О мере множества законов движения точки, реализуемых клеточными автоматами

Калачев Г.В., Титова Е.Е.

В работе рассматривается модель движения точки на экране, представляющем из себя бесконечный вправо одномерный клеточный автомат. Выделено подмножество множества состояний экрана, которое называется изображением точки на экране. Закон движения определяется бесконечной последовательностью из нулей и единиц, которые в каждый момент времени задают остановку или движение точки соответственно. Описан алгоритм реализации на экране широкого класса законов движения и исследована мера Бернулли множества реализуемых законов движения. Показано, что почти все законы движения являются реализуемыми. Также доказано, что относительно тихоновской топологии множество реализуемых законов движения относится к первой категории Бэра, то есть мало.

Ключевые слова: клеточный автомат, универсальный экран, движение точки, закон движения, мера Бернулли, тихоновская топология, категории Бэра.

1. Введение

Клеточный автомат — это математическая модель в дискретном пространстве и дискретном времени. Состояние ячейки пространства в каждый момент времени определяется в зависимости от состояний соседних ячеек и самой ячейки в предыдущий момент. Правила изменения состояний могут отличаться в разных ячейках. Частным случаем клеточного автомата является однородная структура — клеточный автомат, в котором правила изменения состояний одинаковы для всех ячеек. Однородными структурами и клеточными автоматами моделируются многие реальные физические и химические процессы [7].

Впервые идея клеточных автоматов отмечена в работах венгерско-американского математика Джона фон Неймана в 1940-х годах [8]. Нейман изучал проблему самовоспроизводящихся систем, и описал универсальный конструктор, строящий самовоспроизводящийся автомат [3].

Вплоть до конца 60-х идея клеточных автоматов была забыта.

В 1960х годах была выдвинута Эдвардом Муром и доказана Муром и Джоном Майхиллом Теорема сада Эдема о конфигурациях, не имеющих родителя.

В 1970 г. в октябрьском выпуске журнала Scientific American в рубрике Мартина Гарднера «Математические игры» было впервые опубликовано описание игры «Жизнь», автором которой был математик Джон Конвей. Впоследствии было показано, что игра «Жизнь» может эмулировать универсальную машину Тьюринга.

В 1983 британский ученый Стивен Вольфрам опубликовал первую из серии статей, исследующих элементарный клеточный автомат, то есть, автомат имеющий только два состояния. Вольфрам выдвигает предположение, что элементарный автомат, названный Правило 110 может быть универсальным. В 1990 году этот факт доказан ассистентом Вольфрама Мэтью Куком.

В 2002 году Вольфрам опубликовал текст «Новый тип науки» (A New Kind of Science), где широко аргументировал, что достижения в области клеточных автоматов не являются изолированными, и имеют большое значение для всех областей науки.

На механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова начиная с 1960х годов исследованием свойств однородных структур занимались профессор Валерий Борисович Кудрявцев [4], профессор Александр Сергеевич Подколзин [10][11], Анатолий Александрович Болотов [1]. Результатом их работы стала, в том числе, монография [6].

Данная работа является продолжением некоторых результатов диссертации Титовой Елены Евгеньевны «Конструирование изображений клеточными автоматами» [12].

В настоящей работе исследуются одномерные клеточные автоматы, которые реализуют различные конфигурации, движущиеся на бесконечном экране в зависимости от последовательности, подаваемой на управляющий вход. Бесконечный экран является бесконечной вправо последовательностью ячеек, в каждой из которых находится экземпляр конечного автомата, входами которого являются состояния соседних автоматов; на левый вход первой ячейки подаётся управляющая последовательность. Задаётся подмножество состояний автомата, соответствующих точке в ячейке экрана. Соответственно, каждая ячейка экрана либо пуста, либо в ней стоит точка в зависимости от текущего состояния автомата в ячейке. В работе рассматривается случай, когда на экране, начиная с некоторого момента появляется одна точка, которая перемещается вправо в соответствии с заданным законом, который называется законом движения. Закон движения задаётся бесконечной последовательностью из нулей и единиц, которая начинается с единицы, и в которой i-й элемент определяет, перемещается точка в момент времени на одну позицию вправо или остаётся на месте.

Задача заключается в описании множества всех законов движения, реализуемых на некотором экране с некоторой управляющей последовательностью. Изначально эта задача была поставлена и частично исследована в диссертации Титовой Е.Е [12]. В частности, было найдено множество реализуемых законов движения, а также приведён пример нереализуемого закона движения, однако часть законов движения осталась не охваченной. Целью данной работы было оценить, какую долю составляют реализуемые законы движения.

В работе введены классы $\mathcal{F}_a$ законов движения с ограниченной средней скоростью и показано, что все законы движения из этих классов реализуемы на некотором экране. На множестве всех законов движения введена бернуллиева мера и показано, что мера множества законов движения с ограниченной скоростью равна 1. Таким образом, относительно бернуллиевой меры почти все законы движения реализуемы. Также в работе рассматривается вопрос о том, какую долю занимают реализуемые законы движения среди законов движения с неограниченной скоростью.

В силу невозможности введения какой-либо естественной меры на всём множестве законов движения с неограниченной скоростью, рассматриваются достаточно большие подмножества этого множества, представляемые в виде конкатенации множеств слов фиксированной длины. На таких подмножествах естественным образом вводится равномерная мера. В работе показано, что для определённая таким образом мера реализуемых законов движения, попадающих в данное подмножество, равна 0.

Кроме меры множества реализуемых законов движения, рассматривается топологическая категория этого множества [9]. На множестве законов движения можно ввести топологию, порождённую множествами с фиксированным префиксом. В работе доказано, что относительно такой топологии множество реализуемых законов движения относится к первой категории Бэра, то есть является малым с топологической точки зрения.

Таким образом, в работе показано, что почти все законы движения реализуемы, но с топологической точки зрения они образуют малое множество.

2. Определения и формулировка результатов

Согласно [5], *конечный инициальный автомат* — это шестёрка $\mathcal{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$, где A — *входной алфавит*, Q — *множество состояний*, которое является конечным подмножеством некоторого фиксированного счётного множества, B — *выходной алфавит*, $\varphi : Q \times A \to Q$ — *функция переходов*, $\psi : Q \times A \to B$ — *функция выходов*, q_0 — *начальное состояние*.

Элементарным автоматом будем называть конечный инициальный автомат $\mathcal{A}$ с двумя входами и одним выходом, такой что:

$A = Q^2$, $B = Q$ для некоторого множества Q, $|Q| \geq 2$, $\psi = \varphi = \varphi(q, l, r)$, причём $\varphi(q_0, q_0, q_0) = q_0$.

Экраном бесконечной длины называется бесконечная последовательность из одинаковых элементарных автоматов $\mathcal{A}$, причём левый вход первого автомата называется *свободным*, к входам остальным входам элементарных автоматов присоединены выходы автоматов, стоящих в двух соседних с ним клетках, то есть у автомата имеется *левый* вход l, *правый* вход r и q — текущее состояние автомата. Выходом автомата $\mathcal{A}$ в заданный момент времени является его состояние в этот момент времени.

Бесконечный экран с элементарным автоматом $\mathcal{A}$ будем обозначать $S(\mathcal{A})$. Если элементарный автомат имеет q состояний, будем говорить, что экран $S(\mathcal{A})$ также имеет q состояний.

В множестве Q состояний элементарного автомата $\mathcal{A}$ выделим непустое подмножество L, не содержащее начальное состояние, и элементы этого множества будем называть *метками*.

В случае, когда на экране имеется ровно одна метка, будем называть её *точкой*.

Законом движения для бесконечного экрана будем называть сверхслово $F = F(1)F(2)...F(n)... \in \{0,1\}^\infty$, начинающееся с единицы. Введём обозначения

$$l_F(i) = \sum_{t=1}^{i} F(i) \text{ — число единиц в префиксе длины } i \text{ сверхслова } F,$$

$$s_F(i) = \sum_{t=1}^{i} (1 - F(i)) \text{ — число нулей в префиксе длины } i \text{ сверхслова } F.$$

Будем говорить, что *на экране* $S(\mathcal{A})$ *реализуется движение точки по закону* F, если существует момент времени $t_0 \in \mathbb{N}$ такой, что выполняются следующие условия:

1) до момента t_0 (включительно) на экране нет меток; момент t_0 будем называть *моментом начала движения* или *началом движения*;

2) для всех $i \in \mathbb{N}$ в момент времени $t_0 + i$ на экране присутствует ровно одна метка в позиции $l_F(i)$.

Таким образом, изменение позиции метки на экране в i-й момент после начала движения ($i \geq 1$) соответствует i-й букве в сверхслове F, а именно, если $F(i) = 0$, то в i-й момент метка остается в той же ячейке, где была в $(i-1)$-й момент, если $F(i) = 1$, то в i-й момент метка сдвинется на одну ячейку вправо.

Будем говорить, что закон движения F *можно реализовать на экране* $S(\mathcal{A})$, если существует такая управляющая последовательность $u \in Q^\infty$, при подаче которой на свободный вход экрана $S(\mathcal{A})$ на нём реализуется закон движения F.

Экран $S(\mathcal{A})$ будем называть *универсальным для множества законов движения* $\mathcal{F}$, если для любой закон движения F из $\mathcal{F}$ можно реализовать на экране $S(\mathcal{A})$.Множество всех таких экранов будем обозначать через $\mathcal{U}(\mathcal{F})$.

Множество всех законов движения, реализуемых на некотором экране, обозначим через Impl.

Множество всех законов движения, реализуемых на экране с не более, чем q состояниями, обозначим через $\mathrm{Impl}(q)$.

Через $\mathrm{Impl}(q, t_0)$ обозначим множество законов движения, реализуемых экраном с q состояниями таким образом, что метка появляется на экране не позже, чем в момент времени t_0.

Из определений следует, что

$$\mathrm{Impl} = \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{t_0=1}^{\infty} \mathrm{Impl}(q, t_0). \tag{1}$$

Если $S(\mathcal{A})$ — экран, то через $Q(S)$ обозначим число состояний элементарного автомата $\mathcal{A}$.

Если $\mathcal{F} \subseteq \{0,1\}^\infty$, то обозначим $Q(\mathcal{F}) = \min_{S \in \mathcal{U}(\mathcal{F})} Q(S)$. В случае $\mathcal{U}(\mathcal{F}) = \varnothing$ формально полагаем $Q(\mathcal{F}) = \infty$.

Для закона движения $F = F(1)F(2)...F(n)...$ определим среднюю скорость движения в первые t моментов времени

$$v_F(t) = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} F(i) = \frac{l_F(t)}{t}.$$

Обозначим через $\mathcal{F}_a$ множество законов движения F, для которых

$$\limsup_{t\to\infty} v_F(t) \le a.$$

Теорема 1. *Если $a < 1$, то $\mathcal{F}_a \subset \mathrm{Impl}$ и $Q(\mathcal{F}_a) \le 24 \cdot 2^{1/(1-a)}$.*

Другими словами, все законы движения из множества $\mathcal{F}_a$ при $a < 1$ можно реализовать на экране с $24 \cdot 2^{1/(1-a)}$ состояниями.

Через $\mathcal{F}_{<1}$ обозначим множество законов движения F, для которых

$$\limsup_{t\to\infty} v_F(t) < 1.$$

Заметим, что $\mathcal{F}_{<1} = \bigcup_{0\le a<1} \mathcal{F}_a$. Применяя теорему 1 для всех $a < 1$, получим

Следствие 1. $\mathcal{F}_{<1} \subset \mathrm{Impl}$, *то есть все законы движения из $\mathcal{F}_{<1}$ могут быть реализованы на некотором экране.*

Теперь оценим, насколько мало или велико множество реализуемых законов движения с двух разных точек зрения.

Топологическая характеризация множества Impl. Через U_α обозначим множество всех последовательностей, начинающихся с α, то есть

$$U_\alpha = \{\alpha\beta \mid \beta \in \{0,1\}^\infty\}.$$

На множестве $\{0,1\}^\infty$ стандартным образом определяется топология (называемая тихоновской), база которой есть семейство $\{U_\alpha \mid \alpha \in \{0,1\}^*\}$.

С топологической точки зрения множество является малым, если оно относится к первой категории Бэра, то есть представляется в виде счётного объединения нигде не плотных множеств. По теореме Бэра само множество $\{0,1\}^\infty$ относится ко второй категории Бэра, как полное метрическое пространство[1].

Теорема 2. *Множество* $\mathrm{Impl}(q, t_0)$ *нигде не плотно относительно введённой топологии.*

На языке сверхслов это означает, что для каждого $\alpha \in \{0,1\}^*$ найдётся такое $\beta \in \{0,1\}^*$, что ни одно сверхслово вида $\alpha\beta\gamma$ (где $\gamma \in \{0,1\}^\infty$), не лежит в множестве $\mathrm{Impl}(q, t_0)$.

Учитывая (1), получим следствие.

Следствие 2. *Множество* Impl *относится к первой категории Бэра.*

Метрическая характеризация множества Impl. На множестве $\{0,1\}^\infty$ можно определить вероятностную меру. Наиболее естественным образом это можно сделать, если представить случайный закон движения, как последовательность независимых бернуллиевских случайных величин $\Xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...)$, причём ξ_i принимает значения 0 и 1 с вероятностью 1/2. По усиленному закону больших чисел имеем

$$v_\Xi(t) = \frac{\xi_1 + ... + \xi_t}{t} \to \frac{1}{2} \quad \text{п.н.},$$

то есть, с вероятностью 1 закон движения Ξ лежит в $F_{1/2}$, а значит по теореме 1 его можно реализовать на экране с 96 состояниями.

Таким образом, с вероятностной точки зрения почти все законы движения реализуемы на одном экране с 96 состояниями. Учитывая следствие 2, видим, что множество Impl хотя и мало с топологической точки зрения, является множеством полной меры.

Множество $\mathrm{Impl} \setminus \mathcal{F}_{<1}$**.** Интересным является вопрос про реализуемость законов движения, не попадающих в множество $\mathcal{F}_{<1}$. Обозначим множество таких законов движения через $\mathcal{F}_{=1}$ и сформулируем теорему, показывающую, что в некотором вероятностном смысле в множестве $\mathcal{F}_{=1}$ мало реализуемых законов движения. Множество $\mathcal{F}_{=1}$ состоит из всех законов движения F, для которых

$$\limsup_{t\to\infty} v_F(t) = 1. \tag{2}$$

[1]Фактически, рассматриваемая топология задаётся 2-адической метрикой, если рассмотреть $\{0,1\}^\infty$, как множество 2-адических чисел. В этой метрике U_α — это шар радиуса $2^{-|\alpha|}$ с центром в произвольной точке множества U_α.

Существенную сложность оценки доли реализуемых законов движения составляет формализация понятия «доля» относительно множества $\mathcal{F}_{=1}$. Проблема состоит в том, что вероятность множества $\mathcal{F}_{=1}$ равна 0, и условная вероятность $\mathbf{P}(\mathrm{Impl}|\mathcal{F}_{=1})$ не определена. Более того, событие $(\Xi \in \mathcal{F}_{=1})$ является хвостовым, то есть не зависит от любого префикса последовательности Ξ. Это означает, что при естественном способе определения вероятности следовало бы считать, что все префиксы встретятся с одинаковой вероятностью. Однако, такое «естественное» предположение не позволяет определить счётно-аддитивную вероятностную меру на $\mathcal{F}_{=1}$. Поэтому, чтобы, тем не менее, как-то оценить долю реализуемых законов движения в $\mathcal{F}_{=1}$, оставаясь при этом в рамках предположения о некоторой равномерности распределения вероятностей, представим множество $\mathcal{F}_{=1}$ в виде объединения подмножеств, на каждом из которых можно определить вероятностную меру, чтобы она была в определённом смысле равномерной.

Для начала переформулируем условие (2) в следующем виде: существует возрастающая последовательность целых чисел $\{n_i\}_{i=0}^{\infty}$ и последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ такая, что

$$\varepsilon_i \searrow 0 \text{ при } i \to \infty \quad \text{и} \quad \frac{1}{n_i - n_{i-1}} \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} F(j) \geq 1 - \varepsilon_i \text{ при } i \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Для фиксированных последовательностей $n = \{n_i\}$ и $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}$ введём класс $\mathcal{F}_{n,\varepsilon}$ таких законов движения F, для которых выполнено (3). Фактически, последовательности n и ε задают подпоследовательность и ограничение снизу скорости сходимости v_F к 1. Заметим, что в условии (3) можно взять $\varepsilon_i = \varepsilon_i^0 := 1/i$ и подобрать n_i так, чтобы $n_0 = 0$ и $n_i > 2n_{i-1}$ при $i \geq 1$ (будем писать $n \in N^0$). Таким образом, $\mathcal{F}_{n,\varepsilon} \subseteq \mathcal{F}_{n^0,\varepsilon^0}$ для некоторой последовательности $n^0 \in N^0$.

Для последовательности $n = \{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ определим множества

$$B_i^n = \left\{ f \in \{0,1\}^{n_i - n_{i-1}} \,\middle|\, \frac{1}{n_i - n_{i-1}} \sum_{j=1}^{n_i - n_{i-1}} f_j \geq 1 - \varepsilon_i^0 \right\}.$$

Тогда $\mathcal{F}_{n,\varepsilon^0} = \prod_{i=1}^{\infty} B_i^n$ (под произведением понимается конкатенация множеств). Заметим, что поскольку все слова из B_i^n имеют одинаковую длину, то любое слово $F \in \mathcal{F}_{n,\varepsilon^0}$ единственным образом представляется в виде конкатенации слов $f^i \in B_i^n$, $i \in \mathbb{N}$. На каждом из множеств B_i можно ввести равномерную вероятностную меру, положив $\mathbf{P}(f) = |B_i^n|^{-1}$

для всех $f \in B_i^n$. Случайный закон движения из $\mathcal{F}_{n,\varepsilon^0}$ определим, как конкатенацию независимых случайных слов $f^i \in B_i^n$. Тогда на множестве $\mathcal{F}_{n,\varepsilon^0}$ индуцируется вероятностная мера, которую обозначим через $\mathbf{P}_n$.

Теорема 3. *Для любой последовательности $n \in N^0$ выполнено*

$$\mathbf{P}_n(\mathrm{Impl} \cap \mathcal{F}_{n,\varepsilon^0}) = 0.$$

Условие $n \in N^0$ означает, что класс $\mathcal{F}_{n,\varepsilon^0}$ достаточно широк, и включает в себя не только быстро сходящиеся последовательности. Таким образом, теорема утверждает, что в достаточно широких подклассах $\mathcal{F}_{=1}$ доля реализуемых законов движения равна 0.

Здесь следует отметить, что если убрать ограничение $n \in N^0$, то можно подобрать такую последовательность n, что класс $\mathcal{F}_{n,\varepsilon^0}$ будет очень узким, и включать в себя только законы движения вида $a_1...a_k1^\infty$, которые, очевидно, все являются реализуемыми.

3. Доказательства

Отрезком предобработки экрана в момент t будем называть отрезок подряд идущих ячеек на экране, удовлетворяющий следующим условиям:

1) началом отрезка является ячейка, следующая после самой правой метки на экране;

2) состояние самой правой ячейки отрезка отлично от 0;

3) состояние всех ячеек экрана, следующих за последней (самой правой) ячейкой отрезка предобработки равно 0;

4) среди состояний ячеек отрезка нет меток.

3.1. Построение универсального экрана для класса $\mathcal{F}_a$

Поскольку $a < 1$, то существует такое $p \in \mathbb{N}$, что $a < p/(p+1)$. А именно, можно взять $p = \lfloor 1/(1-a) \rfloor$.

Идея алгоритма. Алгоритм строится в несколько этапов. На нескольких первых этапах реализуется вспомогательная разметка экрана, а на последнем этапе при помощи этой разметки реализуется непосредственно само движение. А именно, имеются следующие этапы:

1) Расстановка точек остановки на экране. Для этого в каждый момент времени со скоростью 1 запускается сигнал B_t, кодирующий в себе 2^p возможных расстановок признаков остановки на отрезке длины p. Как только сигнал B достигает не размеченного участка экрана (это происходит в позиции pt), в следующие p моментов времени происходит «расшифровка» сигнала B_t, и в некоторых из ячеек $pt+1$, $pt+2$, ..., $pt+p$ проставляются признаки остановки $S0$, а в остальных — признаки продолжения движения $S1$.

2) Запуск «подталкивающих» сигналов P со скоростью 1 в нужные моменты времени.

3) Реализация требуемого закона движения. Для этого с начала экрана запускается сигнал D со скоростью 1. Как только справа сигнал D оказывается в клетке с признаком остановки $S0$, он останавливается и ждёт, пока слева придёт «подталкивающий» сигнал P. Как только такой сигнал пришёл, D продолжает двигаться вправо до следующего признака остановки.

При правильном подборе всех описанных сигналов, таким способом можно реализовать любой закон движения из $\mathcal{F}_a$. Условие $a < 1 - 1/p$ гарантирует, что вся расстановка признаков остановки S будет готова к моменту её использования сигналом D.

Доказательство теоремы 1. Зададим элементарный автомат $\mathcal{A} = (Q, \varphi, q_0)$. В качестве множества состояний возьмём множество $Q = Q_B \times Q_S \times Q_P \times Q_D$, где

$$\begin{aligned}
Q_B &= \{0\} \cup \left\{B_\alpha \mid \alpha \in \{0,1\} \cup \{0,1\}^2 \cup ... \cup \{0,1\}^p\right\},\\
Q_S &= \{0, S0, S1\},\\
Q_P &= \{0, P\},\\
Q_D &= \{0, D\}.
\end{aligned}$$

Начальным состоянием является состояние $q_0 = (0,0,0,0)$. Определим функцию перехода $\varphi = (\varphi_B, \varphi_S, \varphi_P, \varphi_D)$ покомпонентно.

1) Функция φ_B:

$$\begin{aligned}
\varphi_B((B_{x\alpha}, 0, *, *), *, *) &= B_\alpha, && \text{если } x \in \{0,1\}, |\alpha| \geq 1,\\
\varphi_B((B_x, 0, *, *), *, *) &= 0, && x \in \{0,1\},\\
\varphi_B((B_\alpha, Sx, *, *), *, *) &= B_\alpha, && x \in \{0,1\}, \alpha \in \{0,1\}^*,\\
\varphi_B(*, *, *) &= 0 && \text{в остальных случаях.}
\end{aligned}$$

2) Функция φ_S:

$$\begin{aligned}
\varphi_S(*,(B_{x\alpha},0,*,*),*) &= Sx, && x\in\{0,1\},\\
\varphi_S(*,(0,0,*,*),*) &= 0, &&\\
\varphi_S(*,(*,Sx,*,*),*) &= Sx, && x\in\{0,1\}.
\end{aligned}$$

3) Функция φ_P:

$$\begin{aligned}
\varphi_P((*,*,x,0),*,*) &= x, && x\in Q_P,\\
\varphi_P((*,*,x,D),*,*) &= 0, && x\in Q_P,
\end{aligned}$$

4) Функция φ_D:

$$\begin{aligned}
\varphi_D((*,*,P,D),(*,*,*,0),*) &= D,\\
\varphi_D((*,S1,0,D),(*,*,*,0),*) &= D,\\
\varphi_D((*,*,*,0),(*,S0,0,D),*) &= D,\\
\varphi_D(*,*,*) &= 0 \qquad \text{в остальных случаях.}
\end{aligned}$$

В качестве множества меток возьмём подмножество $Q_B\times Q_S\times Q_P\times\{D\}$.

Для доказательства теоремы 1 покажем, что для любого закона движения $F\in\mathcal{F}_a$ можно подобрать такую управляющую последовательность, что на экране $S(\mathcal{A})$ будет реализовываться закон движения F. Обозначим эту последовательность через $\{\mathcal{C}_F(w)\}_{w=1}^{\infty}$,

$$\mathcal{C}_F(w)=(c_F^B(w),c_F^S(w),c_F^P(w),c_F^D(w)).$$

Построим входную последовательстьнонть $\left\{c_F^B(w)\right\}_{w=1}^{\infty}$. Пусть I_0 — множество всех таких $i\in\mathbb{N}$, для которых выполнено $F(i)=0, F(i-1)=1$. То есть I_0 — это множество моментов времени, в которые движущаяся точка на экране должна останавливаться. Тогда по определнию функции переходов на разметке экрана в эти моменты должно стоять значение $S0$, а в остальные моменты — $S1$. Заметим, что $l_F(i)=i-s_F(i)$. Тогда последовательность $M=\{m_j\}_{j=1}^{\infty}$, которая должна появиться на разметке экрана, определяется по правилам:

$$\begin{aligned}
m_j &= S0 && \text{при } j=l_F(i) \text{ для некоторого } i\in I_0;\\
m_j &= S1 && \text{в остальных случаях.}
\end{aligned}$$

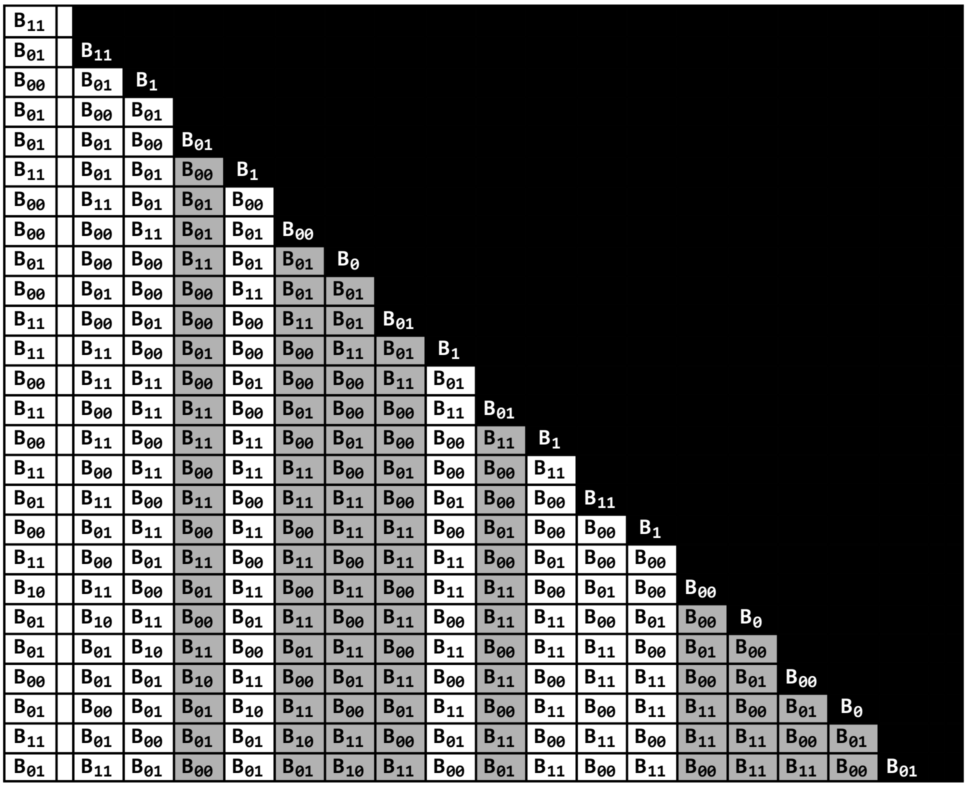

Рис. 1. Пример разметки экрана (цветом изображена компонента Q_S, внутри написана компонента Q_B).

Из элементов последовательности M составим слова α_n длины p:

$$\alpha_n = m_{(n-1)p+1}m_{(n-1)p+2}...m_{np} \qquad \text{для любого } n \in \mathbb{N}.$$

Из определения функции переходов φ_B видно, что после появления на не размеченной части экрана сигнала B_α, разметка распаковывается по одному символу за один такт. Далее, с задержкой в один такт сигнал $B_{\alpha+1}$ достигает не размеченной части экрана. Таким образом, на экране образуется разметка $m_1, m_2, ...$, и разметка распаковывается со скоростью $\frac{p}{p+1}$.

Определим $c_F^B(w) = B_{\alpha_w}$ для любого $w \in \mathbb{N}$.

Построим теперь $\left\{c_F^P(w)\right\}$. Пусть I_1 — последовательность всех таких $i \in \mathbb{N}$, для которых выполнено $F(i) = 1, F(i-1) = 0$. Следовательно, в момент i после начала движения метка на экране должна сдвинуться

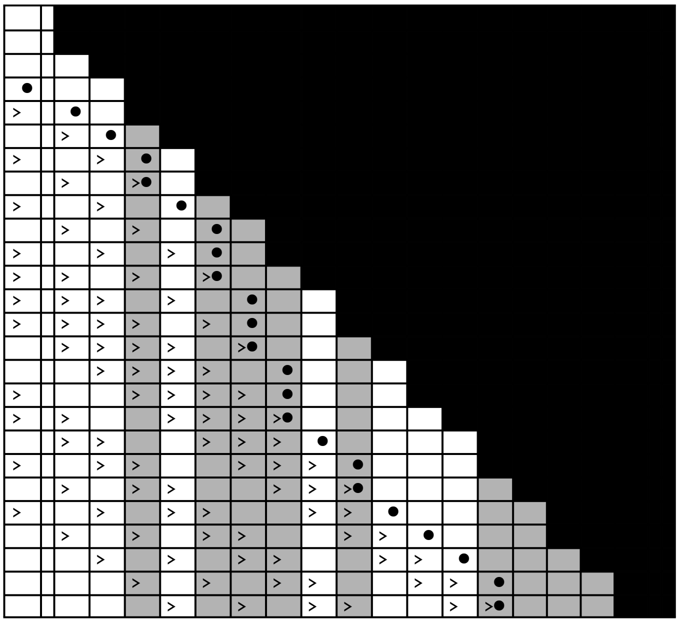

Рис. 2. Реализация закона движения на размеченном экране ($\bullet$ означает метку на экране, а $>$ обозначает, что компонента Q_P равна P).

вправо. По определению функции переходов состояний это означает, что в момент $i-1$ в ячейке с меткой третья координата равна P. Координата точки на экране в момент $i-1$ равна $i-1-s_F(i-1)$.

Тогда в j-й момент после начала движения движущий сигнал определяется следующей последовательностью $\{p_j\}_{j=0}^{\infty}$:

$$
\begin{aligned}
&p_j = P \qquad && \text{при } j = s_F(i-1) \text{ для некоторого } i \in I_1;\\
&p_j = 0 \qquad && \text{в остальных случаях.}
\end{aligned}
$$

Определение p_j корректно, поскольку минимальное $i \in I_1$ не может быть меньше 2. Также, по определению функции φ_P видно, что сигнал P распространяется со скоростью 1. По построению p_j ясно, что к моменту $i-1$ сигнал достигнет ячейки с координатой $i-1-s_F(i-1)$.

Проверим, что для любого закона движения $F \in \mathcal{F}_a$ существует момент $t_0 \in \mathbb{N}$ для запуска сигнала D, что этот сигнал будет всегда двигаться по размеченному сигналами $S0$ и $S1$ отрезку экрана. Заметим, что в момент времени $t + t_0$ длина длина размеченного отрезка экрана равна

$$\left\lceil (t_0+t)\frac{p}{p+1} \right\rceil \geq (t_0+t)\frac{p}{p+1}.$$

Поэтому достаточно найти такое t_0, что для любого $t \in \mathbb{N}$ для координаты сигнала D на экране выполняется неравенство $l_F(t) < (t_0+t)\frac{p}{p+1}$.

По условию теоремы имеем $\limsup_{t\to\infty} v_F(t) \leq a$, значит для произвольного $\varepsilon \in (0, p/(p+1)-a)$ существует такое $t_* \in \mathbb{N}$, что для любого $t > t_*, t \in \mathbb{N}$ выполнено

$$v_F(t) \leq a + \varepsilon < \frac{p}{p+1},$$

$$\frac{l_F(t)}{t} < \frac{p}{p+1},$$

$$l_F(t) < t\frac{p}{p+1}.$$

Если взять $t_0 = t_* + 1$, то для всех $t \in \mathbb{N}$ выполнено

$$l_F(t) < (t_0+t)\frac{p}{p+1}.$$

То есть, мы сможем запустить сигнал D таким образом, чтобы он двигался всегда по размеченной части экрана.

Определим теперь каждую компоненту входной последовательности $\mathcal{C}_F(w) = (c_F^B(w), c_F^S(w), c_F^P(w), c_F^D(w))$:

$$\begin{aligned} c_F^B &= B_{\alpha_1}B_{\alpha_2}B_{\alpha_3}..., \\ c_F^S &= (S1)^\infty, \\ c_F^P &= 0^{t_0}p_0p_1..., \\ c_F^D &= 0^{t_0-1}D0^\infty. \end{aligned}$$

Покажем, что на построенном экране с помощью указанной входной последовательности строится движение точки по закону F. Для этого достаточно показать по индукции, что для произвольного $i \in \mathbb{N}$ в момент времени $t_0 + i$ позиция точки на экране будет равна $l_F(i)$.

База индукции $(i = 1)$**.** В момент времени t_0 окрестность самой левой ячейки экрана имеет вид $((*, S1, 0, D), (*, *, 0, 0), (*, *, 0, 0))$, значит по определению компоненты функции перехода φ_D, в момент времени $t_0 + 1$ компонента D станет равна D.

Шаг индукции. Предположим, что в момент времени (t_0+i-1) позиция точки на экране равна $l_F(i-1)$ и покажем, что в следующий момент времени точка окажется в позиции $l_F(i)$. Рассмотрим 2 случая.

1) Пусть $F(i) = 0$. Тогда существует такое k, что $F(i-k-1) = 1, F(i-k) = 0$. По определению последовательности M для $j = l_F(i-k)$ выполнено $m_j = S0$. Заметим, что

$$j = l_F(i-k) = i-k-s_F(i-k) = i-k-(s_F(i)-k) = i-s_F(i) = l_F(i).$$

   Значит, в ячейке стоит стоп-сигнал, и в следующий момент точка не поменяет своего положения, то есть останется в позиции $l_F(i-1) = l_F(i-1) + F(i) = l_F(i)$.

2) Пусть $F(i) = 1$. Рассмотрим два подслучая.

   а) Если $F(i-1) = 1$, то в ячейке с точкой (в позиции $l_F(i-1)$) стоит $S0$, если найдется $j \in I_0$, для которого $l_F(j) = l_F(i-1)$. Так как $F(i-1) = 1$, то для всех $j < i-1$ выполнено $l_F(j) < l_F(i-1)$. Очевидно, $(i-1) \notin I_0$, а для $j > i-1$ выполнено $l_F(j) > l_F(i-1)$. Значит, такого $j \in I_0$, для которого $l_F(j) = l_F(i-1)$ не нашлось, следовательно, $m_{i-1} = S1$.

   б) Если $F(i-1) = 0$, то по определению $i \in I_1$, то есть $p_j = P$ для $j = s_F(i-1)$, и в ячейке с точкой в третьей координате будет стоять P, и точка сдвинется вправо.

   Значит в обоих подслучаях точка сдвинется вправо и окажется в позиции $l_F(i-1) + 1 = l_F(i-1) + F(i) = l_F(i)$.

Шаг индукции доказан, значит на экране воспроизведется движение точки по закону F.

Количество состояний элементарного автомата $\mathcal{A}$ равно

$$|Q| = |Q_B| \cdot |Q_S| \cdot |Q_P| \cdot |Q_D| = 12 \sum_{i=0}^{p} 2^i < 24 \cdot 2^p.$$

Подставляя $p = \lfloor 1/(1-a) \rfloor$, получим требуемую в теореме оценку. Теорема доказана. $\square$

3.2. Оценка доли законов движения в множестве $\mathcal{F}_{=1}$

Если $A \subseteq \{0,1\}^\infty$, то через $A\rfloor_k$ обозначим множество всех префиксов слов из множества A длины k, то есть

$$A\rfloor_k = \left\{\alpha \in \{0,1\}^k \;\middle|\; \exists \beta \in \{0,1\}^\infty : \alpha\beta \in A\right\}.$$

Через $D_{k,z}$ обозначим множество слов $w \in \{0,1\}^k$, в которых не более z нулей.

Лемма 1. *Для любых $k, z \in \mathbb{N}$, а также любых $t_0, q \in \mathbb{N}$ выполнено*

$$\log_q \left|\mathrm{Impl}(q,t_0)\rfloor_k \cap D_{k,z}\right| \le q^3 + t_0 + z.$$

Доказательство. Зафиксируем некоторую последовательность

$$w \in \mathrm{Impl}(q,t_0)\rfloor_k \cap D_{k,z}.$$

Тогда существует закон движения $F \in \mathrm{Impl}(q,t_0)$ такой, что $w = F\rfloor_k$. Поскольку $F \in \mathrm{Impl}(q,t_0)$ существует элементарный автомат $\mathcal{A}$ и управляющая последовательность $u \in E_q^\infty$ такая, что на экране реализуется движение точки по закону F, причём в момент времени t_0 на экране уже есть метка. Пусть t – последний момент, когда на экране не было метки. Тогда в момент времени $t' > t$ позиция метки будет $t' - t - s_F(t'-t) =: pos(t')$. Поскольку радиус окрестности 1, то состояние ячейки $pos(t')$ в момент t' зависит лишь от префикса управляющей последовательности u до момента $t' - pos(t') = t + s_F(t'-t) \le t_0 + s_F(t'-t)$.

Поскольку $F\rfloor_k \in D_{k,z}$, то $s_F(k) \le z$. Таким образом, движение точки до момента $t+k$ управляется первыми $t + s_F(k) \le t_0 + z$ символами последовательности u. С другой стороны, это движение однозначно задаёт последовательность $F\rfloor_k = w$. Таким образом w однозначно задаётся автоматом $\mathcal{A}$ с q состояниями и $t_0 + z$ символами из E_q.

1) Элементарный автомат однозначно задаётся своей функцией перехода $\varphi : Q \times Q \times Q \to Q$. Значит существует не более q^{q^3} элементарных автоматов с q состояниями.

2) Всего имеется q^{t_0+z} различных последовательностей из E_q длины $t_0 + z$.

Перемножив число элементарных автоматов и число различных управляющих последовательностей, получим требуемую оценку

$$\left|\mathrm{Impl}(q,t_0)\rfloor_k \cap D_{k,z}\right| \le q^{q^3} q^{t_0+z}.$$

Взяв логарифм по основанию q, получим требуемую оценку. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2. Чтобы показать, что множество Impl нигде не плотно, рассмотрим произвольное открытое множество $U \subseteq \{0,1\}^\infty$. В нём содержится открытое подмножество U_α для некоторого $\alpha \in \{0,1\}^*$. Через z обозначим число нулей в слове α.

Рассмотрим множества $G_k = \alpha D_{2^k,k}$. тогда $G_k \subseteq D_{2^k+|\alpha|,k+z}$, и по лемме 1 имеем

$$\log_q \left|\mathrm{Impl}(q,t_0)\rfloor_{2^k+|\alpha|} \cap G_k\right| \leq q^3 + t_0 + k + z.$$

Оценим теперь мощность множества G_k.

$$|G_k| = |D_{2^k,k}| = \sum_{j=0}^{k} C_{2^k}^j \geq C_{2^k}^k = \frac{2^k}{k} \cdot \frac{2^k-1}{k-1} \cdot ... \cdot \frac{2^k-(k-1)}{k-(k-1)} \geq \left(\frac{2^k}{k}\right)^k.$$

Учитывая, что параметры q, t_0 и z фиксированы, легко видеть, что при достаточно большом k выполнено

$$\log_q |G_k| \geq k^2 \log_q 2 - k \log_q k > q^3 + t_0 + k + z \geq \log_q \left|\mathrm{Impl}(q,t_0)\rfloor_{2^k+|\alpha|} \cap G_k\right|.$$

Это означает, что $G_k \setminus \mathrm{Impl}(q,t_0)\rfloor_{2^k+|\alpha|} \neq \varnothing$, то есть существует такое $\gamma \in G_k$, что $\gamma \notin \mathrm{Impl}(q,t_0)\rfloor_{2^k+|\alpha|}$, а это в свою очередь означает, что $U_\gamma \cap \mathrm{Impl}(q,t_0) = \varnothing$. Осталось заметить, что γ, как элемент G_k, имеет префикс α, значит $U_\gamma \subseteq U_\alpha \subseteq U$.

Таким образом, для множества U мы нашли его открытое подмножество U_γ, в котором нет ни одного элемента $\mathrm{Impl}(q,t_0)$. Учитывая, что U — произвольное открытое множество, получаем, что $\mathrm{Impl}(q,t_0)$ нигде не плотно. $\square$

Лемма 2. *Для любой последовательности $n \in N^0$ и любых $t_0, q \in \mathbb{N}$ при достаточно больших $k \in \mathbb{N}$ выполнено*

$$\log_q \left|\mathrm{Impl}(q,t_0)\rfloor_{n_k} \cap B_1^n...B_k^n\right| \leq q^3 + t_0 + 3\frac{n_k}{k}.$$

Доказательство. Учитывая лемму 1, достаточно показать, что $B_1^n...B_k^n \subseteq D_{k,\lfloor 3n_k/k\rfloor}$. Рассмотрим слово $w \in B_1^n...B_k^n$. Тогда $w = w_1...w_k$, $w_i \in B_i^n$.

По определению множества B_i^n в последовательности w_i доля нулей не более $1/i$. Учитывая условие $n_i > 2n_{i-1}$, получим

$$s_w(n_k) \le \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i - n_{i-1}}{i} \le \frac{n_k}{k} \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n_k} \cdot \frac{k}{i} < \quad \langle \text{заменим } i \mapsto k-j \rangle$$
$$< \frac{n_k}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{2}{3}\right)^j \left(\frac{3}{4}\right)^j \frac{k}{(k-j)}.$$

Несложно убедиться, что взяв k достаточно большим, $\left(\frac{3}{4}\right)^j \frac{k}{(k-j)} \le 1$ для всех $j = 0, ..., k-1$, а значит

$$s(n_k) \le \frac{n_k}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{2}{3}\right)^j \le 3\frac{n_k}{k}.$$

Применяя лемму 1, получим требуемую оценку. □

Лемма 3. *Для любой последовательности* $n \in N^0$ *и любых* $t_0, q \in \mathbb{N}$ *выполнено*

$$\mathbf{P}_n(\mathrm{Impl}(q, t_0) \cap \mathcal{F}_{n,\varepsilon^0}) = 0.$$

Доказательство. Для краткости введём обозначение $A := \mathrm{Impl}(q, t_0)$. При любом k выполнено

$$A \cap \mathcal{F}_{n,\varepsilon^0} \subseteq \left(A\rfloor_{n_k} \cap B_1^n ... B_k^n \right) \cdot \prod_{i=k+1}^{\infty} B_i^n.$$

Поскольку мера $\mathbf{P}_n$ определена на множестве $\mathcal{F}_{n,\varepsilon^0}$, как на произведении множеств B_i^n, то для всех $k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\mathbf{P}_n(A \cap \mathcal{F}_{n,\varepsilon^0}) \le \frac{|A\rfloor_{n_k} \cap B_1^n ... B_k^n|}{|B_1^n ... B_k^n|}. \tag{4}$$

Заметим, что множество B_k^n включает в себя все последовательности длины $n_k - n_{k-1}$, в которых ровно $z_k := \lfloor (n_k - n_{k-1})/k \rfloor$ нулей. Таким образом,

$$|B_1^n ... B_k^n| \ge |B_i^n| \ge C_{n_k - n_{k-1}}^{z_k} = \prod_{i=0}^{z_k - 1} \frac{n_k - n_{k-1} - i}{z_k - i} \ge \left(\frac{n_k - n_{k-1}}{z_k}\right)^{z_k} \ge k^{z_k}. \tag{5}$$

Поскольку $n \in N^0$, имеем $n_k - n_{k-1} > n_k/2$ и $n_k \geq 2^k$, отсюда при $k \geq 4$ выполнено

$$z_k \geq \left(1 - \frac{2k}{2^k}\right) \frac{n_k - n_{k-1}}{k} \geq \frac{n_k}{4k}.$$

Подставляя оценку для z_k в (5) и применяя логарифм к обеим частям получим, что при достаточно большом k выполнена оценка

$$\log_q |B_1^n ... B_k^n| \geq \frac{n_k}{4k} \log_q k.$$

Оценим логарифм $\mathbf{P}_n(A \cap \mathcal{F}_{n,\varepsilon^0})$, используя (4) и лемму 2:

$$\begin{aligned} \log_q(\text{П.Ч. } (4)) &\leq q^3 + t_0 + 3\frac{n_k}{k} - \frac{n_k}{4k} \log_q k = \\ &= \underbrace{q^3 + t_0}_{\text{const}} + \underbrace{\frac{n_k}{k}}_{\geq 2^k/k} \left(3 - \frac{1}{4} \log_q k\right) \to -\infty \quad \text{при} \quad k \to \infty. \end{aligned}$$

Поскольку в (4) параметр k можно выбрать произвольно, получим $\mathbf{P}_n(A \cap \mathcal{F}_{n,\varepsilon^0}) = 0$. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 3. Из (1), счётной аддитивности вероятностной меры $\mathbf{P}_n$ и леммы 3 получим

$$\mathbf{P}_n(\mathrm{Impl} \cap \mathcal{F}_{n,\varepsilon^0}) \leq \sum_{t_0=1}^{\infty} \sum_{q=2}^{\infty} \mathbf{P}_n(\mathrm{Impl}(q, t_0) \cap \mathcal{F}_{n,\varepsilon^0}) = 0.$$

Теорема доказана. □

Список литературы

[1] Болотов А. А. О задачах сводимости и выразимости для однородных структур со входами и выходами // ДАН СССР — 1980. — Т. 254. №1 — С. 14–16.

[2] Верещагин Н. К., Успенский В. А., Шень А. Колмогоровская сложность и алгоритмическая случайность. — М.: МЦНМО, 2013.

[3] Глушков В. М., Амосов Н. М., Артеменко И. А. Энциклопедия кибернетики. Том 1. — Киев: УСЭ, 1974.

[4] Кудрявцев В. Б. О мощности множеств предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами // Проблемы кибернетики. — 1965. — Вып. 13 — С. 45–74.

[5] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.

[6] Кудрявцев В. Б., Подколзин А. С., Болотов А. А. Основы теории однородных структур. — М.: Наука, 1990.

[7] Мур Э. Ф. Математические модели самовоспроизведения. В кн.: Математические проблемы в биологии: пер. с англ. – М.: Мир, 1966. — С. 36–62.

[8] Фон Нейман Дж. Теория самовоспроизводящихся автоматов. — М.: Мир, 1971.

[9] Окстоби Дж. Мера и категория. — М.: Мир, 1974.

[10] Подколзин А. С. О сложности моделирования в однородных структурах // Проблемы кибернетики. — Вып. 30 — 1975. — С. 199–255.

[11] Подколзин А. С. Об универсальных однородных структурах // Проблемы кибернетики. — Вып. 34. — 1978. — С. 109–131.

[12] Титова Е. Е. Конструирование изображений клеточными автоматами // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, № 1. — С. 105–121.

[13] Хинчин А. Я. Основные законы теории вероятностей. — М.: ГТТИ, 1932.

[14] Чашкин А. В. Дискретная математика. — М.: Издательский центр «Академия», 2012.

On the size of the set of motion rules realizable by cellular automata

Kalachev G.V., Titova E.E.

A model of motion of a dot on the screen is considered. The screen is a semi-infinite one-dimensional cellular automaton. A particular subset of states of the screen is called the image of the dot. A rule of motion is defined by an infinite sequence of zeros and ones, corresponding respectively to the "stop"and "go"commands. For a broad class of motion rules, an algorithm for implementing the given rule is described. A Bernoulli probability measure of realizable motion rules is explored. It is shown that almost all motion rules are realizable. Also it is shown that the set of realizable motion rules is meager with respect to the product topology.

Keywords: cellular automaton, universal screen, motion of the dot, rule of motion, Bernoulli measure, product topology, Baire category.