Классическая истинность всех абсолютно арифметически реализуемых предикатных формул.

Коновалов А. Ю.

Доказывается, что всякая абсолютно арифметически реализуемая предикатная формула является классически истинной, однако не всякая классически истинная предикатная формула является абсолютно арифметически реализуемой.

Ключевые слова: конструктивная семантика, реализуемость, арифметическая реализуемость, абсолютная реализуемость, формальная арифметика.

В статье [1] автором была определена семантика абсолютной арифметической реализуемости для предикатных формул. В настоящей работе устанавливается связь между абсолютной арифметической реализуемостью и классической истинностью.

Будем считать, что язык формальной арифметики LA содержит функциональные символы для всех примитивно-рекурсивных функций, а также константы для всех натуральных чисел. Атомарные формулы (атомы) языка LA суть выражения $t_1 = t_2$, где t_1 и t_2 — термы. Более сложные формулы языка LA строятся обычным образом из атомов при помощи логических связок $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neg$ и кванторов $\exists$, $\forall$. Формулы языка LA будем называть арифметическими формулами.

Пусть фиксировано натуральное число $n \geq 1$. *Униформизацией* формулы $\Phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ языка LA, не содержащей параметров, отличных от $x_1, \ldots, x_n, y$, будем называть формулу

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge (\forall z < y)\, \neg\Phi(x_1, \ldots, x_n, z),$$

которую обозначим $\Phi^U(x_1, \ldots, x_n, y)$. Каждая такая формула задает частичную функцию $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, где $f(k_1, \ldots, k_n) = k$, если и только если $\mathbb{N} \models \Phi^U(k_1, \ldots, k_n, k)$, т. е. формула $\Phi^U(k_1, \ldots, k_n, k)$ истинна в стандартной интерпретации. Пусть фиксирована геделева нумерация всех формул языка LA. Формулу с геделевым номером k обозначаем Φ_k. Если

k — геделев номер такой формулы LA, которая не содержит параметров, отличных от $x_1, \ldots, x_n, y$, то посредством φ_k^n обозначим n-местную частичную функцию, задаваемую формулой Φ_k^U. Частичные функции, которые могут быть представлены в виде φ_k^n для некоторых n и k, будем называть арифметическими.

Предикатные формулы строятся обычным образом из атомов $P(v_1, \ldots, v_n)$, где P есть n-местная предикатная переменная, а $v_1, \ldots, v_n$ — предметные переменные, при помощи логических констант $\top$ (истина), $\perp$ (ложь), связок $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ и кванторов $\forall$, $\exists$.

Пусть фиксированы примитивно-рекурсивные двухместная функция c, которая взаимно однозначно нумерует все пары натуральных чисел, и одноместные обратные функции p_1 и p_2, так что выполняются соотношения $\mathsf{p}_1(\mathsf{c}(x, y)) = x$ и $\mathsf{p}_2(\mathsf{c}(x, y)) = y$. В выражениях вида $\mathsf{p}_1(t)$, $\mathsf{p}_2(t)$ обычно будем опускать скобки.

Следуя [2], n-местным обобщенным предикатом будем называть всякую функцию типа $\mathbb{N}^n \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$. Пусть A — предикатная формула, f — отображение, которое каждой предикатной переменной из A ставит в соответствие обобщенный предикат той же валентности. В этом случае отображение f будем называть оценкой формулы A. Временно введем в язык логики предикатов константы для обозначения всех натуральных чисел. Формулы с этими константами будем называть предикатными формулами расширенного языка.

Определим отношение $e\, \mathbf{r}_f^{\mathsf{ar}}\, A$ (натуральное число e арифметически реализует предикатную формулу расширенного языка A при оценке f этой формулы), индукцией по построению формулы A:

- для любого натурального числа e верно $e\, \mathbf{r}_f^{\mathsf{ar}}\, \top$;
- для любого натурального числа e неверно $e\, \mathbf{r}_f^{\mathsf{ar}}\, \perp$;
- $e\, \mathbf{r}_f^{\mathsf{ar}}\, P(a_1, \ldots, a_n) \rightleftharpoons e \in f(P)(a_1, \ldots, a_n)$,
  если P — n-местный предикатный символ;
- $e\, \mathbf{r}_f^{\mathsf{ar}}\, (A \wedge B) \rightleftharpoons \mathsf{p}_1 e\, \mathbf{r}_f^{\mathsf{ar}}\, A$ и $\mathsf{p}_2 e\, \mathbf{r}_f^{\mathsf{ar}}\, B$;
- $e\, \mathbf{r}_f^{\mathsf{ar}}\, (A \vee B) \rightleftharpoons (\mathsf{p}_1 e = 0$ и $\mathsf{p}_2 e\, \mathbf{r}_f^{\mathsf{ar}}\, A)$ или $(\mathsf{p}_1 e = 1$ и $\mathsf{p}_2 e\, \mathbf{r}_f^{\mathsf{ar}}\, B)$;
- $e\, \mathbf{r}_f^{\mathsf{ar}}\, (A \rightarrow B) \rightleftharpoons \forall a\, (a\, \mathbf{r}_f^{\mathsf{ar}}\, A \Rightarrow$ определено $\varphi_e^1(a)$ и $\varphi_e^1(a)\, \mathbf{r}_f^{\mathsf{ar}}\, B)$;
- $e\, \mathbf{r}_f^{\mathsf{ar}}\, \exists x A(x) \rightleftharpoons \mathsf{p}_2 e\, \mathbf{r}_f^{\mathsf{ar}}\, A(\mathsf{p}_1 e)$;
- $e\, \mathbf{r}_f^{\mathsf{ar}}\, \forall x\, B(x) \rightleftharpoons \forall k\,$(определено $\varphi_e^1(k)$ и $\varphi_e^1(k)\, \mathbf{r}_f^{\mathsf{ar}}\, B(k))$.

Замкнутую предикатную формулу A будем называть абсолютно арифметически реализуемой, если для всякой оценки f этой формулы найдется такое натуральное число e, что имеет место $e\,\mathbf{r}_f^{\mathsf{ar}}\,A$.

Верны следующие теоремы.

Теорема 1. *Всякая абсолютно арифметически реализуемая предикатная формула является классически истинной.*

Теорема 2. *Существует классически истинная предикатная формула, которая не является абсолютно арифметически реализуемой.*

Отметим, что для обычной рекурсивной реализуемости аналог теоремы 1 неверен. (см. [3], [4, теорема 3]).

Список литературы

[1] Коновалов А. Ю. Арифметическая реализуемость и базисная логика // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., 2016. №1, стр. 52–56.

[2] Плиско В. Е. Абслолютная реализуемость предикатных формул // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. **47**, №2. 315–334.

[3] Оревков В. П. Связь конструктивной общезначимости с выводимостью в классическом исчислении предикатов. // Всесоюзный симпозиум по матем. логике (тезисы докладов), Алма-Ата, 1969, стр. 35.

[4] В. Е. Плиско. Неарифметичность класса реализуемых предикатных формул. // Изв. АН СССР. Сер. мат., 1977, т. 41, № 3, стр. 483—502.

All absolute arithmetically realizable predicate formulas are classically true.

Konovalov A. Yu.

It is proved that every absolute arithmetically realizable predicate formula is classically true, but there is a classically true predicate formula that is not absolute arithmetically realizable.

Keywords: constructive semantics, realizability, arithmetic realizability, absolute realizability, formal arithmetic.