Синтез легкотестируемых схем при однотипных константных неисправностях на входах и выходах элементов

Попков К.А.

Доказаны следующие утверждения: для любого натурального k и любой булевой константы p существует базис, состоящий из булевой функции от $\max(k+1; 3)$ переменных и отрицания одной переменной (существует базис, состоящий из булевой функции от не более чем $2{,}5k+2$ переменных и отрицания этой функции), в котором любую булеву функцию, кроме константы p, можно реализовать схемой из функциональных элементов, неизбыточной и допускающей проверяющий (соответственно, диагностический) тест длины не более 2 относительно не более k однотипных константных неисправностей типа p на входах и выходах элементов. Показано, что при рассмотрении только однотипных константных неисправностей типа p на входах элементов указанные оценки длин тестов можно понизить до 1.

Ключевые слова: схема из функциональных элементов, однотипная константная неисправность, проверяющий тест, диагностический тест.

1. Введение

В работе рассматривается задача синтеза легкотестируемых схем, реализующих заданные булевы функции. Логический подход к тестированию электрических схем предложен С. В. Яблонским и И. А. Чегис в [1]; этот подход также применим к тестированию схем из функциональных элементов (см. [2, 3, 4]). Пусть имеется схема из функциональных элементов S с одним выходом, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, где $\tilde{x}^n = (x_1, \ldots, x_n)$. Под воздействием некоторого источника неисправностей один или несколько элементов схемы S могут перейти в неисправное состояние. В результате схема S вместо исходной функции $f(\tilde{x}^n)$ будет реализовывать некоторую булеву функцию $g(\tilde{x}^n)$, вообще говоря, отличную от f. Все такие функции $g(\tilde{x}^n)$, получающиеся при всевозможных допустимых для рассматриваемой задачи неисправностях элементов схемы S, называются *функциями неисправности* данной схемы.

Введём следующие определения [2, 3, 4]. *Проверяющим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что для любой отличной от $f(\tilde{x}^n)$ функции неисправности $g(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$. *Диагностическим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что T является проверяющим тестом и, кроме того, для любых двух различных функций неисправности $g_1(\tilde{x}^n)$ и $g_2(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $g_1(\tilde{\sigma}) \neq g_2(\tilde{\sigma})$. Число наборов в T называется *длиной* теста. В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины 2^n для схемы S всегда можно взять множество, состоящее из всех двоичных наборов длины n. Тест называется *полным*, если в схеме могут быть неисправны сколько угодно элементов, и *единичным*, если в схеме может быть неисправен только один элемент. Единичные тесты обычно рассматривают для неизбыточных схем (см. [4, с. 110–111]), т. е. для таких схем, в которых любая допустимая неисправность любого одного элемента приводит к функции неисправности, отличной от исходной функции, реализуемой данной схемой (такие функции неисправности называют *нетривиальными*).

Назовём проверяющий (диагностический) тест *k-проверяющим* (*k-диагностическим*), если в схеме могут быть неисправны не более k элементов, где $k \in \mathbb{N}$. Будем рассматривать такие тесты только для *k-неизбыточных схем* (см. [5, с. 68]), в которых любая допустимая неисправность не менее одного и не более k элементов приводит к нетривиальной функции неисправности. Очевидно, что понятия 1-проверяющего и 1-диагностического тестов совпадают с понятиями единичного проверяющего и единичного диагностического тестов соответственно.

Любое множество булевых функций будем называть *базисом*.

Пусть зафиксирован вид неисправностей элементов, B — произвольный функционально полный базис и T — единичный проверяющий тест для некоторой схемы из функциональных элементов S в базисе B. Введём следующие обозначения: пусть $D^B_{\text{ЕП}}(T)$ — длина теста T; $D^B_{\text{ЕП}}(S) = \min D^B_{\text{ЕП}}(T)$, где минимум берётся по всем единичным проверяющим тестам T для схемы S; $D^B_{\text{ЕП}}(f) = \min D^B_{\text{ЕП}}(S)$, где минимум берётся по всем неизбыточным схемам S в базисе B, реализующим функцию f; $D^B_{\text{ЕП}}(n) = \max D^B_{\text{ЕП}}(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных, для которых определено значение $D^B_{\text{ЕП}}(f)$. Функция $D^B_{\text{ЕП}}(n)$ называется *функцией Шеннона* длины единичного проверяющего теста. По аналогии с функциями $D^B_{\text{ЕП}}$ можно ввести функции $D^B_{\text{ПП}}$, $D^B_{k\text{-П}}$, $D^B_{\text{ЕД}}$, $D^B_{\text{ПД}}$ и $D^B_{k\text{-Д}}$ для соответственно полного проверяющего, k-проверяющего, единичного и полного диагностического и k-диагностического тестов, зависящие от T, от S, от f и от n (в определениях функций $D^B_{\text{ПП}}(f)$ и $D^B_{\text{ПД}}(f)$ не предполагается неизбыточность схем, а в определениях функций $D^B_{k\text{-П}}(f)$ и $D^B_{k\text{-Д}}(f)$ предполагается k-неизбыточность схем). Так, например, $D^B_{k\text{-Д}}(n)$ — функция Шеннона длины k-диагностического теста.

Перечислим основные результаты, касающиеся тестирования схем из функциональных элементов. Класс допустимых неисправностей функциональных элементов ограничим константными неисправностями на входах и выходах элементов, а также только на входах элементов, при которых значение на неисправном входе (выходе) любого элемента становится равно некоторой булевой константе. Неисправности на входах и выходах элементов называются однотипными константными типа p, если эта константа одна и та же для каждого неисправного элемента и равна p, и произвольными константными, если эта константа может быть равна как 0, так и 1 для каждого неисправного элемента независимо от неисправностей других элементов. Для удобства над буквой D после символов, обозначающих базис, через точку с запятой будем ставить символы «$0,1$» или «p» в случаях, когда в схемах допускаются соответственно произвольные константные неисправности или однотипные константные неисправности типа p, $p \in \{0,1\}$, на входах/выходах элементов, а под буквой D после символов, обозначающих вид функции, — символы «(IO)» или «(I)» в случаях, когда в схемах допускаются неисправности соответственно на входах и выходах элементов или только на входах элементов. Вполне разумно предполагать, что если в базисе содержится булева константа α, то у элемента, её реализующего, не может быть неисправности типа α на его выходе.

В [4, с. 116] для базиса Жегалкина $B_1 = \{\&, \oplus, 1, 0\}$ показано, что $D^{B_1;\,0,1}_{\text{ЕП}\,(\text{IO})}(n) \leqslant n + 3$; при этом используется метод построения схем из работы [6]. К. К. Салуджа и С. М. Редди в [7] получили оценку $D^{*\,B_1;\,0,1}_{k\text{-П}\,(\text{IO})}(n) \leqslant 4 + \sum\limits_{i=1}^{\lfloor \log_2 2k \rfloor} C_n^i$; наличие звёздочки над буквой D обусловлено тем, что в указанной работе рассматривались схемы, содержащие, помимо входных переменных $x_1, \ldots, x_n$, дополнительную входную переменную h_0, вместо которой при реализации функций подавалась булева константа, но которая принимала значения как 0, так и 1 на наборах из теста. Д. С. Романовым и Е. Ю. Романовой в [8] для базисов $B_1' = \{\&, \oplus, 1\}$, $B_1'' = \{\&, \oplus, \sim\}$ установлены неравенства $D^{B_1';\,0,1}_{\text{ЕП (IO)}}(n) \leqslant 16$ и $D^{B_1'';\,0,1}_{\text{ЕП (IO)}}(n) \leqslant 16$; в частности, улучшен упомянутый результат из [4] (любая схема в базисе B_1' является также схемой в базисе B_1). Н. П. Редькин в [9–11] для базиса $B_2 = \{\&, \vee, \neg\}$ получил оценки $D^{B_2;\,p}_{\text{ПП (I)}}(n) \lesssim 4\left(2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}\right)$, $D^{B_2;\,p}_{\text{ЕД (I)}}(n) \lesssim 4\left(2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}\right)$ и $D^{B_2;\,0,1}_{\text{ПП (I)}}(n) \lesssim \frac{2^n}{\sqrt{\log_2 n}}$ соответственно, где $p = 0$ или 1.

В данной работе будут рассматриваться k-проверяющие и k-диагностические тесты при $k \in \mathbb{N}$, а в качестве неисправностей функциональных элементов — однотипные константные неисправности типа p, $p \in \{0, 1\}$, на входах и выходах элементов, а также только на входах элементов. Будут определены базисы B_3 и B_4, состоящие из двух булевых функций от не более чем $\max(k + 1; 3)$ переменных и от не более чем $2{,}5k + 2$ переменных соответственно, для которых в случае $p = 0$, в частности, будут доказаны равенства $D^{B_3;\,0}_{k\text{-П (IO)}}(n) = D^{B_4;\,0}_{k\text{-Д (IO)}}(n) = 2$ и $D^{B_3;\,0}_{k\text{-П (I)}}(n) = D^{B_4;\,0}_{k\text{-Д (I)}}(n) = 1$ (следствия 1–4). Также будет рассмотрен случай $p = 1$.

Введём обозначения $\tilde{0}^r = \underbrace{0, \ldots, 0}_{r}$, $\tilde{1}^r = \underbrace{1, \ldots, 1}_{r}$, где $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Будем говорить, что функциональный элемент E' расположен в схеме S *ниже* функционального элемента E, если в этой схеме существует ориентированный путь от E к E'.

2. Проверяющие тесты

Пусть $p = 0$, т. е. в качестве неисправностей функциональных элементов допускаются только однотипные константные неисправности типа 0 на входах и, возможно, на выходах элементов. Два двоичных набора будем называть *k-соседними*, если они различаются не более, чем в k компонентах. Пусть $\omega(\tilde{x}^t)$, где $t \geqslant 2$, — произвольная булева функция, принимающая значение 1 на наборе $(\tilde{1}^t)$ и значение 0 на всех наборах, k-соседних с набором $(\tilde{1}^t)$, кроме него самого.

Лемма 1. *Любая схема S, состоящая только из входных переменных $x_1, \ldots, x_n$ и функциональных элементов, реализующих функцию вида $\omega(\tilde{x}^t)$, выход каждого из которых, кроме выходного, соединён ров-*

но с одним входом ровно одного элемента, k-неизбыточна, и множество $\{(\tilde{1}^n)\}$ является для неё k-проверяющим тестом относительно неисправностей на входах и выходах элементов.

Доказательство. На наборе $(\tilde{1}^n)$ на всех t входах и на выходе каждого элемента схемы S возникнет значение 1, поскольку $\omega(\tilde{1}^t) = 1$. Предположим, что среди всех входов и выходов элементов схемы S есть не менее одного и не более k неисправных. Из всех элементов этой схемы, у которых хотя бы один вход и/или выход неисправны, выберем произвольный «нижний» элемент E, ниже которого в схеме S не существует элемента с указанным свойством (это можно сделать, так как схема S конечна и не содержит ориентированных циклов).

Докажем, что значение на выходе элемента E на наборе $(\tilde{1}^n)$ в схеме S равно 0. Если неисправен выход этого элемента, то утверждение очевидно. Если же неисправен хотя бы один из входов элемента E, а его выход исправен, то на наборе $(\tilde{1}^n)$ значения не менее чем на одном и не более чем на k входах этого элемента в схеме S отличны от «правильных», т. е. от единиц, поскольку всего в этой схеме неисправны не более k входов/выходов элементов, а выходы элементов в ней не ветвятся. Тогда в силу определения функции ω значение на выходе элемента E на наборе $(\tilde{1}^n)$ в схеме S равно 0, что и требовалось доказать.

Далее изменение значения на выходе элемента E на наборе $(\tilde{1}^n)$ в схеме S с «правильного» значения 1 на 0 пройдёт по цепочке до выхода схемы S (здесь снова используются тот факт, что всего в этой схеме неисправны не более k входов/выходов элементов, а выходы элементов в ней не ветвятся, и определение функции ω). Таким образом, неисправность схемы S будет обнаружена на наборе $(\tilde{1}^n)$. Отсюда следует, что данная схема k-неизбыточна и множество $\{(\tilde{1}^n)\}$ является для неё k-проверяющим тестом. Лемма 1 доказана. $\square$

Положим для удобства $m = \max(k + 1; 3)$, $\tilde{x}^m = (x_1, \dots, x_m)$ и $\varphi(\tilde{x}^m) = x_1 \dots x_m \vee \overline{x}_1 \dots \overline{x}_m$. Рассмотрим базис $B_3 = \{\varphi(\tilde{x}^m), \overline{x}\}$. Любой функциональный элемент, реализующий функцию вида $\varphi(\tilde{x}^m)$ (вида $\overline{x}$), будем называть *φ-элементом* (соответственно, *инвертором*).

Лемма 2. *Не существует схем в базисе B_3, реализующих константу* 0 *и k-неизбыточных относительно неисправностей на входах и выходах элементов.*

Доказательство. Выход любой схемы в базисе B_3, реализующей константу 0, очевидно, не может совпадать ни с одним из её входов, поэтому он является выходом некоторого функционального элемента. Тогда при неисправности на выходе этого элемента получающаяся схема по-прежнему будет реализовывать константу 0, т. е. исходная схема k-избыточна. Лемма 2 доказана. □

Выделим возможное представление функции $f(\tilde{x}^n)$:

$$f(\tilde{x}^n) = x_i, \tag{1}$$

где $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Лемма 3. *Любую булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ вида* (1) *можно реализовать k-неизбыточной схемой в базисе B_3, допускающей k-проверяющий тест длины* 0 *относительно неисправностей на входах и выходах элементов.*

Доказательство. Функцию f, очевидно, можно реализовать схемой, не содержащей функциональных элементов. У такой схемы нет ни одной функции неисправности, поэтому пустое множество является для неё k-проверяющим тестом. Лемма 3 доказана. □

Лемма 4. *Любую булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, не представимую в виде* (1), *можно реализовать k-неизбыточной схемой в базисе B_3, допускающей k-проверяющий тест из одного набора* $(\tilde{1}^n)$ *относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых — в случае* $f(\tilde{1}^n) = 0$ *— выход выходного элемента схемы исправен.*

Доказательство. Пусть $A = [\{\varphi(\tilde{x}^m)\}]$ — замыкание множества $\{\varphi(\tilde{x}^m)\}$, тогда $A \subseteq T_1$, поскольку $\varphi(\tilde{1}^m) = 1$ (определения замыкания и замкнутого класса T_1 можно найти, например, в [12] на с. 14 и 17 соответственно). Из определения функции φ нетрудно получить, что $\varphi(\underbrace{x, \ldots, x}_{m}) \equiv 1$, $\varphi(\underbrace{x, \ldots, x}_{m-1}, y) = x \sim y$, поэтому $1 \in A$ и $x \sim y \in A$. Далее, $xy = \varphi(x, y, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m-2}) \in A$ (поскольку $m \geqslant 3$) и $\overline{x} \vee y = xy \sim x \in A$. Таким образом, $\{\overline{x} \vee y, xy\} \subseteq A$, следовательно, $T_1 = [\{\overline{x} \vee y, xy\}] \subseteq A$ (равенство $T_1 = [\{\overline{x} \vee y, xy\}]$ установлено, например, в [12, с. 37]). Отсюда и из соотношения $A \subseteq T_1$ получаем, что $A = T_1$, т. е. любую булеву функцию $h(\tilde{x}^n)$ из класса T_1 можно выразить формулой ϕ_h над множеством $\{\varphi(\tilde{x}^m)\}$. Тогда существует схема S_h в базисе B_3, состоящая только из входных переменных $x_1, \ldots, x_n$ и φ-элементов, выход каждого из которых, кроме выходного, соединён ровно с одним входом ровно одного элемента, моделирующая формулу ϕ_h.

Отметим, что функция $\varphi(\tilde{x}^m)$ принимает значение 1 только на наборах $(\tilde{0}^m)$ и $(\tilde{1}^m)$. Отсюда и из неравенства $k < m$ вытекает, что она принимает значение 0 на всех наборах, k-соседних с набором $(\tilde{1}^m)$, кроме него самого. Поэтому к схеме S_h можно применить лемму 1, из которой следует, что данная схема k-неизбыточна и множество $\{(\tilde{1}^n)\}$ является для неё k-проверяющим тестом. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $f(\tilde{1}^n) = 1$. Тогда $f(\tilde{x}^n) \in T_1$, схема S_f реализует функцию f, k-неизбыточна и множество $\{(\tilde{1}^n)\}$ является для неё k-проверяющим тестом длины 1.

2. Пусть $f(\tilde{1}^n) = 0$. Тогда $\overline{f}(\tilde{x}^n) \in T_1$, схема $S_{\overline{f}}$ реализует функцию $\overline{f}$, k-неизбыточна и множество $\{(\tilde{1}^n)\}$ является для неё k-проверяющим тестом. Выход схемы $S_{\overline{f}}$ соединим со входом инвертора I, выход которого объявим выходом полученной схемы (обозначим её S). Очевидно, что схема S реализует функцию f, а множество $\{(\tilde{1}^n)\}$ позволяет обнаружить любую неисправность этой схемы, при которой вход и выход инвертора I исправны. Если вход этого инвертора неисправен, а выход исправен, то на выходе схемы S реализуется константа 1, которую можно отличить от функции f на наборе $(\tilde{1}^n)$. Поэтому схема S является k-неизбыточной относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход её выходного элемента исправен, и множество $\{(\tilde{1}^n)\}$ является для неё k-проверяющим тестом длины 1 относительно неисправностей указанного вида. Лемма 4 доказана. $\square$

Лемма 5. *Для любой k-неизбыточной схемы в базисе B_3, реализующей булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, не представимую в виде (1), любой k-проверяющий тест относительно неисправностей на входах элементов содержит хотя бы один набор.*

Доказательство. Выход любой k-неизбыточной схемы, реализующей функцию f, не может совпадать ни с одним из её входов, поэтому он является выходом некоторого функционального элемента. Тогда при неисправности любого входа этого элемента получающаяся схема будет реализовывать нетривиальную функцию неисправности, которую надо отличить от функции f хотя бы на одном наборе. Лемма 5 доказана. $\square$

Теорема 1. *Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, отличной от константы 0, справедливо равенство*

$$D^{B_3;\,0}_{k\text{-П (IO)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде } (1), \\ 1, & \text{если } f \text{ не представима в виде } (1) \text{ и } f(\tilde{1}^n) = 1, \\ 2, & \text{если } f(\tilde{1}^n) = 0. \end{cases}$$

Если же $f \equiv 0$, то значение $D^{B_3;\,0}_{k\text{-П (IO)}}(f)$ не определено.

Следствие 1. *Для любого $n \geqslant 1$ справедливо равенство $D^{B_3;\,0}_{k\text{-П (IO)}}(n) = 2$.*

Доказательство теоремы 1. Вместо $D^{B_3;\,0}_{k\text{-П (IO)}}(f)$ для краткости будем писать $D(f)$. В случае $f \equiv 0$ значение $D(f)$ не определено в силу леммы 2. Равенство $D(f) = 0$, если функция f представима в виде (1), следует из леммы 3. Неравенство $D(f) \leqslant 1$ в случае, когда функция f не представима в виде (1) и $f(\tilde{1}^n) = 1$, следует из леммы 4.

Пусть $f \not\equiv 0$ и $f(\tilde{1}^n) = 0$. В силу леммы 4 функцию f можно реализовать k-неизбыточной схемой в базисе B_3, допускающей k-проверяющий тест из одного набора $(\tilde{1}^n)$ относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход выходного элемента схемы исправен. Добавим к этому набору любой двоичный набор $\tilde{\sigma}$ длины n, на котором функция f принимает значение 1. Тогда любую неисправность, при которой неисправен выход выходного элемента указанной схемы, можно обнаружить на наборе $\tilde{\sigma}$. Поэтому данная схема k-неизбыточна относительно неисправностей на входах и выходах элементов и множество $\{(\tilde{1}^n), \tilde{\sigma})\}$ является для неё k-проверяющим тестом длины 2, откуда следует, что $D(f) \leqslant 2$.

Неравенство $D(f) \geqslant 1$ в случае, когда функция f отлична от константы 0 и не представима в виде (1), вытекает из леммы 5 (неисправности на входах элементов являются частным случаем неисправностей на входах и выходах элементов).

Докажем неравенство $D(f) \geqslant 2$ в случае $f \not\equiv 0$ и $f(\tilde{1}^n) = 0$. Предположим, что оно неверно, т. е. $D(f) \leqslant 1$. Выше было показано, что $D(f) \geqslant 1$, поэтому $D(f) = 1$. Значит, функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать k-неизбыточной схемой S, допускающей k-проверяющий тест из какого-то одного набора $\tilde{\pi}$. Пусть данная функция существенно зависит от s переменных; из соотношений $f \not\equiv 0$ и $f(\tilde{1}^n) = 0$ следует, что $1 \leqslant s \leqslant n$. Без ограничения общности это переменные $x_1, \ldots, x_s$. Очевидно, что каждая переменная x_i, $i = 1, \ldots, s$, обязана подаваться хотя бы на один вход хотя бы одного элемента схемы S. Тогда при неисправности этого входа получающаяся функция неисправности g_i данной схемы не совпадает с f и её надо отличить от функции f хотя бы на одном наборе, причём функция g_i, очевидно, может отличаться от функции f только на тех наборах, i-я (слева) компонента которых равна 1. Отсюда получаем, что первые s компонент набора $\tilde{\pi}$ равны единице. Функция $f(\tilde{x}^n)$ не зависит существенно от переменных $x_{s+1}, \ldots, x_n$ (при $s < n$), поэтому $f(\tilde{\pi}) = f(\tilde{1}^n) = 0$. Но тогда неисправность на выходе выходного элемента схемы S нельзя обнаружить на наборе $\tilde{\pi}$, т. е. множество $\{\tilde{\pi}\}$ не может являться k-проверяющим тестом для схемы S. Полученное противоречие означает, что $D(f) \geqslant 2$. Теорема 1 доказана. $\square$

Теорема 2. *Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B_3;\,0}_{k\text{-П (I)}}(f) = \begin{cases} 0, & \textit{если } f \textit{ представима в виде } (1), \\ 1, & \textit{если } f \textit{ не представима в виде } (1). \end{cases}$$

Следствие 2. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо равенство $D^{B_3;\,0}_{k\text{-П (I)}}(n) = 1$.*

Доказательство теоремы 2. Вместо $D^{B_3;\,0}_{k\text{-П (I)}}(f)$ для краткости будем писать $D(f)$. Равенство $D(f) = 0$ в случае, когда функция f представима в виде (1), следует из леммы 3. Если же функция f не представима в виде (1), то неравенство $D(f) \leqslant 1$ следует из леммы 4, а неравенство $D(f) \geqslant 1$ — из леммы 5. Теорема 2 доказана. $\square$

Используя теоремы 1–2, следствия 1–2 и принцип двойственности (см., например, [12, с. 19, утверждение 3]), а именно, рассматривая схемы, получающиеся заменой всех элементов в схемах из доказательства теорем 1–2 на двойственные, нетрудно получить двойственные им результаты для случая $p = 1$ и базиса $B_3^* = \{\overline{x_1 \ldots x_m \vee \overline{x}_1 \ldots \overline{x}_m}, \overline{x}\}$. В частности, при $n \geqslant 1$ справедливо равенство $D^{B_3^*;\,1}_{k\text{-П (IO)}}(n) = 2$, а при $n \geqslant 0$ — равенство $D^{B_3^*;\,1}_{k\text{-П (I)}}(n) = 1$.

3. Диагностические тесты

Рассмотрим случай $p = 0$. Положим для удобства $q = 2k + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 2$ и $\tilde{x}^q = (x_1, \ldots, x_q)$. Отметим, что $q \leqslant 2{,}5k + 2$, а в силу соотношения $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil$ имеет место равенство $q = 2k + \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil + 1$. Пусть $\psi(\tilde{x}^q)$ — булева функция, удовлетворяющая следующим условиям:

(i) $(\tilde{1}^q) = 1$;

(ii) на всех наборах, k-соседних с набором $(\tilde{1}^q)$, кроме него самого, функция ψ принимает значение 0;

(iii) на всех наборах, k-соседних с набором $\tilde{\sigma}_1 = (\tilde{0}^{k+1}, \tilde{1}^{k+\lceil \frac{k+1}{2} \rceil})$, функция ψ принимает значение 0;

(iv) на всех наборах, k-соседних с набором $\tilde{\sigma}_2 = (\tilde{1}^{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}, \tilde{0}^{2k+1})$, функция ψ принимает значение 1.

На всех остальных двоичных наборах длины q функция ψ может принимать произвольные значения.

Покажем, что данная функция определена корректно, т. е. множества наборов, на которых она принимает значения 0 и 1, не пересекаются. Заметим, что набор $\tilde{\sigma}_2$ отличается от набора $(\tilde{1}^q)$ в $2k+1$ компоненте, а от набора $\tilde{\sigma}_1$ — в

$$\left(\left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil\right) + \left(k + \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil\right) = k + 2\left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil \geqslant 2k+1$$

компоненте, поэтому любой набор, k-соседний с набором $\tilde{\sigma}_2$, отличается от каждого из наборов $(\tilde{1}^q)$, $\tilde{\sigma}_1$ по крайней мере в $k+1$ компоненте, т. е. не может быть k-соседним ни с одним из этих наборов. Далее, набор $(\tilde{1}^q)$ отличается от набора $\tilde{\sigma}_1$ в $k+1$ компоненте, поэтому не является k-соседним с этим набором. Тем самым показано, что множества наборов, на которых функция $\psi(\tilde{x}^q)$ принимает значения 0 и 1, не пересекаются, значит, она определена корректно.

Рассмотрим базис $B_4 = \{\psi, \overline{\psi}\}$. Любой функциональный элемент, реализующий функцию вида $\psi(\tilde{x}^q)$ (вида $\overline{\psi}(\tilde{x}^q)$), будем называть *$\psi$-элементом* (соответственно, *$\overline{\psi}$-элементом*).

По аналогии с леммами соответственно 2, 3 и 5 доказываются следующие утверждения.

Лемма 6. *Не существует схем в базисе B_4, реализующих константу* 0 *и k-неизбыточных относительно неисправностей на входах и выходах элементов.*

Лемма 7. *Любую булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ вида (1) можно реализовать k-неизбыточной схемой в базисе B_4, допускающей k-диагностический тест длины* 0 *относительно неисправностей на входах и выходах элементов.*

Лемма 8. *Для любой k-неизбыточной схемы в базисе B_4, реализующей булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, не представимую в виде* (1)*, любой k-диагностический тест относительно неисправностей на входах элементов содержит хотя бы один набор.*

Выделим ещё одно возможное представление функции $f(\tilde{x}^n)$:

$$f(\tilde{x}^n) = x_{i_1}\& \ldots \& x_{i_s}, \tag{2}$$

где $s \in \{1, \ldots, n\}$ и $i_1, \ldots, i_s$ — попарно различные индексы от 1 до n.

Отметим, что представление (1) является частным случаем представления (2).

Лемма 9. *Любую булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, не представимую в виде* (1)*, можно реализовать k-неизбыточной схемой S в базисе B_3, допускающей k-диагностический тест длины* 1 *относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых — в случае, когда функция f не представима в виде* (2) *— выход выходного элемента схемы исправен; при этом в указанном случае единственной функцией неисправности схемы S является функция $f \oplus x_1 \ldots x_n$.*

Доказательство. Пусть $A' = [\{\psi(\tilde{x}^q)\}]$ — замыкание множества $\{\psi(\tilde{x}^q)\}$, тогда $A' \subseteq T_1$ в силу условия (i). Из условий (i)–(iv) нетрудно получить, что $\psi(\underbrace{x, \ldots, x}_{q}) \equiv 1$, $\psi(\tilde{1}^{q-2}, x, y) = xy$ и $\psi(\underbrace{y, \ldots, y}_{k+1}, \underbrace{x, \ldots, x}_{k+\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}) = \overline{x} \vee y$, поэтому $\{\overline{x} \vee y, xy\} \subseteq A'$ и $T_1 = [\{\overline{x} \vee y, xy\}] \subseteq A'$. Отсюда и из соотношения $A' \subseteq T_1$ получаем, что $A' = T_1$, т. е. любую булеву функцию $h(\tilde{x}^n)$ из класса T_1 можно выразить формулой ϕ'_h над множеством $\{\psi(\tilde{x}^q)\}$. Тогда существует схема S'_h в базисе B_4, состоящая только из входных переменных $x_1, \ldots, x_n$ и ψ-элементов, выход каждого из которых, кроме выходного, соединён ровно с одним входом ровно одного элемента, моделирующая формулу ϕ'_h. С учётом условий (i), (ii) получаем, что к схеме S'_h можно применить лемму 1, из которой следует, что данная схема k-неизбыточна и множество $\{(\tilde{1}^n)\}$ является для неё k-проверяющим тестом.

Введём для удобства обозначение $a = \overline{f}(\tilde{1}^n)$. Построим схему S в базисе B_4, реализующую функцию $f(\tilde{x}^n)$ (см. рисунок). Схема S состоит из q подсхем S_1–S_q и элемента E, являющегося ψ-элементом при $a = 0$ и $\overline{\psi}$-элементом при $a = 1$, входы которого соединяются с выходами этих подсхем (1-й вход — с выходом подсхемы S_1, …, q-й вход — с выходом подсхемы S_q). Выходом схемы S является выход элемента E. Каждая из подсхем $S_1, \ldots, S_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}$ представляет собой копию схемы $S'_{f \oplus a}$, каждая из подсхем $S_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil + 1}, \ldots, S_{k+1}$ — копию схемы $S'_{h_\&}$, где $h_\&(\tilde{x}^n) = x_1 \& \ldots \& x_n$, а каждая из подсхем $S_{k+2}, \ldots, S_q$ — копию схемы $S'_{f \oplus a \oplus h_\& \oplus 1}$ (отметим, что каждая из булевых функций $f \oplus a$, $h_\&$ и $f \oplus a \oplus h_\& \oplus 1$ принадлежит классу T_1: например, $(f \oplus a)(\tilde{1}^n) = f(\tilde{1}^n) \oplus a = \overline{a} \oplus a = 1$).

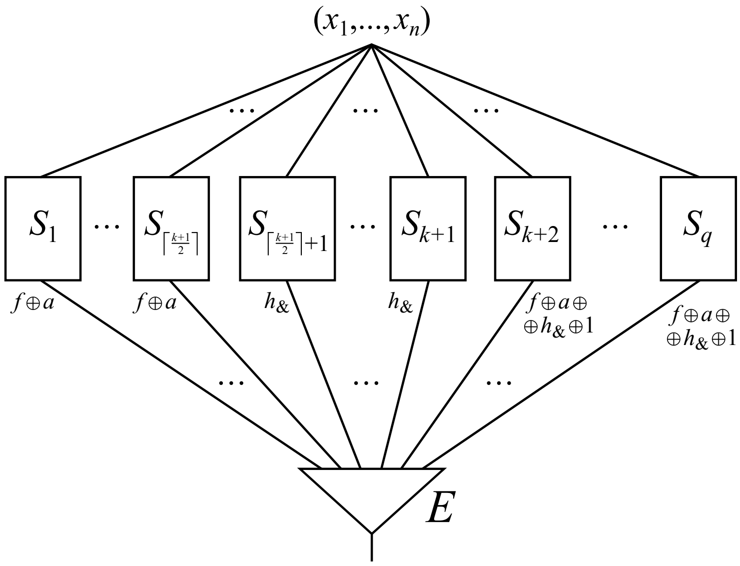

Схема S

Докажем, что построенная схема S в случае отсутствия в ней неисправностей реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. Прежде всего заметим, что элемент E по определению реализует функцию вида $\psi \oplus a$ от своих входов. На любом двоичном наборе $\tilde{\tau}_a$ длины n, на котором функция f принимает значение a, на выходах подсхем S_1–$S_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}$, $S_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil + 1}$–$S_{k+1}$, S_{k+2}–S_q возникнут значения 0, 0, 1 соответственно (здесь используется тот факт, что $\tilde{\tau}_a \neq (\tilde{1}^n)$, поскольку $f(\tilde{\tau}_a) = a = \overline{f}(\tilde{1}^n)$). Тогда на входы элемента E будет подан в точности набор $\tilde{\sigma}_1$, а на его выходе, т. е. на выходе схемы S, возникнет значение $\psi(\tilde{\sigma}_1) \oplus a = a = f(\tilde{\tau}_a)$ в силу условия (iii). Далее, на любом двоичном наборе $\tilde{\tau}_{\overline{a}}$ длины n, на котором функция f принимает значение $\overline{a}$, отличном от набора $(\tilde{1}^n)$, на выходах подсхем S_1–$S_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}$, $S_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil + 1}$–$S_{k+1}$, S_{k+2}–S_q возникнут значения 1, 0, 0 соответственно. Тогда на входы элемента E будет подан в точности набор $\tilde{\sigma}_2$, а на его выходе, т. е. на выходе схемы S, возникнет значение $\psi(\tilde{\sigma}_2) \oplus a = \overline{a} = f(\tilde{\tau}_{\overline{a}})$ в силу условия (iv). Наконец, на наборе $(\tilde{1}^n)$ на выходах подсхем S_1–$S_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}$, $S_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil + 1}$–$S_{k+1}$, S_{k+2}–S_q возникнут значения 1, 1, 1 соответственно. Тогда на входы элемента E будет подан набор $(\tilde{1}^q)$, а на его выходе, т. е. на выходе схемы S, возникнет значение $\psi(\tilde{1}^q) \oplus a = \overline{a} = f(\tilde{1}^n)$ в силу условия (i). Таким образом, на выходе схемы S реализуется в точности функция $f(\tilde{x}^n)$.

Найдём все возможные функции неисправности схемы S. Пусть выход элемента E исправен. При произвольной неисправности не менее одного и не более k входов/выходов элементов подсхем S_1–S_q и/или входов элемента E на любом входном наборе схемы S могут измениться значения не более чем на k входах элемента E. Поэтому на любом наборе $\tilde{\tau}_a$, на котором функция f принимает значение a, на входы элемента E поступит набор, k-соседний с набором $\tilde{\sigma}_1$, а на его выходе, т. е. на выходе схемы S, возникнет значение $0 \oplus a = a = f(\tilde{\tau}_a)$ в силу условия (iii). Аналогично на любом наборе $\tilde{\tau}_{\overline{a}}$, на котором функция f принимает значение $\overline{a}$, отличном от набора $(\tilde{1}^n)$, на входы элемента E поступит набор, k-соседний с набором $\tilde{\sigma}_2$, а на его выходе, т. е. на выходе схемы S, возникнет значение $1 \oplus a = \overline{a} = f(\tilde{\tau}_{\overline{a}})$ в силу условия (iv). Наконец, на наборе $(\tilde{1}^n)$ на входы элемента E поступит набор, k-соседний с набором $(\tilde{1}^q)$. При этом хотя бы одна компонента указанного набора будет равна 0, поскольку множество $\{(\tilde{1}^n)\}$ является k-проверяющим тестом для каждой из подсхем S_1–S_q, а в случае исправности всех элементов каждая из этих подсхем на наборе $(\tilde{1}^n)$ выдаёт единицу. Следовательно, на выходе элемента E, т. е. на выходе схемы S, возникнет значение $0 \oplus a = a = \overline{f}(\tilde{1}^n)$ в силу условия (ii). Таким образом, на выходе схемы S возникнет функция неисправности g_1, отличающаяся от функции f только на наборе $(\tilde{1}^n)$ (её можно записать в виде $g_1 = f \oplus x_1 \ldots x_n$).

Если функция f не представима в виде (2), то по условию леммы выход элемента E исправен и, тем самым, g_1 — единственная функция неисправности схемы S. Данную функцию можно отличить от функции f на наборе $(\tilde{1}^n)$, поэтому схема S является k-неизбыточной относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход её выходного элемента исправен, и допускает k-диагностический тест из одного набора, что и требовалось доказать.

Если функция f представима в виде (2) при $s = n$, а выход элемента E неисправен, то на выходе схемы S возникнет функция неисправности $g_2 \equiv 0$, однако

$$g_1 = f \oplus x_1 \ldots x_n = x_1 \ldots x_n \oplus x_1 \ldots x_n \equiv g_2.$$

Значит, g_1 — единственная функция неисправности схемы S. Данную функцию можно отличить от функции f на наборе $(\tilde{1}^n)$, поэтому схема S является k-неизбыточной и допускает k-диагностический тест из одного набора, что и требовалось доказать. Тем самым установлено, что функцию $x_1 \ldots x_n$ можно реализовать k-неизбыточной схемой в базисе B_4, допускающей k-диагностический тест длины 1 относительно неисправностей на входах и выходах элементов. В случае же, когда функция f имеет вид (2) и $s < n$, можно без ограничения общности считать, что $i_1 = 1$, $\ldots$, $i_s = s$, и применить утверждение, сформулированное в предыдущем предложении, с заменой n на s (на входы элементов схемы в этом случае будут подаваться только переменные $x_1, \ldots, x_s$), а затем добавить к единственному тестовому набору справа произвольные $n - s$ компонент, чтобы его длина стала равна n и множество, состоящее из одного этого набора, удовлетворяло определению диагностического теста. Лемма 9 доказана. □

Теорема 3. *Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, отличной от константы 0, справедливо равенство*

$$D^{B_4;\,0}_{k\text{-Д}\,(\text{IO})}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде } (1), \\ 1, & \text{если } f \text{ представима в виде } (2), \text{ но не в виде } (1), \\ 2, & \text{если } f \text{ не представима в виде } (2). \end{cases}$$

Если же $f \equiv 0$, то значение $D^{B_4;\,0}_{k\text{-Д}\,(\text{IO})}(f)$ не определено.

Следствие 3. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо равенство $D^{B_4;\,0}_{k\text{-Д}\,(\text{IO})}(n) = 2$.*

Доказательство теоремы 3. Вместо $D^{B_4;\,0}_{k\text{-Д}\,(\text{IO})}(f)$ для краткости будем писать $D(f)$. В случае $f \equiv 0$ значение $D(f)$ не определено в силу леммы 6. Далее будем считать, что $f \not\equiv 0$. Равенство $D(f) = 0$, если функция f представима в виде (1), следует из леммы 7. Неравенство $D(f) \leqslant 1$ в случае, когда функция f представима в виде (2), но не в виде (1), следует из леммы 9.

Пусть функция f не представима в виде (2). В силу леммы 9 её можно реализовать схемой S в базисе B_4, единственной функцией неисправности которой при неисправностях на входах и выходах элементов, за исключением выхода выходного элемента, является функция

$g_1 = f \oplus x_1 \dots x_n$. Если же неисправен выход выходного элемента схемы S, то она станет реализовывать функцию $g_2 \equiv 0$. Пусть $\tilde{\sigma}$ — произвольный двоичный набор длины n, отличный от набора $(\tilde{1}^n)$, на котором функция f принимает значение 1; такой набор найдётся, поскольку $f \not\equiv 0$ и $f \not\equiv x_1 \dots x_n$. Тогда функцию f можно отличить от функции g_1 на наборе $(\tilde{1}^n)$, а функцию g_2 можно отличить от каждой из функций f, g_1 на наборе $\tilde{\sigma}$. Поэтому схема S является k-неизбыточной относительно неисправностей на входах и выходах элементов и допускает k-диагностический тест из наборов $(\tilde{1}^n)$ и $\tilde{\sigma}$, откуда следует, что $D(f) \leqslant 2$.

Неравенство $D(f) \geqslant 1$ в случае, когда функция f не представима в виде (1), вытекает из леммы 8.

Докажем неравенство $D(f) \geqslant 2$ в случае, когда функция f не имеет вид (2). Пусть S — произвольная k-неизбыточная схема, реализующая функцию f, и на входы её элементов подаются s переменных из числа $x_1, \dots, x_n$. Поскольку функция f не представима в виде (2), а значит, и в виде (1), то $s \geqslant 1$ и, кроме того, в схеме S содержится выходной элемент. Без ограничения общности на входы элементов схемы S подаются переменные $x_1, \dots, x_s$. При неисправности на выходе выходного элемента данной схемы возникнет функция неисправности $g_1 \equiv 0$.

Очевидно, что функция $f(\tilde{x}^n)$ может зависеть существенно только от переменных $x_1, \dots, x_s$. Если на всех двоичных наборах длины n, хотя бы одна из первых s (слева) компонент которых равна 0, функция f принимает значение 0, то $f \equiv 0$ или $f \equiv x_1 \& \dots \& x_s$ (т. е. имеет вид (2)), что невозможно по предположению. Поэтому на некотором наборе $\tilde{\pi}$ длины n, хотя бы одна из первых s компонент которого равна 0, функция f принимает значение 1. Пусть i-я компонента набора $\tilde{\pi}$ равна 0, где $i \in \{1, \dots, s\}$. Переменная x_i подаётся хотя бы на один вход хотя бы одного элемента схемы S. При неисправности этого входа получающаяся функция неисправности g_2 данной схемы в силу её k-неизбыточности не совпадает с f, однако указанную неисправность, очевидно, нельзя обнаружить на наборе $\tilde{\pi}$ (на этом наборе $x_i = 0$), поэтому $g_2(\tilde{\pi}) = f(\tilde{\pi}) = 1$. Таким образом, функции f, g_1 и g_2 попарно различны. Чтобы отличить эти функции друг от друга, необходимы по крайней мере два набора, откуда следует неравенство $D(f) \geqslant 2$. Теорема 3 доказана. $\square$

Теорема 4. *Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B_4;\,0}_{k\text{-Д}\,(\mathrm{I})}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде } (1), \\ 1, & \text{если } f \text{ не представима в виде } (1). \end{cases}$$

Следствие 4. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо равенство* $D^{B_4;\,0}_{k\text{-Д (I)}}(n) = 1$.

Доказательство теоремы 4. Вместо $D^{B_4;\,0}_{k\text{-Д (I)}}(f)$ для краткости будем писать $D(f)$. Равенство $D(f) = 0$ в случае, когда функция f представима в виде (1), следует из леммы 7. Если же функция f не представима в виде (1), то неравенство $D(f) \geqslant 1$ следует из леммы 8, а неравенство $D(f) \leqslant 1$ — из леммы 9. Теорема 4 доказана. □

Используя теоремы 3–4, следствия 3–4 и принцип двойственности, нетрудно получить двойственные им результаты для случая $p = 1$ и базиса $B_4^* = \{\psi^*, \overline{\psi^*}\}$, где $\psi^*(\tilde{x}^q)$ — двойственная к $\psi(\tilde{x}^q)$ булева функция. В частности, при $n \geqslant 0$ справедливы равенства $D^{B_4^*;\,1}_{k\text{-Д (IO)}}(n) = 2$ и $D^{B_4^*;\,1}_{k\text{-Д (I)}}(n) = 1$.

Работа выполнена при поддержке Программы Президиума РАН № 01 «Фундаментальная математика и ее приложения» (грант PRAS-18-01).

Список литературы

[1] Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН. — 1958. — **51**. — С. 270–360.

[2] Яблонский С. В. Надежность и контроль управляющих систем // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и её приложениям (Москва, 31 января–2 февраля 1984 г.) / Под ред. О. Б. Лупанова. — М.: Изд-во МГУ, 1986. — С. 7–12.

[3] Яблонский С. В. Некоторые вопросы надёжности и контроля управляющих систем // Матем. вопросы киберн. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 5–25.

[4] Редькин Н. П. Надёжность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992.

[5] Коляда С. С. Верхние оценки длины проверяющих тестов для схем из функциональных элементов. — Дисс. на соиск. уч. ст. к.ф.-м.н. — М., 2013. — 77 с.

[6] Reddy S. M. Easily testable realizations for logic functions // IEEE Trans. Comput. — 1972. — **C-21**, No. 11. — P. 1183–1188.

[7] Saluja K. K, Reddy S. M. Fault detecting test sets for Reed-Muller canonic networks // IEEE Trans. Comput. — 1975. — **C-24**, No. 10. — P. 995–998.

[8] Романов Д. С., Романова Е. Ю. Метод синтеза неизбыточных схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины // Дискретн. матем. — 2017. — **29**, вып. 4. — С. 87–105.

[9] Редькин Н. П. О проверяющих тестах для схем при однотипных константных неисправностях на входах элементов // Изв. вузов. Матем. — 1988. — № 7. — С. 57–64.

[10] Редькин Н. П. О схемах, допускающих короткие единичные диагностические тесты // Дискретн. матем. — 1989. — **1**, вып. 3. — С. 71–76.

[11] Редькин Н. П. О проверяющих тестах для схем при константных неисправностях на входах элементов // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. — 1997. — № 1. — С. 12–18.

[12] Угольников А. Б. Классы Поста. Учебное пособие. — М.: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ, 2008.

Synthesis of easily testable logic networks under one-type stuck-at faults at inputs and outputs of gates

Popkov K.A.

The following assertions are proved: for each natural k and each Boolean constant p, there exists a basis consisting of a Boolean function on $\max(k+1; 3)$ variables and negation of one variable (there exists a basis consisting of a Boolean function on not more than $2{,}5k+2$ variables and negation of this function), in which one can implement any Boolean function except a Boolean constant p by a logic network which is irredundant and allows a fault detection test (a diagnostic test, respectively) with a length not exceeding 2 under not more than k stuck-at-p faults at inputs and outputs of gates. It is shown that, when considering only stuck-at-p faults at inputs of gates, one can reduce the mentioned bounds on lengths of tests to 1.

Keywords: logic network, one-type stuck-at fault, fault detection test, diagnostic test.