Пусть $\nu \subseteq P$, обозначим через $[\nu]$ множество всех a-функций, получающихся из ν с помощью операций суперпозиции и обратной связи. Множество ν называется полным, если $[\nu] = P$. Проблема полноты для P состоит в описании всех полных множеств ν.

Пусть τ — натуральное число, $f(x_1, \dots, x_n)$ — некоторая автоматная функция,

$$f^\tau\colon (E_k^\tau)^n \to (E_k^\tau)^m$$

— ограничение этой функции на множество слов длины τ. Скажем, что a-функции $f(x_1, \dots, x_n)$ и $g(x_1, \dots, x_n)$ τ-равны, если $f^\tau = g^\tau$. Обозначим через $[\nu]_\tau$ множество всех a-функций, τ-равных получающимся из ν с помощью операций суперпозиции и обратной связи, а через

$$[\nu]_A = \bigcap_{\tau=1}^{\infty} [\nu]_\tau.$$

Известно [11], что результат применения о. с. τ-равен τ применениям суперпозиции. Множество ν называется τ-полным, если $[\nu]_\tau = P$. Множество ν называется A-полным, если $[\nu]_\tau = P$ при всех τ. Проблема A-полноты для P состоит в описании всех A-полных множеств ν. Очевидно, что полное множество ν является A-полным.

Пусть $P^{(i)}$ — класс всех a-функций с не более, чем i состояниями, тогда

$$P = \bigcup_{i=1}^{\infty} P^{(i)}.$$

Известно [14], что

$$[P^{(2)}] = P, \qquad [P^{(1)}] = P^{(1)}.$$

A-функции из $P^{(1)}$ называются истинностными и мы будем отождествлять $P^{(1)}$ с множеством P_k функций k- значной логики, полагая

$$f(a(1)a(2)\dots) = f(a(1))f(a(2))\dots,$$

где $f\colon (E_k)^n \to (E_k)^m, f \in P_k$.

Множество функций $f\colon (E_k)^n \to E_k$, для которых выполнено одно из свойств: $n = 1$ или f не принимает всех значений из E_k, называется классом Слупецкого. Известно, что класс Слупецкого замкнут относительно суперпозиции, т.е. результат применения суперпозиции к функциям из этого класса являются функцией из этого же класса. Будем обозначать класс Слупецкого через $SLUP$.

Для $l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ функция $f \in P_k$, такая что $f(l, l, \dots, l) = l$ называется сохраняющей константу l , а множество всех таких функций - классом сохранения константы l, оно обозначается через U_l . Обозначим через

$$U = \bigcap_{i=0}^{k-1} U_l$$

класс сохранения всех констант. Известно, что классы $U, U_l, l = 1, 2, \dots, k-1$ замкнуты относительно суперпозиции, т.е. результат применения суперпозиции к функциям из этих классов являются функциями из этих же классов.

Функция

$$\mathbf{w}(x, y) = max(x, y) + 1 \ (mod\ k)$$

называется функцией Вебба. Известно, что $P_k = [\{\mathbf{w}\}]$, т.е. функция $\mathbf{w}$ образует полную систему в классе k -значных функций.

Автоматная функция $B\colon E_k^{\infty} \to E_k^{\infty}$, задаваемая уравнениями

$$\begin{cases} q(1) = k-1, \\ q(t+1) = x(t), \\ b(t) = q(t), \end{cases}$$

называется a-функцией задержки. Про нее известно [14], что

$$[\{B\} \cup \{\mathbf{w}\}] = P.$$

Дефинитным называется автомат, для которого найдётся натуральное t, что каждое входное слово длины t переводит автомат из любого состояния в одно и то же состояние, зависящего от этого входного слова.

Утверждение 1. *Пусть $F_1 \subseteq F \subseteq P_k$. Если не существует алгоритма, по конечному множеству $\nu \subseteq P$ решающего вопрос о полноте (А-полноте) множества $F \cup \nu$, то не существует и алгоритма, решающего вопрос о полноте (А-полноте) множества $F_1 \cup \nu$.*

Утверждение 2. *Пусть $F_1 \subseteq P_k$, а $F_2 \subseteq P_k$ двойственный к нему класс. Если не существует алгоритма, по конечному множеству $\nu \subseteq P$ решающего вопрос о полноте (А-полноте) множества $F_1 \cup \nu$, то не существует и алгоритма, решающего вопрос о полноте (А-полноте) множества $F_2 \cup \nu$.*

Утверждение 3. *Пусть $M \subseteq P$ некоторое подмножество автоматных функций. Если существует алгоритм, по конечному множеству $\nu \subseteq P$ решающий вопрос о полноте (А-полноте) множества $F \cup \nu$, то существует и алгоритм, решающий вопрос о полноте (А-полноте) множества $F \cup \mu$ по конечному множеству $\mu \subseteq M$.*

Несмотря на то, что Утверждение 3 кажется очевидным, это мощный инструмент решения проблемы разрешимости полноты при фиксированных автоматных добавках к базису. Имеет место

Следствие 1. *Пусть F_0, F_1 конечные подмножества автоматных функций и $[F_0] \supseteq F_1$, тогда из разрешимости задачи полноты систем $F_1 \cup \nu$ следует разрешимость полноты систем $F_0 \cup \nu$.*

Приведенные утверждения весьма полезны, потому что автоматически создают теоремы о разрешимости полноты для конкретных систем автоматов.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. [15]

Проблема полноты (А-полноты) системы $\Phi \cup \nu, \Phi \subseteq P_2$ разрешима точно тогда, когда функция $x \oplus y \oplus z \in \Phi$, либо функция $xy \cup xz \cup yz \in \Phi$.

Теорема 2. [16]

Проблема А-полноты системы $\Phi \cup \nu, \Phi \subseteq P_2$, где ν состоит из дефинитных автоматов, разрешима точно тогда, когда функция $x \oplus y \oplus z \in \Phi$, либо функция $xy \cup xz \cup yz \in \Phi$, либо $(F_2)^3 \subseteq \Phi$, либо $(F_6)^3 \subseteq \Phi$.

Согласно теореме 2 граница между сильными и слабыми классами решётки Поста опустилась по сравнению с границей, опеределяемой теоремой 1 (смотри рисунок). Известно [13], что для систем линейных автоматов (независимо от булевой части базиса) существует алгоритм определения полноты конечных систем. Этот факт подтверждает вывод из утверждения 3 и теоремы 1 о разрешимости полноты систем линейных автоматов при дополнительных условиях вхождения в них сильных булевых функций. Наконец, если системы автоматов слишком бедны, чтобы быть полными при наличии любых булевых функций, такими, например, являются автоматы с безусловными переходами, тогда задача полноты алгоритмически разрешима. Этот факт также подтверждает вывод из утверждения 3 и теоремы 1 о разрешимости полноты систем автоматов с безусловными переходами при дополнительных условиях вхождения в них сильных булевых функций. Имеют место

Теорема 3.[17]

Пусть $\Phi \subseteq SLUP$, не существует алгоритма, по конечному множеству $\nu \subseteq P$ решающего вопрос, верно ли, что $[\Phi \cup \nu] = P$.

Теорема 4.[17]

Пусть $\Phi \subseteq SLUP$, не существует алгоритма, по конечному множеству $\nu \subseteq P$ решающего вопрос, верно ли, что $[\Phi \cup \nu]_A = P$.

Теорема 5.[17] Для любого $\Phi \supseteq U$ существует алгоритм, по конечному множеству $\nu \subseteq P$ решающий, верно ли, что $[\Phi \cup \nu] = P$.

Теорема 6.[17] Для любого $\Phi \supseteq U$ существует алгоритм, по конечному множеству $\nu \subseteq P$ решающий, верно ли, что $[\Phi \cup \nu]_A = P$.

Из утверждений следует, что достаточно доказать теоремы 3-6 только для случая $\Phi = SLUP, \Phi = U$.

Список литературы

[1] Post E. Two-valued iterative systems of math logik. Printston 1941

[2] Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б. Функции алгебры логики и классы Поста М. Наука 1966

[3] Кузнецов А.В. О проблемах тождества и функциональной полноты для алгебраических систем. Труды третьего всесоюзного математического съезда/. 2 1956, 45–146, М. Изд. АН СССР.

[4] Яблонский С.В. Функциональные построения в k-значной логике. Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 51,1958, 5–142., М. Изд. АН СССР.

[5] Rosenberg J. La structure des fonctions de plusiers variables sur un ensemble fini. Comptes Rendus Acad. 1965. 260, 3817–3819, Sci. Paris

[6] Кудрявцев В.Б. Теорема полноты для одного класса автоматов без обратных связей. Проблемы кибернетики. 1962, 8, 91–115, М,. Физматгиз.

[7] Кудрявцев В.Б., О мощностях множеств предполных классов некоторых функциональных систем, связанных с автоматами. ДАН СССР, 1963, 151, 3, 493–496, М. Изд. АН СССР

[8] Кратко М.И., Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов, ДАН СССР, 1964, 155, 1, 35–37, М. Изд. АН СССР.

[9] Slupecki J. Kriterium pelnosci wielowartosciowych systemow logiki zdan, Comptes Rendus des Seances de la Societe des Sciences et des Lottres de Varsovie, 1939, 32, 102–128, Cl. III

[10] Летичевский А.А. Условия полноты для конечных автоматов, Вычислительная математика и математическая физика, 1961, 4, 702–710

[11] Буевич В.А., Условия А-полноты для автоматов, изд. МГУ, 1986

[12] Бабин Д.Н., Разрешимый случай задачи о полноте автоматных функций, Дискретная математика, 1992, 4, 4, 41–56, М. Наука

[13] Часовских А.А., О полноте в классе линейных автоматов, Математическме вопросы кибернетики, 1995, 3, 140–166.

[14] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С., Введение в теорию автоматов, 1985, М. Наука.

[15] Бабин Д.Н., О классификации автоматных базисов Поста по разрешимости свойств полноты и А-полноты, ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК,367, 4,1999, 439–441.

[16] Жук Д.Н., О классификации автоматных базисов Поста по разрешимости свойств А-полноты для дефинитных автоматов, Дискретная математика, 22, 2, 2010, 80–95.

[17] Бабин Д.Н., О КЛАССИФИКАЦИИ БАЗИСОВ В P_k ПО РАЗРЕШИМОСТИ ПРОБЛЕМЫ ПОЛНОТЫ ДЛЯ АВТОМАТОВ, Фундаментальная и прикладная математика, 15, 3, 2010, 33–47, М. Интуит.

Classification of bases in P_k by the property of decidability of the completeness for automata.

Kudryavtsev V.B., Babin D.N.

We consider the problem of the completeness of systems of automaton functions with operations of superposition and feedback of the form $\Phi \cup \nu$, where $\Phi \subseteq P_k$, ν is finite. For $k = 2$, the solution of this problem leads to the separation of the lattice of closed Post classes into strong ones (whose presence in the system under study guarantees the solvability of the completeness problem of finite bases) and weak ones (which does not guarantee this in the system under study). For $k = 2$ this problem was solved for systems of automaton functions of arbitrary form (Babin DN 1998). In this paper, we investigate corollaries and possible extensions of this problem, as well as some results for $P_k, k > 2$.

Keywords: Boolean function, finite automaton, algorithmic solvalibility of functions by formulas.

К сведению авторов публикаций в журнале «Интеллектуальные системы. Теория и приложения»

В соответствии с требованиями ВАК РФ к изданиям, входящим в перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых могут быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук, статьи в журнал «Интеллектуальные системы. Теория и приложения» предоставляются авторами в следующей форме:

1. Статьи, набранные в пакете LaTeX, предоставляются к загрузке через WEB-форму http://intsysjournal.org/generator_form .

2. К статье прилагаются файлы, содержащие название статьи на русском и английском языках, аннотацию на русском и английском языках (не более 50 слов), список ключевых слов на русском и английском языках (не более 20 слов), информация об авторах: Ф.И.О. полностью, место работы, должность, ученая степень и/или звание (если имеется), контактные телефоны (с кодом города и страны), e-mail, почтовый адрес с индексом города (домашний или служебный).

3. Список литературы оформляется в едином формате, установленном системой Российского индекса научного цитирования.

4. За публикацию статей в журнале «Интеллектуальные системы. Теория и приложения» с авторов (в том числе аспирантов высших учебных заведений) статей, рекомендованных к публикации, плата не взимается. Оттиски статей авторам не предоставляются. Журнал распространяется по подписке, экземпляры журнала рассылаются подписчикам наложенным платежом. Условия подписки публикуются в каталоге НТИ «Роспечать», индекс журнала 64559.

5. Доступ к электронной версии последнего вышедшего номера осуществляется через НЭБ «Российский индекс научного цитирования». Номера, вышедшие ранее, размещаются на сайте http://intsysjournal.org, и доступ к ним бесплатный. Там же будут размещены аннотации всех публикуемых статей.

Подписано в печать: 20.03.2019
Дата выхода: 28.03.2019
Тираж: 200 зкз.
Цена свободная
Свидетельство о регистрации СМИ: ПИ № ФС77–58444 от 25 июня 2014 г.,
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций(Роскомнадзор).