Условие корректности и полноты классической логики для семантики относительной V-реализуемости

Коновалов А. Ю.

Пусть L — некоторое расширение языка арифметики, V — некоторый класс числовых функций. Определяется понятие V-реализуемости для предикатных формул, основанное на оценке предикатных переменных формулами языка L. Устанавливается корректность и полнота классической логики относительно семантики V-реализуемости в случае, когда класс V содержит все функции, определимые в языке L.

Ключевые слова: конструктивная семантика, реализуемость, обобщенная реализуемость, формальная арифметика.

Пусть V — некоторое множество частичных функций натурального аргумента. Элементы множества V назовем V-функциями. Будем считать, что для каждого натурального числа n имеется нумерация всех n-местных V-функций. А именно, определено множество индексов $\mathsf{I}_n^V \subseteq \mathbb{N}$ вместе с отображением, которое каждому натуральному числу $z \in \mathsf{I}_n^V$ ставит в соответствие n-местную V-функцию $\varphi_z^{V,n}$, и при этом всякая n-местная V-функция есть $\varphi_z^{V,n}$ для некоторого $z \in \mathsf{I}_n^V$. Будем считать, что множество V вместе с вышеописанной нумерацией обладает следующими свойствами:

C1) V содержит все частично-рекурсивные функции;

C2) если ψ есть n-местная V-функция, s — перестановка на множестве $\{1, \ldots, n\}$, то функция ψ', определенная условным равенством $\psi'(x_1, \ldots, x_n) \simeq \psi(x_{s(1)}, \ldots, x_{s(n)})$, является V-функцией;

C3) если ψ есть n-местная V-функция, то функция ψ', определенная условным равенством

$$\psi'(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \simeq \psi(x_1, \ldots, x_n),$$

является V-функцией;

C4) композиция V-функций есть V-функция;

C5) если ψ_1, ψ_2 суть $(n+1)$-местные V-функции, то функция ψ', определенная условным равенством

$$\psi'(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mu x\,[\psi_1(x_1, \ldots, x_n, x) = \psi_2(x_1, \ldots, x_n, x)],$$

является V-функцией (μ — оператор минимизации);

C6) если ψ_1, ψ_2 суть n-местные V-функции, χ — всюду определенная n-местная V-функция, то функция ψ', определенная условным равенством

$$\psi'(x_1, \ldots, x_n) \simeq \begin{cases} {}_1(x_1, \ldots, x_n), & \text{если } \chi(x_1, \ldots, x_n) = 1; \\ {}_2(x_1, \ldots, x_n), & \text{иначе,} \end{cases}$$

является V-функцией;

C7) для каждой $(n+m)$-местной V-функции ψ найдется всюду определенная m-местная V-функция ψ', что справедливо условное равенство

$$\varphi^{V,\,n}_{\psi'(x_{n+1},\ldots,x_{n+m})}(x_1, \ldots, x_n) \simeq \psi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}).$$

Множество всех частично-рекурсивных функций обладает свойствами C1–C7. Другим примером функций, обладающих свойствами C1–C7, могут служить все арифметические функции или все гиперарифметические функции с подходящей нумерацией (см. [1], [2]).

Будем считать, что язык формальной арифметики LA содержит обозначения для всех примитивно рекурсивных функций, константы для обозначения всех натуральных чисел, а также логические константы $\top$ (истина) и $\perp$ (ложь), которые считаются атомарными формулами (атомами). Расширение LA' языка LA получается добавлением к LA предикатных символов P^n_i и функциональных символов f^n_i для всех $i \geq 0,\ n \geq 1$. Валентность символов P^n_i и f^n_i полагается равной n. Формулы языка LA' строятся из атомов при помощи логических связок $\wedge$, $\vee$, $\to$ и кванторов $\exists$, $\forall$, причем квантор $\forall$ используется следующим образом: если A и B — формулы, $\overline{x} = x_1, \ldots, x_n$ — список переменных, то выражение $\forall\overline{x}\,(A \to B)$ считается формулой. Такое определение формулы навеяно идеями из базисной арифметики (см. [3]). Выражение $\neg A$ условимся рассматривать как сокращение для формулы $A \to \perp$. Выражение $A(x_1, \ldots, x_n)$ означает, что все свободные переменные формулы A находятся в списке $x_1, \ldots, x_n$. Будем считать, что фиксированы расширение L языка LA и интерпретация $\mathcal{N}_L$ языка L такие, что L — подъязык языка LA', и интерпретация $\mathcal{N}_L$ является продолжением стандартной интерпретацией языка LA. Заметим, что при этом $\mathcal{N}_L \models \top$ и $\mathcal{N}_L \not\models \bot$.

Понятие V-реализуемости для языка L определим по аналогии с рекурсивной реализуемостью Клини [4, §82].

Пусть фиксированы примитивно-рекурсивные двухместная функция c, которая взаимно однозначно нумерует все пары натуральных чисел, и одноместные обратные функции p_1 и p_2, так что выполняются соотношения $\mathsf{p}_1(\mathsf{c}(x,y)) = x$ и $\mathsf{p}_2(\mathsf{c}(x,y)) = y$. В выражениях вида $\mathsf{p}_1(t)$, $\mathsf{p}_2(t)$ обычно будем опускать скобки.

Для каждого натурального числа e и произвольной замкнутой формулы Φ языка L определим отношение $e\,\mathbf{r}^V\,\Phi$ (e V-реализует Φ) индукцией по построению формулы Φ:

1) $e\,\mathbf{r}^V\,\Phi \rightleftharpoons \mathcal{N}_L \models \Phi$, если Φ — атом языка L;

2) $e\,\mathbf{r}^V\,(\Phi \wedge \Psi) \rightleftharpoons \mathsf{p}_1 e\,\mathbf{r}^V\,\Phi$ и $\mathsf{p}_2 e\,\mathbf{r}^V\,\Psi$;

3) $e\,\mathbf{r}^V\,(\Phi \vee \Psi) \rightleftharpoons (\mathsf{p}_1 e = 0$ и $\mathsf{p}_2 e\,\mathbf{r}^V\,\Phi)$ или $(\mathsf{p}_1 e = 1$ и $\mathsf{p}_2 e\,\mathbf{r}^V\,\Psi)$;

4) $e\,\mathbf{r}^V\,\exists x\,\Phi(x) \rightleftharpoons \mathsf{p}_2 e\,\mathbf{r}^V\,\Phi(\mathsf{p}_1 e)$;

5) $e\,\mathbf{r}^V\,\forall x_1,\dots,x_n\,(\Phi(x_1,\dots,x_n) \to \Psi(x_1,\dots,x_n)) \rightleftharpoons e \in \mathsf{I}^V_{n+1}$ и для всех[1] натуральных чисел $s, a_1,\dots,a_n$, если верно $s\,\mathbf{r}^V\,\Phi(a_1,\dots,a_n)$, то определено $\varphi_e^{V,n+1}(a_1,\dots,a_n,s)$ и $\varphi_e^{V,n+1}(a_1,\dots,a_n,s)\,\mathbf{r}^V\,\Psi(a_1,\dots,a_n)$.

Замкнутую формулу Φ языка L назовем *V-реализуемой* (обозначение: $\mathbf{r}^V\,\Phi$), если найдется такое натуральное число e, что $e\,\mathbf{r}^V\,\Phi$.

Предикатные формулы строятся обычным образом из атомов $P(v_1,\dots,v_n)$, где P есть n-местная предикатная переменная, а $v_1,\dots,v_n$ — предметные переменные, при помощи логических констант $\top$, $\bot$, связок $\wedge$, $\vee$, $\to$ и кванторов $\forall$, $\exists$.

Будем говорить, что замкнутая предикатная формула является *V-реализуемой относительно языка L* (обозначение: $\mathbf{r}^V_L\,\Phi$), если любой ее замкнутый L-пример оказывается V-реализуемым.

Семантики предикатных формул, основанные на понятии V-реализуемости для некоторых конкретных классов V, рассматривались в работах [1] и [2]. Там исследовались соотношения таких семантик с базисной и интуиционисткой логикой. Сейчас мы установим критерий совпадения семантик, основанных на понятии V-реализуемости, с классической логикой.

[1]Однако, если в списке $x_1,\dots,x_n$ на некоторых позициях i и j стоят одинаковые переменные x_i и x_j, то мы не допускаем рассмотрение тех списков $a_1,\dots,a_n$, в которых $a_i \neq a_j$.

Будем говорить, что n-местная частичная функция ψ определима в языке L формулой $\Phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ этого языка, если имеет место

$$(k_1, \ldots, k_n) = k \Longleftrightarrow \mathcal{N}_L \models \Phi(k_1, \ldots, k_n, k)$$

для всех натуральных чисел $k_1, \ldots, k_n, k$. Множество всех функций, определимых в языке L, обозначим $\mathsf{F}(L)$.

Через CPC обозначим классическое исчисление предикатов. Верны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $V \supseteq \mathsf{F}(L)$. *Тогда имеет место*

$$\mathbf{r}_L^V\, A \Longleftrightarrow CPC \vdash A$$

для всех замкнутых предикатных формул A.

Теорема 2. *Пусть* $V \not\supseteq \mathsf{F}(L)$. *Тогда формула* $\forall z\,(P(z) \vee \neg P(z))$ *не является* V*-реализуемой относительно языка* L.

Список литературы

[1] Коновалов А. Ю., Плиско В. Е. О гиперарифметической реализуемости // Мат. зам. 2015. **98**, №5. 725—746.

[2] Коновалов А. Ю. Арифметическая реализуемость и базисная логика // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2016. №1. 52–56.

[3] Provably total functions of basic arithmetic // Math. Log. Quart. 2003. **49**. N 3. 316—322.

[4] Клини С. К. Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957.

The criterion of the soundness and the comleteness of the classical logic with respect to the V-realizability.

Konovalov A. Yu.

Let L be an extension of the language of arithmetic, V a class of number-theoretical functions. A notion of the V-realizability for predicate formulas is defined in such a way that predicate variables are substituted by formulas of the language L. It is proved that the classical logic is sound and complete with respect to the semantics of the V-realizability if V contains all L-definable functions.

Keywords: constructive semantics, realizability, generalized realizability, formal arithmetic.