Некорректность интуиционистской логики относительно L-реализуемости.

Коновалов А. Ю.

Для каждого счетного расширения L языка арифметики определяется абсолютная L-реализуемость предикатных формул. Доказывается, что интуиционистская логика не является корректной относительно этих семантик.

Ключевые слова: конструктивная семантика, реализуемость, абсолютная реализуемость, формальная арифметика, интуиционистская логика.

Будем считать, что язык формальной арифметики LA содержит обозначения для всех примитивно рекурсивных функций, а также константы для обозначения всех натуральных чисел. Расширение LA' языка LA получается добавлением к LA предикатных символов P_i^n и функциональных символов f_i^n для всех $i \geq 0,\ n \geq 1$. Валентность символов P_i^n и f_i^n полагается равной n. Формулы языка LA' строятся обычным образом из атомов и логических констант $\top, \bot$ при помощи логических связок $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ и кванторов $\exists$, $\forall$. Выражение $\neg A$ условимся рассматривать как сокращение для формулы $A \rightarrow \bot$. Будем считать, что фиксирована геделева нумерация языка LA'. Формулу языка LA' с геделевым номером z обозначаем через Φ_z. Через $\ulcorner \Phi \urcorner$ обозначаем геделев номер формулы Φ.

Фиксируем расширение L языка LA и интерпретацию $\mathcal{N}_L$ языка L такие, что L — подъязык языка LA', а интерпретация $\mathcal{N}_L$ является продолжением стандартной интерпретацией языка LA. *Униформизацией* формулы $\Phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ языка L, не содержащей параметров, отличных от $x_1, \ldots, x_n, y$, будем называть формулу

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge (\forall y_1 < y)\, \neg\Phi(x_1, \ldots, x_n, y_1),$$

которую обозначим $\Phi^U(x_1, \ldots, x_n, y)$. Каждая такая формула задает частичную функцию $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$, где $f(k_1, \ldots, k_n) = k$, если и только если $\mathcal{N}_L \models \Phi^U(k_1, \ldots, k_n, k)$, т. е. формула $\Phi^U(k_1, \ldots, k_n, k)$ истинна в интерпретации $\mathcal{N}_L$. Через I_n^L обозначаем множество геделев номеров формул языка L, не содержащих параметров отличных от $x_1, \ldots, x_n, y$. Если $z \in I_n^L$, то посредством $\varphi_z^{L,n}$ обозначим n-местную частичную функцию, задаваемую формулой Φ_z^U. В выражениях вида $\varphi_z^{L,n}$ обычно будем опускать второй верхний индекс там, где он может быть восстановлен из контекста.

Будем говорить, что частичная функция $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ определима в языке L формулой $A(x_1, \ldots, x_n, y)$ этого языка, если имеет место $(k_1, \ldots, k_n) = n \iff \mathcal{N}_L \models A(k_1, \ldots, k_n, n)$ для всех натуральных чисел $k_1, \ldots, k_n, n$. Отметим, что n-местная функция ψ определима в языке L тогда и только тогда, когда найдется натуральное число $z \in I_n^L$, для которого выполняется соотношение $\psi(x_1, \ldots, x_n) \simeq \varphi_z^{L,n}(x_1, \ldots, x_n)$.

Представляет интерес рассмотрение варианта конструктивной логики, основанного на использовании определимых в языке L функций как конструктивного способа получения одних реализаций из других. Понятие L-реализуемости для языка LA можно определить по аналогии с рекурсивной реализуемостью Клини [1, §82]. Однако нетрудно убедиться, что возникающая при этом семантика совпадает со стандартной классической семантикой языка LA. Поэтому более уместным представляется рассмотрение L-реализуемости сразу в контексте абсолютной реализуемости предикатных формул [2].

Предикатные формулы строятся обычным образом из атомов $P(v_1, \ldots, v_n)$, где P есть n-местная предикатная переменная, а $v_1, \ldots, v_n$ — предметные переменные, при помощи логических констант $\top$, $\bot$, связок $\wedge$, $\vee$, $\to$ и кванторов $\forall$, $\exists$.

Пусть фиксированы примитивно-рекурсивные двухместная функция c, которая взаимно однозначно нумерует все пары натуральных чисел, и одноместные обратные функции p_1 и p_2, так что выполняются соотношения $\mathsf{p}_1(\mathsf{c}(x, y)) = x$ и $\mathsf{p}_2(\mathsf{c}(x, y)) = y$. В выражениях вида $\mathsf{p}_1(t)$, $\mathsf{p}_2(t)$ обычно будем опускать скобки.

Следуя [2], n-местным обобщенным предикатом будем называть всякую функцию типа $\mathbb{N}^n \to 2^{\mathbb{N}}$. Пусть A — предикатная формула, f — отображение, которое каждой предикатной переменной из A ставит в соответствие обобщенный предикат соответствующей валентности. В этом случае отображение f будем называть оценкой формулы A. Временно введем в язык логики предикатов константы для обозначения всех натуральных чисел. Формулы с этими константами будем называть предикатными формулами расширенного языка.

Для каждого натурального числа e, произвольной замкнутой предикатной формулы расширенного языка A и оценки f определим отношение $e\,\mathbf{r}^L_f\,A$ (число e реализует A при оценке f):

1) неверно $e\,\mathbf{r}^L_f\,\bot$;

2) верно $e\,\mathbf{r}^L_f\,\top$;

3) $e\,\mathbf{r}^L_f\,P(a_1,\ldots,a_n) \rightleftharpoons e \in f(P)(a_1,\ldots,a_n)$, если P есть n-местная предикатная переменная;

4) $e\,\mathbf{r}^L_f\,(\Phi\wedge\Psi) \rightleftharpoons \mathsf{p}_1 e\,\mathbf{r}^L_f\,\Phi$ и $\mathsf{p}_2 e\,\mathbf{r}^L_f\,\Psi$;

5) $e\,\mathbf{r}^L_f\,(\Phi\vee\Psi) \rightleftharpoons (\mathsf{p}_1 e = 0$ и $\mathsf{p}_2 e\,\mathbf{r}^L_f\,\Phi)$ или $(\mathsf{p}_1 e = 1$ и $\mathsf{p}_2 e\,\mathbf{r}^L_f\,\Psi)$;

6) $e\,\mathbf{r}^L_f\,\exists x\,\Phi(x) \rightleftharpoons \mathsf{p}_2 e\,\mathbf{r}^L_f\,\Phi(\mathsf{p}_1 e)$;

7) $e\,\mathbf{r}^L_f\,\forall x_1,\ldots,x_n\,(\Phi(x_1,\ldots,x_n)\to\Psi(x_1,\ldots,x_n)) \rightleftharpoons e \in I^L_{n+1}$ и для всех[1] $s,\ a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{N}$ верно

$$s\,\mathbf{r}^L_f\,\Phi(a_1,\ldots,a_n) \Longrightarrow\, !\varphi^L_e(a_1,\ldots,a_n,s) \text{ и } \varphi^L_e(a_1,\ldots,a_n,s)\,\mathbf{r}^L_f\,\Psi(a_1,\ldots,a_n),$$

если $n\geq 0$;

8) $e\mathbf{r}^L_f\forall x_1,\ldots,x_n\,\Phi \rightleftharpoons e\mathbf{r}^L_f\forall x_1,\ldots,x_n\,(\top\to\Phi)$, если $n>0$, формула Φ не начинается с квантора $\forall$, и логическая связка $\to$ не является главной в Φ.

Будем говорить, что замкнутая предикатная формула A является *абсолютно L-реализуемой*, если для любой оценки f формулы A найдется такое натуральное число e, что $e\,\mathbf{r}^L_f\,A$. По аналогии с определением примитивно рекурсивно реализуемой секвенции из работы С. Салехи [3] распространим на секвенции понятие абсолютной L-реализуемости.

$$e\,\mathbf{r}^L_f\,A(\overline{x})\Rightarrow B(\overline{x}) \rightleftharpoons e\,\mathbf{r}^L_f\,\forall\overline{x}\,(A(\overline{x})\to B(\overline{x})),$$

где $\overline{x}=x_1,\ldots,x_n$. Будем говорить, что секвенция $A\Rightarrow B$ является *абсолютно L-реализуемой*, если для любой оценки f предикатных формул A и B найдется такое натуральное число e, что $e\,\mathbf{r}^L_f\,A\Rightarrow B$.

Верна следующая теорема.

Теорема 1. *Секвенция $\top\to P(x)\Rightarrow P(x)$ не абсолютно L-реализуема.*

Из теоремы 1 следует, что формула $\forall x\,((\top\to P(x))\to P(x))$ не является абсолютно L-реализуемой. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Интуиционистское исчисление предикатов не является корректным относительно семантики абсолютной L-реализуемости.*

[1] Однако, если в списке $x_1,\ldots,x_n$ на некоторых позициях i и j стоят одинаковые переменные x_i и x_j, то мы не допускаем рассмотрение тех списков $a_1,\ldots,a_n$, в которых $a_i\neq a_j$.

Список литературы

[1] Клини С. К. Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957.

[2] Плиско В. Е. Абслолютная реализуемость предикатных формул // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. **47**, №2. 315–334.

[3] Salehi S. Primitive recursive realizability and basic arithmetic // Bull. Symbol. Logic. 2001. **7**, N 1. 147—148.

The intuitionistic logic is not sound with L-realizability.
Konovalov A. Yu.

An absolute L-realizability of predicate formulas is introduced for all countable extensions L of the language of arithmetic. It is proved that the intuitionistic logic is not sound with this semantics.

Keywords: constructive semantics, realizability, absolute realizability, formal arithmetic, intuitionistic logic.