Штрафные, барьерные, квазибарьерные функции и функции, обратные к ним

Бирюков А.Г., Чернов А.В., Чернова Ю.Г., Шароватова Ю.И.

Рассматриваются методы внешних штрафных функций, внутренних штрафных функций и квазибарьерных функций для решения задач математического программирования. Предложены новые квазибарьерные функции. Доказаны теоремы сходимости указанных методов к решению задач математического программирования. Рассмотрены свойства указанных функций при их преобразованиях: дифференцирование, интегрирование, построение обратных к ним функций.

Ключевые слова: внешние штрафные функции, внутренние штрафные функции, барьерные штрафные функции, обратные функции, квазибарьерные функции, задача математического программирования, дифференциальные барьеры, степенные дифференциальные барьеры, энтропийные дифференциальные барьеры, сходимость методов дифференциальных барьеров к решению задачи математического программирования.

Введение

Методы внешних штрафных и внутренних штрафных (барьерных) функций широко используются в практике решения задач математического программирования (МП) ([1, 2, 3]). Менее известны так называемые *методы квазибарьерных функций* ([4, 5]). Все эти методы можно отнести к классу методов последовательной безусловной минимизации ([6, 7]).

Рассмотрим задачу МП в виде:

$$\begin{gathered} \min f(x),\ x \in G \subset \mathrm{R}^n, \\ G = \left\{x \in \mathrm{R}^n : \varphi_i(x) \le 0,\ i = \overline{1,m};\ h_j(x) = 0, j = \overline{1,l}\right\}, \end{gathered} \tag{1}$$

где функции f и φ_i, $i = \overline{1,m}$ – дифференцируемые; h_j, $j = \overline{1,l}$ – непрерывно дифференцируемые на R^n. Пусть $x^* \in G$ – решение задачи (1).

Рассмотрим при $\tau > 0$ вспомогательную задачу:

$$\min_{x \in \mathrm{R}^n} F(x, \tau),$$
$$F(x,\tau) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} P_i(\tau, \varphi_i) + \sum_{j=1}^{l} P_{m+j}(\tau, h_j). \tag{2}$$

Обозначим $x(\tau)$ – решение задачи (2). Тогда методы штрафных и барьерных функций для решения задачи (1) заключаются в последовательном решении задачи (2) для последовательности $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$, такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_k = 0$, причем $x^* = \lim\limits_{k\to\infty} x(\tau_k)$. В задаче (2) функция $P_i(\tau, \varphi_i)$, $i \in [1, m]$ может быть внешней штрафной функцией (ШФ), внутренней (барьерной) ШФ или квазибарьерной (КБ) функцией, а все функции $P_{m+j}(\tau, h_j)$ $j = \overline{1, l}$ – внешние ШФ, например, $P_{m+j}(\tau, h_j) = \frac{1}{\tau} |h_j(x)|^s$, $s = 1, 2, 3, ...,$ Основным объектом наших исследований будут функции $P_i(\tau, \varphi_i)$, $i = \overline{1, m}$.

Целями настоящей работы являются:

1) расширение класса КБ функций;

2) доказательство сходимости: $x^* = \lim\limits_{\tau\to 0} x(\tau)$ для методов штрафных и КБ функций при решении задачи (2);

3) изучение свойств функций $P_i(\tau, \varphi_i)$, $i = \overline{1, m}$ при их преобразованиях:

   - дифференцировании по φ_i;
   - построении функции $R(\tau, \lambda_i)$ обратной к $\frac{\partial P_i(\tau, \varphi_i)}{\partial \varphi_i}$;
   - интегрировании функции $R(\tau, \lambda_i)$ по λ_i.

1. Методы штрафных функций

Укажем кратко требования, которым должны удовлетворять внешние и внутренние ШФ [2], полагая $\tau > 0$.

- Для внешней ШФ и ограничения вида $\varphi(x) = 0$ или $\varphi(x) \le 0$:

$$\begin{gathered} P(\tau, \varphi(x)) = 0 \text{ или } \lim_{\tau\to 0+} P(\tau, \varphi(x)) = 0 \text{ при } x \in G; \\ P(\tau, \varphi(x)) > 0 \text{ при } x \notin G; \\ P(\tau_1, \varphi(x)) < P(\tau_2, \varphi(x)) < +\infty \text{ при } x \notin G \text{ и } \tau_1 > \tau_2; \\ \lim_{\tau\to 0+} P(\tau, \varphi(x)) = +\infty \text{ при } x \notin G. \end{gathered} \tag{3}$$

- Для внутренней ШФ и ограничения вида $\varphi(x) \le 0$ при условии $\mathrm{int}G \ne \emptyset$:

$$\begin{gathered} P(\tau_1, \varphi(x)) > P(\tau_2, \varphi(x)) > 0 \text{ при } x \in \mathrm{int}G \text{ и } \tau_1 > \tau_2; \\ \lim_{\tau\to 0+} P(\tau, \varphi(x)) = 0 \text{ при } x \in \mathrm{int}G; \\ \lim_{\tau\to 0+} P(\tau, \varphi(x)) = +\infty \text{ при } x \notin \mathrm{int}G. \end{gathered} \tag{4}$$

Приведем примеры штрафных функций для решения задачи (2). Рассмотрим вначале внешние штрафные функции:

- Степенная функция, которая используется для ограничений-равенств $h(x) = 0$:

  $$P(\tau, h(x)) = \frac{1}{\tau}(h(x))^{\beta}, \text{ где } \beta = 2, 4, 6, ...$$

  Данная функция является внешней ШФ. Наиболее часто применяется квадратичная ШФ, т.е. $\beta = 2$.

- Степенная ШФ, которая используется для ограничений-неравенств $\varphi(x) \le 0$:

  $$P(\tau, \varphi(x)) = \frac{1}{\tau}(\varphi(x)_+)^{\beta}, \ \beta = 2, 3, 4...$$

  Здесь $\varphi(x)_+ = \max(0, \varphi(x))$ – так называемая «функция-срезка», которая широко применяется на практике. При $\beta = 2$ она непрерывно дифференцируема. Для повышения порядка ее дифференцируемости надо увеличивать степень β, т.е. $\beta = 3, 4$ и т.д.

- Показательные ШФ для ограничений-неравенств $\varphi(x) \le 0$:

  $$P(\tau, \varphi(x)) = \tau a^{\frac{\varphi(x)}{\tau}} \text{ при } a > 1.$$

  Такие функции бесконечно дифференцируемы по φ. При $a = e$ такая функция называется экспоненциальной ШФ:

  $$P(\tau, \varphi_i(x)) = \tau e^{\frac{\varphi_i(x)}{\tau}}.$$

В качестве внутренних можно применять традиционные ШФ, которые определены при $x \in \mathrm{int}G$, вида:

$$\begin{gathered} P(\tau, \varphi_i(x)) = -\tau \ln(-\varphi_i(x)) \text{ – логарифмическая ШФ;} \\ P(\tau, \varphi_i(x)) = -\tfrac{\tau}{\varphi_i(x)} \text{ – обратная ШФ.} \end{gathered}$$

Пусть J_{in} – некоторое подмножество индексов из $[1, m]$, где m – количество ограничений неравенств, $J_{ext} = [1, m] \backslash J_{in}$. Введем множества:

- Множество $M_1 = \{x \in \mathrm{R}^n : \varphi_i(x) \leq 0,\ i \in J_{in}\}$. К ограничениям в этом множестве применяется метод внутренних ШФ.

- Множество $M_2 = \left\{x \in \mathrm{R}^n : \varphi_i(x) \leq 0,\ i \in J_{ext},\ h_j(x) = 0,\ j = \overline{1,l}\right\}$. К ограничениям во множестве M_2 применяется метод внешних ШФ.

Таким образом множество M_1 определено произвольной выборкой J_{in} ограничений-неравенств задачи (1), а множесво M_2 определяется ограничениями-равенствами и ограничениями-неравенствами J_{ext}, не вошедшими в J_{in}, поэтому $G = M_1 \bigcap M_2$.

Под ε-окрестностью точки x будем понимать шар $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathrm{R}^n : \|y - x\| < \varepsilon\}$.

Сформулируем теорему о сходимости метода ШФ со вспомогательной задачей (2) в случае, когда функции $P_i(\tau, \varphi_i(x))$ могут быть как внутренними, так и внешними ШФ [2].

Теорема 1. *[2]*

Пусть для задачи (1) *выполняются условия:*

- *функции* f, φ_i, $i = \overline{1,m}$, h_j, $j = \overline{1,l}$ *– непрерывно дифференцируемы;*

- *существует* x^* *– решение задачи* (1)*;*

- *для некоторого* $\varepsilon > 0$ *выполнено условие* $B_\varepsilon(x^*) \bigcap M_2 \bigcap \mathrm{int} M_1 \neq \emptyset$*;*

- *множество* $G_1(x_0) = \{x \in G : f(x) \leq f(x_0)\}$ *– компакт при* $x_0 \in G$*;*

- *выполнены условия* (3) *и* (4) *для множеств* M_1 *и* M_2.

Тогда существует монотонно убывающая положительная последовательность τ_k, $k = 0, 1, \ldots$, $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_k = 0$ *и соответствующая ей последовательность* $x_k = \arg\min\limits_{x \in \mathrm{R}^n} F(x, \tau_k)$ *такая, что* $x^* = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$.

Замечание 1. *1) Если для решения задачи* (2) *применяется только метод внешних ШФ, то в теореме 1 можно исключить условие* $B_\varepsilon(x^*) \bigcap M_2 \bigcap \mathrm{int} M_1 \neq \emptyset$, *при этом множество* $M_1 = \mathrm{R}^n$.

2) Как видно из определения M_1 *и* M_2 *существует множество вариантов решения задачи* (1) *методами внутренних и внешних ШФ.*

3) Вместо условия G_1 *– компакт, можно взять условие:* $G_2 = \{x \in \mathrm{R}^n, x_0 \in G : F(x_0, \tau_k) \leq F(x, \tau_k), k = 1, 2, \ldots\}$ *– компакт.*

2. Метод квазибарьерных функций

Основным свойством методов ШФ является «локализация» точки решения задачи (1): вспомогательная функция $F(x,\tau)$ строится так, что решение задачи $\min\limits_{x\in \mathrm{R}^n} F(x,\tau)$, точка $x(\tau)$, является приближением к решению x^* задачи МП и тем более точным, чем меньше коэффициент штрафа $\tau > 0$. При определенных условиях $x^* = \lim\limits_{\tau\to+0} x(\tau)$.

Рассмотрим задачу, допустимое множество которой определяется ограничениями-неравнествами:

$$\begin{gathered}\min f(x),\ x\in G,\\ G=\left\{x\in \mathrm{R}^n : \varphi_i(x)\le 0,\ i=\overline{1,m}\right\}.\end{gathered} \tag{5}$$

Одними из возможных штрафов для решения этой задачи являются степенные штрафы [2, 6]:

- $P(\tau,\ \varphi_i(x)) = \frac{1}{\tau}\left(\varphi_i(x)_+\right)^{\alpha}$, при $\alpha \ge 1$ – внешняя ШФ;
- $P(\tau,\ \varphi_i(x)) = \tau\left(-\varphi_i(x)\right)^{\alpha}$, при $\alpha < 0$ – внутренняя ШФ (или барьерная функция).

Для значений степени $\alpha\in(0,1)$ предложены квазибарьерные функции [4, 5]:

$$P(\tau,\varphi_i(x)) = -\tau\left(-\varphi_i(x)\right)^{\alpha},\ 0<\alpha<1,\ x\in G; \tag{6}$$

и соответсвующая вспомогательная функция

$$F(x,\tau) = f(x) - \tau\sum_{i=1}^{m}\left(-\varphi_i(x)\right)^{\alpha},\ 0<\alpha<1,\ x\in G. \tag{7}$$

Спецификой задачи МП (5) является то, что всегда $x^*\in\partial G$, где ∂G – граница множества G[1].

Определение 1. *Множество* $J(x) = \{i\in[1,m] : \varphi_i(x)=0\}$ *называется множеством индексов активных ограничений в точке* x.

Теорема 2. *Пусть для задачи* (5)

- *функция f дифференцируема на допустимом множестве G;*
- *множество G имеет непустую внутренность:* $\mathrm{int}G\ne\emptyset$*;*

[1]Если $x^*\notin\partial G$, то в такой задаче $x^*\in \mathrm{int}G$, и задача МП становится задачей безусловной минимизации

- *функции* $\varphi_i, \ i = \overline{1, m}$ *дифференцируемы на* R^n*;*

- *решение задачи* (5) $x^* \in G$ *существует;*

- *вспомогательная функция* $F(x, \tau)$ *определена в* (7)*;*

- *при* $\overline{x} \in G$ *множество* $G_1(\overline{x}) = \{x \in \mathrm{R}^n : F(x, \tau) \leq F(\overline{x}, \tau)\}$ *– компакт.*

Тогда существует $x(\tau) \in \mathrm{int}G$ *– решение задачи:* $\min F(x, \tau), \ x \in G$, *причем*

$$x(0) = x^*, \quad f(x^*) = F(x^*, 0).$$

Доказательство. Очевидно, что множество G замкнуто, и существует решение $x(\tau) \in G_1 \subset G$. Покажем, что $x(\tau) \in \mathrm{int}G$.

Пусть $x_0 \in \partial G$ – решение задачи $\min F(x, \tau)$, $x \in G$, а число $\gamma > 0$ и направление $s \in R^n$ такие, что $x = x_0 + \gamma s \in \mathrm{int}G$. Тогда, производная функции $F(x, \tau)$ в точке x_0 по направлению s:

$$\begin{aligned} F'(x_0, \tau, s) = & \lim_{\gamma \to 0+} \tfrac{F(x_0 + \gamma s, \tau) - F(x_0)}{\gamma} = \\ = & \lim_{\gamma \to 0+} \tfrac{f(x_0 + \gamma s) - f(x_0)}{\gamma} + \lim_{\gamma \to 0+} \sum_{i=1}^{m} \tfrac{P_i(\tau,\, \varphi_i(x_0 + \gamma s)) - P_i(\tau,\, \varphi_i(x_0))}{\gamma} \\ = & \nabla f(x_0)^{\mathrm{T}} s - \tau \lim_{\gamma \to +0} \sum_{i=1}^{m} \tfrac{((-\varphi_i(x_0 + \gamma s))^{\alpha} - (-\varphi_i(x_0))^{\alpha})}{\gamma}. \end{aligned}$$

Если $\varphi_i(x_0) = 0$, $i \in J(x_0)$, то с учётом $-\nabla \varphi_i(x_0)^{\mathrm{T}} s > 0$ при $x \in \mathrm{int}G$:

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \to 0+} \tfrac{(-\varphi_i(x_0 + \gamma s))^{\alpha} - (-\varphi_i(x_0))^{\alpha}}{\gamma} = & \lim_{\gamma \to 0+} \tfrac{(-\varphi_i(x_0 + \gamma s))^{\alpha}}{\gamma} = \\ = & \lim_{\gamma \to 0+} \tfrac{\left(-\varphi_i(x_0) - \gamma \nabla \varphi_i(x_0)^{\mathrm{T}} s + o(\gamma)\right)^{\alpha}}{\gamma} = \\ = & \lim_{\gamma \to 0+} \tfrac{(-\gamma \nabla \varphi_i(x_0)^{\mathrm{T}} s)^{\alpha}}{\gamma} = \\ = & \lim_{\gamma \to 0+} \tfrac{\left(-\nabla \varphi_i(x_0)^{\mathrm{T}} s\right)^{\alpha}}{\gamma^{1-\alpha}} = +\infty. \end{aligned}$$

Если $\varphi_i(x) < 0$, т.е. $i \notin J(x_0)$, то функция $P_i(\tau, \varphi_i(x))$ дифференцируемая, и

$$\lim_{\gamma \to +0} \frac{P_i(\tau, \varphi_i(x_0 + \gamma s) - P_i(\tau, x_0)}{\gamma} = \nabla_x P(\tau, \varphi_i(x_0))^{\mathrm{T}} s < \infty.$$

Таким образом значение $F'(x_0,\tau,s)$ имеет вид (т.к. точка $x_0 \in \partial G$, то $J(x_0) \neq \emptyset$):

$$F'(x_0,\tau,s) = \nabla f(x_0)^{\mathrm{T}} s +$$
$$+ \sum_{i \notin J(x_0)} \nabla_x P(\tau, \varphi_i(x_0))^{\mathrm{T}} s - \tau \sum_{i \in J(x_0)} \lim_{\gamma \to +0} \frac{\left(-\nabla \varphi_i(x_0)^{\mathrm{T}} s\right)^{\alpha}}{\gamma^{1-\alpha}} = -\infty. \quad (8)$$

Из (8) следует, что точка $x_0 \in \partial G$ не может быть точкой минимума функции $F(x,\tau)$, т.к. по теореме 4.21 ([8], стр.163) должно выполняться неравенство $F'(x_0,\tau,s) \geq 0\, \forall s \in T(x_0,G)$[2]. Итак, доказано, что $x_0 \in \mathrm{int}G$.

Так как в (7) функция $\sum\limits_{i=1}^{m}(-\varphi_i(x_0))^{\alpha}$ ограничена на $G_1 \subset G$, то при $\tau = 0,\ x(0) = x^*, F(x(0),0) = f(x^*)$. □

Следствие 1. *Пусть теперь задача* (5) *выпукла, т.е. функции* f *и* φ_i, $i = \overline{1,m}$ *выпуклы на* R^n, *существует её решение* x^* *и множество* G_1 – *компакт. Тогда справедливо утверждение теоремы 2.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in \partial G$ – решение вспомогательной задачи. Полагая $s \in T(x_0,G)$ и $x = (x_0 + \gamma s) \in intG$, найдем $F'(x_0,\tau,s)$:

$$F'(x_0,\tau,s) = f'(x_0,s) + \sum_{i \in J(x_0)} P_i'(\tau, \varphi_i(x_0), s) + \sum_{i \notin J(x_0)} P_i'(\tau, \varphi_i(x_0), s).$$

Если $i \in J(x_0)$, то в силу того, что производная по направлению выпуклой функции $\varphi'(x_0,s)$ существует [1]:

$$\begin{aligned} P'(\tau,\varphi_i(x_0),s) = & -\tau \lim_{\gamma \to +0} \tfrac{(-\varphi_i(x_0+\gamma s))^{\alpha} - (-\varphi_i(x_0))^{\alpha}}{\gamma} = \\ = & -\tau \lim_{\gamma \to +0} \tfrac{(-\varphi_i(x_0) - \gamma\varphi'(x_0,s) - o(\gamma))^{\alpha}}{\gamma} = \\ = & -\tau \lim_{\gamma \to +0} \tfrac{(-\gamma\varphi'(x_0,s))^{\alpha}}{\gamma} = \lim_{\gamma \to +0} \tfrac{-\tau(-\varphi'(x_0,s))^{\alpha}}{\gamma^{1-\alpha}} = -\infty. \end{aligned}$$

Если $i \notin J(x_0)$, $\varphi_i(x_0) < 0$ и $\varphi_i'(x_0,s)$ – производная функции φ_i по направлению s. Тогда:

[2]Здесь $T(x_0,G)$ – касательный конус в точке x_0 ко множеству G

$$
\begin{aligned}
P'(\tau,\varphi_i(x_0),s) = & \ -\tau \lim_{\gamma\to 0} \tfrac{(-\varphi_i(x_0+\gamma s))^\alpha - (-\varphi_i(x_0))^\alpha}{\gamma} = \\
= & \ -\tau \lim_{\gamma\to 0} \tfrac{\left(-\varphi_i(x_0)-\gamma\varphi_i'(x_0,s)+o(\gamma)\right)^\alpha - (-\varphi_i(x_0))^\alpha}{\gamma} = \\
= & \ -\tau \lim_{\gamma\to 0} \tfrac{(-\varphi_i(x_0)-\gamma\varphi'(x_0,s))^\alpha - (-\varphi_i(x_0))^\alpha}{\gamma} =
\end{aligned}
$$

$$\tau\alpha(-\varphi_i(x_0))^{\alpha-1}\varphi_i'(x_0,s),$$

т.е. $P'(\tau,\varphi_i(x_0),s)-$ существует.

Таким образом, $F'(x_0,\tau,s) = -\infty$ и справедливо утверждение теоремы.

$\square$

Определение 2. *Будем называть функцию $P(\tau,y)$, $y \in R^1$ – дифференциальным барьером (ДБ) для задачи* (1) *с допустимым множеством G и её ограничения $\varphi_i(x) \le 0$, если в точках $\overline{x}$ таких, что $\varphi_i(\overline{x}) = 0$, функция $P(\tau,\varphi_i(\overline{x}))$ недифференцируема по направлению $s \in T(\overline{x},G)$ и* $\lim\limits_{x\to\overline{x}, x\in G, \varphi_i(x)<0} \|\nabla_x P(\tau,\varphi_i(x))\| = +\infty$.

Метод решения задачи (1)*, использующий функцию функцию $F(x,\tau)$ с дифференциальным барьером $P(\tau,y)$ будем называть «метод дифференциальных барьеров» (МДБ).*

Замечание 2. *Как видно из доказательства теоремы 2, локализацию точки x^* обеспечивает недифференцируемость функции $P(\tau,\varphi_i(x)) = -\tau(-\varphi_i(x))^\alpha$ при $\tau > 0$ и $0 < \alpha < 1$ по направлению $s \in T(x,G)$ в точке $x^* \in \partial G$, когда $\varphi_i(x^*) = 0$. Т.е. функция $P(\tau,\varphi_i(x))$ в этом случае является «барьером» для $x(\tau) : x(\tau) \ne x^*$ при $\tau > 0$. По этой причине метод решения задачи* (1)*, использующий функцию $F(x,\tau)$ с «барьером» $P(\tau,\varphi_i(x))$ вида* (6)*, является «методом дифференциальных барьеров», а функция $P(\tau,\varphi_i(x))$ – дифференциальный барьер.*

Укажем требования, которым должны удовлетворять ДБ для ограничений $\varphi(x) \le 0$:

$$
\begin{gathered}
P(\tau,y) \xrightarrow{\tau\to 0+,\ y<0} 0,\ P(\tau,0) = 0; \\
P(0,\varphi(x)) = 0,\ x \in Q \subset G,\ \text{где } Q - \text{компакт} \\
\lim_{y\to 0-} \tfrac{\partial P(\tau,y)}{\partial y} = +\infty,\ \tau > 0.
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Этим требованиям удовлетворяет также «энтропийная функция» [9]:

$$P(\tau,y) = -\tau y \ln(-y), \tag{10}$$

для которой

$$\begin{gathered} P(\tau, 0) = -\tau \lim_{y \to 0-} y \cdot \ln(-y) = 0; \\ \lim_{y \to 0-} \frac{\partial P(\tau, y)}{\partial y} = \lim_{y \to 0-} [-\ln(-y) - 1] = +\infty. \end{gathered}$$

Дифференциальным барьером будет также функция:

$$P(\tau, \varphi) = \tau(-\varphi)^{\alpha} \ln(-\varphi), 0 < \alpha \leq 1.$$

Определение 3. *Функцию* (10) *назовем энтропийный дифференциальный барьер, а функцию* (6) *– степенной дифференциальный барьер.*

Очевидно, для функций (6) и (10)

$$\begin{gathered} \frac{\partial P(\tau, \varphi_i(x))}{\partial \varphi_i(x)} = \tau\alpha(-\varphi_i(x))^{\alpha-1},\ \alpha \in (0,1) \\ \text{В точке } x^* : \varphi_i(x^*) = 0,\ \lim_{\varphi_i \to -0} \frac{\partial P(\tau, \varphi_i)}{\partial \varphi_i} = +\infty. \end{gathered} \tag{11}$$

Замечание 3. *Введенные функции ДБ – функциональный синоним КБ функций. Но в смысловом плане квазибарьерные функции – настоящие барьерные функции (не квази), не являющиеся барьерными штрафными функциями, т.к.* $P(\tau, 0) = 0$*. Поэтому далее мы будем считать КБ функции синонимом функций ДБ и применять оба понятия.*

На рис. 1 представлена геометрическая иллюстрация квазибарьерных функций в пространстве R^1.

1) $P_M = -\tau\varphi \ln(-\varphi)$, $P_A = -\tau(-\varphi)^{\alpha}$, $\alpha = 0,5\ (0 < \alpha < 1)$, $\tau = 0,1$, $\varphi = x \leq 0$.

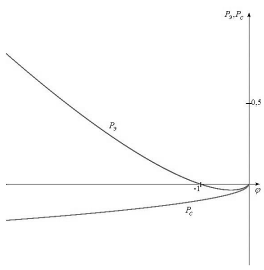

Рис. 1. Квазибарьерные функции в пространстве R^1.

Следствие 2. *Теорема 2 и следствие 1 верны для дифференциального барьера*

$$P(\tau, \varphi(x)) = -\tau\varphi(x)\ln(-\varphi(x)).$$

Доказательство. 1) Пусть $\varphi_i(x)$ – дифференцируемая функция и $\varphi_i(x_0) \equiv \varphi(x_0) = 0$. Рассмотрим предел

$$\begin{aligned}
&-\tau \lim_{\gamma\to 0+} \tfrac{\varphi(x_0+\gamma s)\ln(-\varphi(x_0+\gamma s)-\varphi(x_0)\ln(-\varphi(x_0))}{\gamma} = \\
&= -\tau \lim_{\gamma\to 0+} \tfrac{(\gamma\varphi(x_0)^{\mathrm{T}}s+o(\gamma))\ln(-\gamma\nabla\varphi(x_0)^{\mathrm{T}}+o(\gamma))}{\gamma} = \\
&= -\tau\nabla\varphi(x_0)^{\mathrm{T}}s \cdot \lim_{\gamma\to 0+} \ln(-\gamma\nabla\varphi(x_0)^{\mathrm{T}}s) = -\infty.
\end{aligned}$$

Если $\varphi(x_0) < 0$, то функция $P(\tau, \varphi_i(x))$ дифференцируемая, поэтому производная по направлению $s \in R^n$ существует и записывается в виде $P'(\tau, \varphi(x_0), s) = \nabla_x P(\tau, \varphi(x_0))^{\mathrm{T}}s$. Таким образом, утверждение теоремы 2 для энтропийного дифференциального барьера справедливо.

2) Пусть теперь функции f, φ_i, $i = \overline{1,m}$ выпуклы и $\varphi_i(x_0) = 0$. Найдем $P'(\tau, \varphi(x_0), s)$, учитывая $\nabla\varphi(x_0, s) < 0$:

$$\begin{aligned}
P'(\tau, \varphi(x_0), s) = {} & -\tau \lim_{\gamma\to +0} \tfrac{\varphi(x_0+\gamma s)\ln(-\varphi(x_0+\gamma s))}{\gamma} = \\
= {} & -\tau \lim_{\gamma\to +0} \tfrac{\gamma\nabla\varphi(x_0)^{\mathrm{T}}s\ln(-\gamma\nabla\varphi(x_0)^{\mathrm{T}}s)}{\gamma} = \\
= {} & -\tau\nabla\varphi(x_0)^{\mathrm{T}}s \lim_{\gamma\to +0} \ln(-\gamma\nabla\varphi(x_0)^{\mathrm{T}}s) = -\infty.
\end{aligned}$$

Если $\varphi(x)$ – выпукла, $\varphi(x_0) < 0$, то $\varphi'(x_0, s)$ для выпуклой функции существует, и

$$\varphi(x_0 + \gamma s) = \varphi(x_0) + \gamma\varphi'(x_0, s) + o(\gamma).$$

Опуская некоторые промежуточные выкладки, покажем, что производная по направлению существует:

$$P'(\tau, \varphi(x_0), s) =$$

$$\begin{aligned}
= {} & -\tau \lim_{\gamma\to +0} \tfrac{(\varphi(x_0)+\gamma\varphi'(x_0,s))\ln(-\varphi(x_0)-\gamma\varphi'(x_0,s))-\varphi(x_0)\ln(-\varphi(x_0))}{\gamma} = \\
= {} & \varphi'(x_0, s)\ln(-\varphi(x_0)) + \varphi'(x_0, s) = \\
= {} & \varphi'(x_0, s)\left(\ln(-\varphi(x_0)) + 1\right).
\end{aligned}$$

Следовательно, справедливо утверждение следствия 1 для дифференциального барьера (10).

$\square$

На простых примерах покажем применение МДБ для решения задачи (5).

Пример 1. *Найти* $\min(-2x)$, *если* $\varphi(x) = x - 3 \leq 0$.

Решение. *Для такой задачи функция* (10) *записывается в виде:*

$$F(x,\tau) = -2x + \tau(3-x)\ln(3-x),\ x \in \mathrm{R}^1.$$

Для такой функции:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2 + \tau(-\ln(3-x) - 1) = 0.$$

Следовательно:

$$-\tfrac{2}{\tau} - 1 = \ln(3-x) \text{ и } 3 - x = \tfrac{1}{e^{1+2/\tau}};$$
$$x(\tau) = \left(3 - \tfrac{1}{e^{1+2/\tau}}\right) \in G.$$

Очевидно, $x^* = \lim\limits_{\tau\to 0} x(\tau) = 3$.

Пример 2. *Найти* $\min(-2x)$, *если* $0 \leq x \leq 3$.

Решение. *В этом случае:* $\varphi_1(x) = -x \leq 0$ *и* $\varphi_2(x) = x - 3 \leq 0$.
Применим функцию (10) *при* $\alpha = 1/2$:

$$F(x,\tau) = -2x - \tau\left(\sqrt{x} + \sqrt{3-x}\right)$$

Значит:

$$\tfrac{\partial F}{\partial x} = -2 - \tfrac{\tau}{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{x}} - \tfrac{1}{\sqrt{3-x}}\right) = 0$$
$$4\sqrt{x(3-x)} = \tau(\sqrt{x} - \sqrt{3-x})$$
$$16x(3-x) = \tau^2\left(3 - 2\sqrt{x(3-x)}\right).$$

Обозначим $y = \sqrt{x(3-x)}$, *тогда* $16y^2 = \tau^2(3-2y)$.
Решая полученное квадратное уравнение, находим $y = \frac{\sqrt{3}}{4}\tau + o(\tau)$ *и*

$$y^2 = -x^2 + 3x = \frac{3}{16}\tau^2 + o(\tau^2).$$

Тогда $x(\tau) = 3 - \frac{\tau^2}{16} + o(\tau^2)$ *и* $x^* = \lim\limits_{\tau\to 0} x(\tau) = 3$.

3. Условия перестановки операций и теоремы существования решений задач математического программирования в методах штрафных функций и дифференциальных барьеров

Рассмотрим задачу МП (1), в которой f и φ_i, $i = \overline{1,m}$ – непрерывные функции, а h_j, $j = \overline{1,l}$ – непрерывно дифференцируемые функции. Вспомогательная функция для нее имеет вид (2):

$$F(x,\tau) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} P_i\left(\tau, \varphi_i(x)\right) + \sum_{j=1}^{l} P_{m+j}\left(\tau, h_j(x)\right).$$

Рассмотрим теперь метод решения задачи (2), в котором любая из функций $P_i(\tau, y)$, $i = \overline{1,m}$ может быть внешней, внутренней ШФ, а также функцией ДБ, а функции $P_{m+i}(\tau, y)$, $i = \overline{1,l}$ – внешние ШФ.

Пусть

$$G = \bigcap\nolimits_{i=1}^{m+l} G_i;$$
$$G_i = \begin{cases} \{x \in \mathrm{R}^n : \varphi_i(x) \le 0\},\ i = \overline{1,m}, \\ \{x \in \mathrm{R}^n : h_{i-m}(x) = 0\},\ i = \overline{m+1, m+l}. \end{cases}$$

Пусть $\delta(x, G)$ – индикаторная функция множества[3]. Очевидно, что $\delta(x,G) = \sum\limits_{i=1}^{m+l} \delta(x, G_i)$.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{gathered} \min \Phi(x,G),\ x \in \mathrm{R}^n; \\ \Phi(x,G) = f(x) + \delta(x,G) = f(x) + \sum\nolimits_{i=1}^{l} \delta(x, G_i). \end{gathered} \tag{12}$$

Лемма 1. *Пусть задача* (1) *имеет решение* $x^* \in G$, *тогда и задача* (12) *имеет решение, т.е.*

$$f(x^*) = \min_{x \in G} f(x) = \min_{x \in \mathrm{R}^n} \Phi(x, G).$$

Замечание 4. *Т.к. множество* G *замкнуто, то в лемме* (1)*:*

$$\min_{x \in G} f(x) = \inf_{x \in \mathrm{R}^n} \left(f(x) + \delta(x,G)\right) = \min_{x \in \mathrm{R}^n} \left(f(x) + \delta(x,G)\right).$$

[3]Напомним, что индикаторная функция множества может быть записана в виде $\delta(x,G) = \begin{cases} 0,\ x \in G \\ +\infty,\ x \notin G \end{cases}$

Если незамкнуто хотя бы одно из множеств G_i, $i \in [1, m]$, то незамкнуто и множество G. В этом случае вместо задачи $\min\limits_{x \in \mathrm{R}^n} (f(x) + \delta(x, G))$ надо рассматривать задачу $\inf\limits_{x \in \mathrm{R}^n} (f(x) + \delta(x, G))$. Такая ситуация возникает в методе внутренних (барьерных) ШФ: хотя множество G_i замкнуто, но функция $\delta(x, G_i)$ определена на $intG_i$, т.е. $\delta(x, G_i) = +\infty$, если $x \notin \mathrm{int}G_i$.

Так как $\inf\limits_{x \in \mathrm{R}^n} \Phi(x, G)$ – точная нижняя грань множества значений функции $\Phi(x, G)$, то $\inf\limits_{x \in \mathrm{R}^n} \Phi(x, G) = \min\limits_{x \in G} f(x) = f(x^*)$, где $\Phi(x, G)$ не определена в точке x^*.

Штрафные функции, рассматриваемые выше, обладают свойствами [6, 10]:

1) Пусть $\tilde{G} = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{m} \tilde{G}_i \right) \bigcap \left. \bigcap\limits_{j=1}^{l} G_{m+j} \right)$. Здесь $G_i = \{x \in R^n | \varphi_i \leq 0\}$, если $i = \overline{1, m}$, и $G_{m+j} = \{x \in R^n | h_j = 0\}$, если $j = \overline{1, l}$. При этом $\tilde{G}_i = G_i$ для внешних ШФ и $\tilde{G}_i = \mathrm{int}G_i$ для внутренних ШФ[4]. Если для некоторых $i \in [1, m]$ $P_i(\tau, \varphi_i)$ – внутренние ШФ, то $\tilde{G}$ – незамкнутое множество, если $\forall i \in [1, m]$ $P(\tau, \varphi_i)$ – внешние ШФ, то $\tilde{G} = G$ – замкнутое множество. Тогда
$$\delta(x, \tilde{G}) = \sum_{i=1}^{m} \delta(x, \tilde{G}_i) + \sum_{i=m+1}^{m+l} \delta(x, G_i). \tag{13}$$

2) Обозначим $\delta_k(x, G) = \sum_{i=1}^{m+l} \delta_k(x, G_i)$, где $\delta_k(x, G_i) = P_i(\tau_k, \varphi_i)$, $i = \overline{1, m}$, $\delta_k(x, G_{m+j}) = P_{m+j}(\tau_k, h_j)$, $j = \overline{1, l}$. Тогда:
$$\delta(x, \tilde{G}) = \lim_{k \to \infty} \ \delta_k(x, G), \ \tau_k \to 0.$$

Рассмотрим задачу
$$\min F(x, \tau), \ x \in \mathrm{R}^n, \ \tau > 0. \tag{14}$$

Теорема 3. *Предположим, что существует $x^* \in G$ – решение задачи (1) и множество $G_1 = \{x \in \mathrm{R}^n : F(x, \tau) \leq F(x_0, \tau), \ x_0 \in G\}$ – компакт,*

[4]Функция $P_i(\tau, \varphi_i(x))$ внешняя ШФ, если $\lim\limits_{\tau \to 0} P_i(\tau, \varphi_i(x)) = \delta(x, G_i)$; функция $P_i(\tau, \varphi_i(x))$ внутренняя ШФ, если $\lim\limits_{\tau \to 0} P_i(\tau, \varphi_i(x)) = \delta(x, \mathrm{int}G_i)$

а также справедливо условие перестановки операций:

$$\lim_{k\to\infty}\min_{x\in\mathrm{R}^n}\left(f(x)+\delta_k(x,G)\right)=\inf_{x\in\mathrm{R}^n}\lim_{k\to\infty}\left(f(x)+\delta_k(x,G)\right),\ \tau_k\to 0,\ k\to\infty. \tag{15}$$

Тогда существует $x(\tau)$ *– решение задачи* (14) *такое, что* $x^*=\lim\limits_{\tau\to 0}x(\tau)$ *и* $F(x^*,0)=\lim\limits_{\tau\to 0}F(x(\tau),\tau)=f(x^*)$.

Доказательство. Так как множество G_1 – компакт, то существует $x(\tau)$ – решение задачи (14). Полагая $\lim\limits_{k\to\infty}\tau_k=0$, рассмотрим

$$\lim_{k\to\infty}\min_{x\in\mathrm{R}^n}F(x,\tau_k)=\lim_{k\to\infty}\min_{x\in\mathrm{R}^n}\left(f(x)+\delta_k(x,G)\right).$$

Используя условие перестановки (15) операций, лемму 1 и замечание 4, получим:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\min_{x\in\mathrm{R}^n}\left(f(x)+\delta_k(x,G)\right)&=\inf_{x\in\mathrm{R}^n}\lim_{k\to\infty}\left(f(x)+\delta_k(x,G)\right)=\\&=\inf_{x\in\mathrm{R}^n}\Big(f(x)+\delta(x,\tilde{G})\Big)=\min_{x\in G}f(x)=f(x^*),\end{aligned}$$

где $\tilde{G}$ может быть незамкнутым множеством.
Из этих равенств следует, что $\lim\limits_{\tau\to 0}x(\tau)=x^*$ и $\lim\limits_{\tau\to 0}F(x(\tau),\tau)=F(x^*,0)=f(x^*)$. $\square$

Замечание 5. *Для того, чтобы доказанную теорему можно было применять для анализа решения конкретных задач, необходимо убедиться, что:*

1) *в случае ограничений-неравенств выполнены условия* $\lim\limits_{\tau\to 0}P_i(\tau,\varphi_i)=\delta(x,\tilde{G}_i)$, $i=\overline{1,m}$ *для внешних и внутренних ШФ, для функций дифференциального барьера;*

2) *в случае ограничений-равенств для используемых внешних ШФ выполнены условия* $\lim\limits_{\tau\to 0}P_i(\tau,h_j)=\delta(x,G_i)$, $i=m+j$, $j=\overline{1,l}$*;*

3) *справедливо условие перестановки операций для* $\lim\limits_{k\to 0}(\cdot)$ *и* $\inf\limits_{x\in\mathrm{R}^n}(\cdot)$.

Выше были приведены требования (3) и (4), которым должны удовлетворять внутренние и внешние ШФ для ограничений $\varphi_i(x)\le 0$, $i=\overline{1,m}$ и внешние ШФ для ограничений $h_j(x)=0$, $j=\overline{1,l}$. При выполнении этих требований выполнены условия для $\delta(x, \tilde{G}_i),\ i = \overline{1,m}$ и $\delta(x, G_i)$, $i = m + j,\ j = \overline{1,l}$, [1].

Для функций ДБ условия для $P(\tau, y)$ можно доопределить:

$$P(\tau, y) = \begin{cases} \leq c, \text{если } y \leq 0; \\ +\infty,\ y > 0. \end{cases}$$

Здесь $x \in G_i \bigcap Q$, Q – компакт, $c_i \in R_+$ – число. Указанные выше условия непротиворечивы, т.к. точки $x \notin G_i$ в методе ДБ не рассматриваются. Тогда

$$\delta(x, G_i) = \lim_{\tau \to 0} P(\tau, \varphi_i) = \begin{cases} 0,\ x \in G \\ +\infty,\ x \notin G, \end{cases}$$

Т.е. выполнены условия для $\delta(x, G_i),\ i \in [1, m]$.

Лемма 2. *[1] Пусть в методе внутренних ШФ* (4) *выполнены условия* $F(x, \tau_k) \geq f(x)$, $x \in \mathrm{int}G$, $\lim\limits_{k \to \infty} \tau_k = 0$ *и* $\lim\limits_{k \to \infty} F(x, \tau_k) = f(x)$, $x \in G$. *Тогда*

$$\lim_{k \to \infty} \inf_{x \in G} F(x, \tau_k) = \inf_{x \in G} \lim_{k \to \infty} F(x, \tau_k) = \inf_{x \in G} f(x).$$

Лемма 3. *[1] Пусть в методе внешних ШФ выполнены условия* (3). *Тогда*

$$\lim_{k \to \infty} \min_{x \in \mathrm{R}^n} F(x, \tau_k) = \min_{x \in \mathrm{R}^n} \lim_{k \to \infty} F(x, \tau_k) = \min_{x \in G} f(x).$$

Лемма 4. *В методе дифференциального барьера (ДБ) справедливо равенство:*

$$\lim_{k \to \infty} \min_{x \in G} F(x, \tau_k) = \min_{x \in G} \lim_{k \to \infty} F(x, \tau_k) = \min_{x \in G} f(x).$$

Доказательство. Пусть $F(x, \tau) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} P_i(\tau, \varphi_i) \equiv f(x) + P(\tau, \varphi)$. Из условия (9) следует, что $\exists N : \forall k \geq N$

- $|P(\tau_k, \varphi)| = |F(x, \tau_k) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3},\ x \in G$;
- для любого $\varepsilon > 0$ найдется $x_0 \in G$ такой, что $F(x_0, \tau_k) \leq \min\limits_{x \in \mathrm{R}^n} F(x, \tau_k) + \frac{\varepsilon}{3}$.

Пусть N – некоторый достаточно большой номер, тогда при произвольном $k \geq N$ оценим разность:

$$\begin{aligned} \left| \min_{x \in G} f(x) - \lim_{k \to 0} \min_{x \in G} F(x, \tau_k) \right| &\leq \left| \min_{x \in G} f(x) - \min_{x \in G} F(x, \tau_k) \right| + \frac{\varepsilon}{3} \leq \\ &\leq |f(x_0) - F(x_0, \tau_k)| + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Полученная оценка доказывает лемму. □

Доказанная теорема 3 может иметь широкое применение: она справедлива как для гладких, так и для выпуклых задач, а также в тех случаях когда функции $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1,m}$ - внешние и внутренние ШФ и функции ДБ.

4. Преобразования ШФ и функций ДБ

В работе [10] предложен метод гладких ШФ для решения гладкой задачи МП вида:

$$\begin{gathered} f(x) \to \min_{x \in G}; \\ G = \left\{ x \in R^n | \varphi_i(x) \le 0, i = \overline{1,m}, x_j \ge 0, j = \overline{1,n} \right\}. \end{gathered} \tag{16}$$

В этом методе, названном «методом обратных связей» (МОС), задача (16) сводится к решению системы нелинейных уравнений (СНУ). При построении МОС исходная ШФ $P(\tau,\varphi)$ функции $\varphi(x) \le 0_m$ последовательно подвергалась операциям:

- дифференцирования – $\frac{dP(\tau,\varphi)}{d\varphi}$;
- построения функции $R(\tau,\lambda)$, $\lambda \ge 0$, обратной[5] к $\frac{dP(\tau,\varphi)}{d\varphi}$;
- интегрирования – $J(\tau,\lambda) = \int R(\tau,\lambda) d\lambda$.

При этом оказалось, что функции $\frac{dP(\tau,\varphi)}{d\varphi}$ и $R(\tau,\lambda), J(\tau,\lambda)$ при $\lambda = -\varphi$ являлись в свою очередь ШФ, барьерными или квазибарьерными функциями (функции ДБ).

Кроме указанной последовательности операций возможны и другие их варианты. Интерес к рассмотрению таких последовательностей операций заключается в том, что в результате их (операций) выполнения найдутся примеры новых штрафных (барьерных и квазибарьерных) функций. Приведем примеры:

Пример 3. *Пусть* $P(\tau,\varphi) = \tau \cdot e^{\frac{\varphi}{\tau}}$, *тогда* $\frac{\partial P}{\partial \varphi} = e^{\frac{\varphi}{\tau}}$, $R(\tau,\lambda) = \tau \ln \lambda$, $J(\tau,\lambda) = \tau\lambda(\ln\lambda - 1)$. *Тогда:*

- *функция* $\frac{\partial P}{\partial \varphi}$ *– внешняя ШФ;*

[5] Для функции $y = f(x)$, $x, y \in \mathrm{R}^1$ обратной будет $x = g(y)$, причем $g(f(x)) = x$. Если функции $f(x)$ и $g(y)$ дважды дифференцируемы, то $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ и $g''(y) = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}$ [11].

- *если* $\lambda = -\varphi$, *то функция* $\tau \ln(-\varphi)$ *– внутренняя (барьерная ШФ) для задачи* $\max f(x)$, $x \in G$;

- *функция* $\tau(-\varphi) \cdot (\ln(-\varphi) - 1)$ *– новая квазибарьерная функция.*

Квазибарьерными функциями будут также более простая на вид функция $J(\tau, \varphi) = \tau(-\varphi) \cdot \ln(-\varphi)$ *и функция* $P(\tau, \varphi) = \tau(-\varphi)^\alpha \ln(-\varphi)$, $0 < \alpha \leq 1$.

Пример 4. *Пусть* $P(\tau, \varphi) = \tau(-\varphi) \cdot \ln(-\varphi)$, *то* $\frac{\partial P(\tau,\varphi)}{\partial \varphi} = -\tau\left(\ln(-\varphi) + 1\right)$, $R(\tau, \lambda) = -\frac{1}{e} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\tau}}$, $J(\tau, \lambda) = \frac{\tau}{e} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\tau}}$. *Тогда*

- *функция* $\frac{\partial P}{\partial \varphi}$ *– барьерная ШФ;*

- *при* $\lambda = -\varphi$ *функция* $R(\tau, \lambda)$ *– внешняя ШФ из п.1 с точностью до множителя* $\frac{1}{e}$ *для задачи* $\max f(x)$, $x \in G$.

Пример 5. *Пусть* $P(\tau, \varphi) = -\tau \cdot \ln(-\varphi)$, *тогда* $\frac{\partial P}{\partial \varphi} = -\frac{\tau}{\varphi}$, $R(\tau, \lambda) = -\frac{\tau}{\lambda}$, $J(\tau, \lambda) = -\tau \ln \lambda$. *Очевидно, данная барьерная функция – «симметричная»:* $P(\tau, \varphi)$ *совпадает с* $J(\tau, \lambda)$ *при* $\lambda = -\varphi$, *а* $\frac{\partial P}{\partial \varphi} = -R(\tau, -\varphi)$. *При этом* $\frac{\partial P}{\partial \varphi}$ *и* $R(\tau, -\varphi)$ *– внутренние ШФ для задачи* $\max f(x)$, $x \in G$.

Пример 6. *Пусть* $P(\tau, \varphi) = -\frac{\tau}{\varphi}$, *то* $\frac{\partial P}{\partial \varphi} = \frac{\tau}{\varphi^2}$, $R(\tau, \lambda) = -\sqrt{\frac{\tau}{\lambda}}$, $J(\tau, \lambda) = -\sqrt{\tau\lambda}$. *Тогда*

- *функция* $\frac{\partial P}{\partial \varphi}$ *– барьерная ШФ;*

- *при* $\lambda = -\varphi$ *функция* $R(\tau, \lambda)$ *– барьерная ШФ для задачи* $\max\limits_{x \in G} f(x)$;

- *функция* $J(\tau, \lambda)$ *– квазибарьерная степенная функция.*

Пример 7. *Пусть* $P(\tau, \varphi) = -\tau \cdot (-\varphi)^{0,5}$, *то* $\frac{\partial P}{\partial \varphi} = \frac{\tau}{2\sqrt{-\varphi}}$, $R(\tau, \lambda) = -\frac{\tau^2}{4\lambda^2}$, $J(\tau, \lambda) = \frac{\tau^2}{4\lambda}$.

Тогда

- *функция* $\frac{\partial P}{\partial \varphi}$ *– барьерная ШФ;*

- *при* $\lambda = -\varphi$ *функция* $R(\tau, \lambda)$ *– барьерная ШФ для задачи* $\max f(x)$, $x \in G$;

- *функция* $J(\tau, \lambda)$ *– барьерная ШФ.*

Приведенные примеры показывают, что операции дифференцирования, интегрирования и определения обратных функций превращают штрафные, барьерные и квазибарьерные функции в одну из функций из указанных классов. Такое свойство предложенных преобразований позволяет находить новые ШФ и функции ДБ неизвестные ранее на практике, например, функцию (10). Кроме указанной последовательности преобразований функций из [10] можно строить и другие их последовательности, однако эта тема выходит за границы нашей работы.

Исследование Чернова А.В. выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 18-31-00219.

Список литературы

[1] А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров. Курс методов оптимизации // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

[2] Э. Полак. Численные методы оптимизации // М.: Мир, 1974.

[3] Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт. Практическая оптимизация // М.: Мир, 1985.

[4] M. Hamala. Quasibarriar method for convex programming // IX International simposium on mathematical programming, – Budapest, 1976.

[5] А.С. Хохлов. Квазибарьерные штрафные функции // Автоматика и телемеханика, – М.: 1979, – Вып. 5, – С.188–191.

[6] В.Г. Жадан. Методы оптимизации. Часть 2. Численные алгоритмы : учебное пособие // М.: МФТИ, 2015.

[7] А. Фиакко, Г. Мак-Кормик. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации // М.: Мир, 1972.

[8] В.Г. Жадан. Методы оптимизации. Часть 1. Введение в выпуклый анализ и теорию оптимизации : учебное пособие // М.: МФТИ, 2014.

[9] Ю.С. Попков. Теория макросистем: Равновесные модели // М.: УРСС, 2013.

[10] Е.А. Умнов, А.Е. Умнов. Методы параметрической линеаризации, использующие штрафные функции со всюду обратимой производной для решения пар двойственных задач // Труды МФТИ, – М.: МФТИ, 2011 – т.3, № 1.

[11] Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа, т.1 // М.: Высшая школа, 1981.

Penalty, barrier, quasi-barrier functions and functions inverse to them

Birjukov A.G., Chernov A.V., Chernova Yu.G., Sharovatova Yu.I.

The methods of external penalty functions, internal penalty functions and quasi-barrier functions for solving problems of mathematical programming are considered. New quasi-barrier functions are proposed. The theorems of convergence of the indicated methods to the solution of mathematical programming problems are proved. The properties of these functions are considered for their transformations: differentiation, integration, construction of functions inverse to them.

Keywords: external penalty functions, internal penalty functions, barrier penalty functions, inverse functions, quasi-barrier functions, mathematical programming problem, differential barriers, power differential barriers, entropy differential barriers, convergence of differential barriers methods to solving mathematical programming problems.