Решётка клонов трёхзначной логики, содержащих функции 0, 1, 2, min, max

Моисеев С. В.

В настоящей работе дано полное описание решётки всех клонов трёхзначной логики, содержащих одновременно все константы $0, 1, 2$ и функции min, max. Клоны описаны как множества сохранения предикатов.

Ключевые слова: теория клонов, решетка клонов, трёхзначная логика.

Теорема. *Существует ровно* 33 *клона трёхзначной логики, содержащих функции* 0, 1, 2, min, max. *Решётка клонов по включению представлена на диаграмме Хассе (рис. 1). Вершине* v *диаграммы соответствует класс сохранения множества всех предикатов, указанных на стрелках всех путей от верхней точки диаграммы к вершине* v.

Верхней точке диаграммы 1 соответствует множество всех функций трёхзначной логики. Нижней точке диаграммы соответствует клон, порождённый функциями 0, 1, 2, min, max. Стрелки на диаграмме направлены от клона к клону, предполному в нём. Для клона M', у которого ровно один непосредственный надклон M, на на стрелке от M к M' указан предикат, сохраняемый клоном M', но не сохраняемый его надклоном M. Таким образом, все исследуемые клоны можно определить как классы сохранения какого-то подмножества десяти предикатов, указанных на диаграмме.

1. Основные понятия теории клонов

Обозначение. Арности предикатов и функций (при необходимости) в данной работе будем указывать в верхнем индексе после символа предиката/функции, например: $p^{(n)}$, $f^{(r)}$.

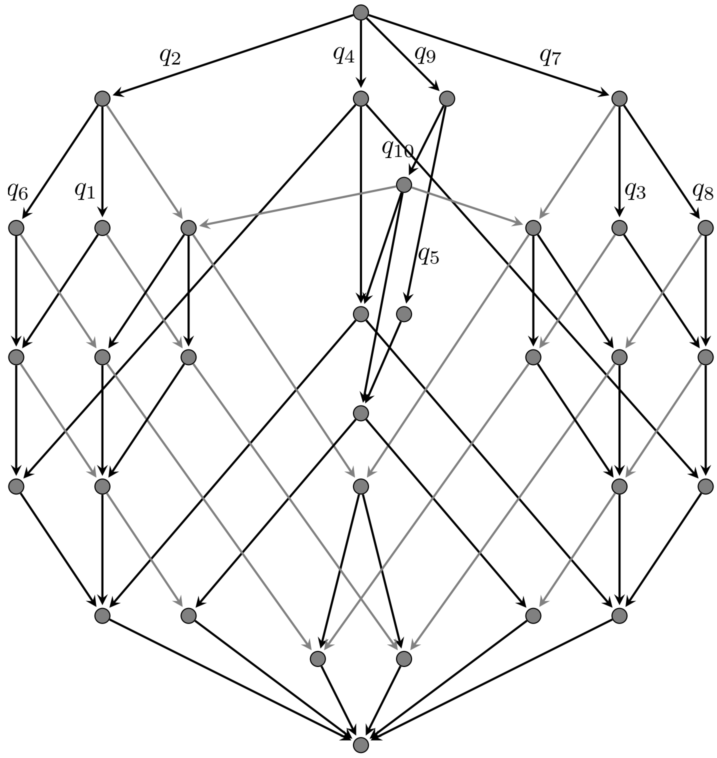

Рис. 1.

1.1. Клоны функций k-значной логики

Пусть P_k — множество всех функций k-значной логики.

Определение. Пусть $M \subseteq P_k$. Определим множество $[M]$ *(замыкание множества M относительно суперпозиции)* следующими аксиомами:

1) Для любых $r \geqslant 1$, $j \in \{1, \ldots, r\}$ множество $[M]$ содержит функцию-проектор
$$pr_j^{(r)} \colon (x_1, \ldots, x_r) \mapsto x_j.$$

2) $(f \in M) \Longrightarrow (f \in [M])$.

3) $[\![\ f^{(n)} \in [M],\ f_1^{(r_1)} \in [M],\ \ldots,\ f_n^{(r_n)} \in [M],$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_r \Big(h^{(r)}(x_1, \ldots, x_r) = $$
$$= f^{(n)}\Big(f_1^{(r)}(x_1, \ldots, x_r), \ldots, f_n^{(r)}(x_1, \ldots, x_r) \Big) \Big)$$

$]\!]\ \Longrightarrow\ h^{(r)} \in [M].$

Определение. Множество $M \subseteq P_k$ функций k-значной логики называется *клоном функций*, если
$$[M] = M.$$

1.2. Реляционные клоны

Обозначим через R_k множество всех предикатов на k-элементном множестве $\{0, 1, \ldots, k-1\}$, т.е. множество всех функций вида
$$p\colon \{0, 1, \ldots, k-1\}^n \to \{\bot, \top\},$$
где $\bot$, $\top$ — константы «ложь», «истина».

Зафиксируем следующие предикаты из R_3:

$false^{(0)}$ (константа «ложь»)

$true^{(0)}$ (константа «истина»)

$eq^{(2)}\colon (x_1, x_2) \mapsto (x_1 = x_2)$ (предикат равенства)

Определение. Пусть $Q \subseteq R_k$ — множество предикатов. Определим множество $[Q]_{p.p.}$ *(замыкание множества Q относительно примитивных позитивных формул)* следующими аксиомами:

1) $\{false^{(0)}, true^{(0)}, eq^{(2)}\} \subseteq [Q]_{p.p.}$.

2) $(p \in Q) \Longrightarrow (p \in [Q]_{p.p.})$.

3) $[\![\ p_1^{(r_1)} \in [Q]_{p.p.},\ \ldots,\ p_n^{(r_n)} \in [Q]_{p.p.},$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_r \Big(p^{(r)}(x_1, \ldots, x_r) = $$
$$= \exists y_1 \ldots \exists y_s \Big(p_1^{(r_1)}(z_{1,1}, \ldots, z_{1,r_1}) \wedge \ldots \wedge p_n^{(r_n)}(z_{n,1}, \ldots, z_{n,r_n}) \Big) \Big)$$

$]\!]\ \Longrightarrow\ p^{(r)} \in [Q]_{p.p.}$.

($s \geqslant 0$, $n \geqslant 1$, $z_{k,j}$ обозначает один из символов «x_1», …, «x_r», «y_1», …, «y_s»).

Определение. Множество $Q \subseteq R_k$ называется *реляционным клоном*, если
$$[Q]_{p.p.} = Q.$$

1.3. Связь между клонами функций и реляционными клонами

Определение. Скажем, что функция $f^{(r)} \in P_k$ *сохраняет* предикат $p^{(n)} \in R_k$, если

$$\big(p^{(n)}(x_{1,1}, \ldots, x_{1,n}) \wedge \ldots \wedge p^{(n)}(x_{r,1}, \ldots, x_{r,n})\big) \Longrightarrow \\ p^{(n)}\big(f^{(r)}(x_{1,1}, \ldots, x_{r,1}), \ldots, f^{(r)}(x_{1,n}, \ldots, x_{r,n})\big).$$

Множество всех функций, сохраняющих каждый предикат множества $Q \subseteq R_k$, будем обозначать как $Pol(Q)$. Множество всех предикатов, сохраняемых всеми функциями из множества $M \subseteq P_k$, будем обозначать как $Inv(M)$.

Теорема (Гейгер [1]; Боднарчук и др. [2])**.**

$$Pol\ Inv\ M = [M];$$
$$Inv\ Pol\ Q = [Q]_{p.p.}.$$

2. Клоны трёхзначной логики, содержащие функции 0, 1, 2, min, max, как классы сохранения множества предикатов

Определение. Будем говорить, что *множество M является классом сохранения множества предикатов Q*, если $M = Pol(Q)$.

Классический подход к описанию клонов k-значной логики состоит в том, чтобы характеризовать их как классы сохранения множеств предикатов. Данный подход обоснован следующим фактов, являющимся следствием теоремы Гейгера—Боднарчука:

Теорема. *Пусть M — клон k-значной логики. Тогда существует множество $Q \subseteq R_k$ (возможно, бесконечное), такое что*

$$M = Pol(Q).$$

2.1. Предикаты, характеризующие клоны трёхзначной логики, содержащие функции 0, 1, 2, min, max

В соответствии с классическим подходом будем определять клоны трёхзначной логики, содержащие функции 0, 1, 2, min, max, через множество предикатов, классом сохранения которых они являются. В нашем случае каждый клон может быть определён как класс функций, сохраняющих какое-то подмножество десяти предикатов арности 2, указанных в списке ниже. Каждый предикат этого списка определён через множество наборов, на которых он принимает значение «истина». Именно эти предикаты имеются в виду на диаграмме 1.

$q_1 = \{22, 11, 01, 00\}$ *(частичный порядок* $0 < 1$*)*

$q_2 = \{22, 11, 10, 01, 00\}$ *(эквивалентность* $0 \sim 1$*)*

$q_3 = \{22, 12, 11, 00\}$ *(частичный порядок* $1 < 2$*)*

$q_4 = \{22, 12, 11, 02, 01, 00\}$ *(линейный порядок* $0 < 1 < 2$*)*

$q_5 = \{22, 12, 11, 10, 00\}$ *(частичный порядок* $1 < 0, 1 < 2$*)*

$q_6 = \{22, 12, 11, 10, 02, 01, 00\}$ *(предпорядок* $(0 \sim 1) < 2$*)*

$q_7 = \{22, 21, 12, 11, 00\}$ *(эквивалентность* $1 \sim 2$*)*

$q_8 = \{22, 21, 12, 11, 02, 01, 00\}$ *(предпорядок* $0 < (1 \sim 2)$*)*

$q_9 = \{22, 21, 12, 11, 10, 01, 00\}$ *(центральный предикат)*

$q_{10} = \{22, 21, 12, 11, 10, 02, 01, 00\}$ *(все наборы кроме* 20*)*

2.2. Множества предикатов, классами сохранения которых являются клоны трёхзначной логики, содержащие функции 0, 1, 2, min, max

Определим для каждой вершины v диаграммы 1 некоторое множество предикатов $\pi(v) \subseteq \{q_1, \ldots, q_{10}\}$.

1) Верхней точке top диаграммы сопоставим пустое множество:

$$\pi(top) = \varnothing.$$

2) Пусть v' — вершина диаграммы, в которую входит ровно одно ребро из некоторой вершины v. В этом случае на диаграмме это ребро помечено некоторым предикатом p. Положим

$$\pi(v') = \pi(v) \cup \{p\}.$$

3) Пусть v' — вершина диаграммы, в которую входит несколько рёбер из некоторых вершин $v_1, \ldots, v_m$ $(m \geqslant 2)$. Положим

$$\pi(v') = \pi(v_1) \cup \ldots \cup \pi(v_m).$$

Таким образом, $\pi(v)$ совпадает со множеством всех предикатов, указанных на стрелках всех путей от верхней точки диаграммы 1 к вершине v. В частности, если v', v'' — две различные вершины диаграммы, то $\pi(v') \neq \pi(v'')$.

Обозначим все вершины диаграммы через $v_1, \ldots, v_{33}$, где нумерация вершин выбрана согласно формулам ниже. В частности, v_1 — верхняя точка диаграммы, v_5 — нижняя точка диаграммы.

$$\begin{aligned}
\pi(v_1) &= \varnothing;\\
\pi(v_2) &= \{q_1,\ q_2\};\\
\pi(v_3) &= \{q_2\};\\
\pi(v_4) &= \{q_3,\ q_7\};\\
\pi(v_5) &= \{q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5,\ q_6,\ q_7,\ q_8,\ q_9,\ q_{10}\};\\
\pi(v_6) &= \{q_2,\ q_3,\ q_6,\ q_7,\ q_9,\ q_{10}\};\\
\pi(v_7) &= \{q_4\};\\
\pi(v_8) &= \{q_1,\ q_2,\ q_4,\ q_6\};\\
\pi(v_9) &= \{q_3,\ q_4,\ q_7,\ q_8\};\\
\pi(v_{10}) &= \{q_5,\ q_9\};\\
\pi(v_{11}) &= \{q_1,\ q_2,\ q_5,\ q_6,\ q_9,\ q_{10}\};\\
\pi(v_{12}) &= \{q_3,\ q_5,\ q_7,\ q_8,\ q_9,\ q_{10}\};\\
\pi(v_{13}) &= \{q_2,\ q_6\};\\
\pi(v_{14}) &= \{q_1,\ q_2,\ q_6\};\\
\pi(v_{15}) &= \{q_7\};\\
\pi(v_{16}) &= \{q_1,\ q_2,\ q_7,\ q_8,\ q_9,\ q_{10}\};\\
\pi(v_{17}) &= \{q_2,\ q_7,\ q_9,\ q_{10}\};\\
\pi(v_{18}) &= \{q_7,\ q_8\};\\
\pi(v_{19}) &= \{q_3,\ q_7,\ q_8\};
\end{aligned}$$

$\pi(v_{20}) = \{q_9\};$
$\pi(v_{21}) = \{q_1,\ q_2,\ q_9,\ q_{10}\};$
$\pi(v_{22}) = \{q_2,\ q_9,\ q_{10}\};$
$\pi(v_{23}) = \{q_3,\ q_7,\ q_9,\ q_{10}\};$
$\pi(v_{24}) = \{q_4,\ q_9,\ q_{10}\};$
$\pi(v_{25}) = \{q_1,\ q_2,\ q_4,\ q_6,\ q_9,\ q_{10}\};$
$\pi(v_{26}) = \{q_3,\ q_4,\ q_7,\ q_8,\ q_9,\ q_{10}\};$
$\pi(v_{27}) = \{q_2,\ q_6,\ q_9,\ q_{10}\};$
$\pi(v_{28}) = \{q_1,\ q_2,\ q_6,\ q_9,\ q_{10}\};$
$\pi(v_{29}) = \{q_7,\ q_9,\ q_{10}\};$
$\pi(v_{30}) = \{q_7,\ q_8,\ q_9,\ q_{10}\};$
$\pi(v_{31}) = \{q_3,\ q_7,\ q_8,\ q_9,\ q_{10}\};$
$\pi(v_{32}) = \{q_9,\ q_{10}\};$
$\pi(v_{33}) = \{q_5,\ q_9,\ q_{10}\}.$

3. Идея доказательства

Пусть $Q_1, \ldots, Q_{33}$ — множества предикатов, определённые для вершин $v_1, \ldots, v_{33}$ как описано в разделе 2.2, т. е.

$$Q_1 = \pi(v_1), \ldots, Q_{33} = \pi(v_{33}).$$

Основной результат работы можно переформулировать следующим образом:

Теорема. *Множество всех клонов трёхзначной логики, содержащих функции* 0*,* 1*,* 2*,* min*,* max*, в точности совпадает со множеством клонов, являющихся классами сохранения множеств предикатов* $Q_1, \ldots, Q_{33}$*, т. е. со множеством*

$$Pol(Q_1), \ldots, Pol(Q_{33}).$$

Этот факт мы докажем, используя следующую логическую цепочку.

1. Вначале докажем, что для характеризации всех клонов трёхзначной логики, содержащих функции 0, 1, 2, min, max, достаточно предикатов $q_1, \ldots, q_{10}$, определённых в разделе 2.1; точнее, что справедлива следующая лемма:

Лемма 1 (О предикатном базисе)**.** *Если M — клон трёхзначной логики, содержащий функции* 0, 1, 2, min, max, *то*

$$(\exists Q \subseteq \{q_1, \ldots, q_{10}\})\ (M = Pol(Q)).$$

2. Из леммы 1 следует, что существует максимум 1024 клонов трёхзначной логики, содержащих функции 0, 1, 2, min, max. Покажем далее, что на самом деле их *не более чем* 33; точнее, что справедлива следующая лемма:

Лемма 2 (О полноте решётки)**.** *Для любого $Q \subseteq \{q_1, \ldots, q_{10}\}$ существует вершина v диаграммы, такая что*

$$Pol(Q) = Pol(\pi(v)).$$

3. В заключение, покажем, что клонов трёхзначной логики, содержащих функции 0, 1, 2, min, max, *не менее чем* 33; точнее, что справедлива следующая лемма:

Лемма 3. *Пусть v', v'' — две различные вершины диаграммы 1. Тогда*

$$Pol(\pi(v')) \neq Pol(\pi(v'')).$$

4. Доказательство леммы 1

1. Лемма 1 утверждает, что каждый клон M трёхзначной логики, содержащий функции 0, 1, 2, min, max, может быть охарактеризован как класс сохранение какого-то подмножества предикатов $q_1, \ldots, q_{10}$, определённых в разделе 2.1. Для доказательства этого факта покажем вначале, что каждый такой клон M может быть охарактеризован как класс сохранение какого-то множества предикатов арности 2, т. е. что

$$\big(\exists Q \subseteq R_3(2)\big)\ \big(M = Pol(Q)\big).$$

Определение. Функция $f^{(r+1)} \in P_k$, где $r \geqslant 2$, называется функцией *почти-единогласия (near-unanimity function, NUF)*, если справедливо тождество:

$$f^{(r+1)}(x, y, \ldots, y) = f^{(r+1)}(y, x, y, \ldots, y) = \ldots = f^{(r+1)}(y, \ldots, y, x) = y.$$

Теорема (Бейкер, Пиксли [3])**.** *Пусть M — клон, содержащий функцию почти-единогласия $f^{(r+1)}$ арности $r+1$ ($r \geqslant 2$). Тогда*

$$\big(\exists Q \subseteq R_k(r)\big)\ \big(M = Pol(Q)\big),$$

где $R_k(r)$ — множество всех предикатов k-значной логики арности $\leqslant r$.

Заметим, что каждый клон M трёхзначной логики, содержащий функции 0, 1, 2, min, max, также содержит функцию голосования $maj^{(3)}$, определяемую тожеством:

$$maj^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = max(max(min(x_1, x_2), min(x_2, x_3)), min(x_3, x_1)).$$

Функция $maj^{(3)}$ является функцией почти-единогласия арности 3, следовательно по теореме Бейкера—Пиксли

$$\big(\exists Q \subseteq R_3(2)\big)\ \big(M = Pol(Q)\big).$$

Покажем, что на самом деле

$$(\exists Q \subseteq \{q_1, \ldots, q_{10}\})\ (M = Pol(Q)).$$

2. Для удобства доказательства введём вспомогательную функцию μ. В качестве μ возьмём любую функцию, такую что для любого предиката $p \in R_3(2)$, сохраняемого функциями 0, 1, 2, min, max, справедливо

$$(\mu(p) \subseteq \{q_1, \ldots, q_{10}\})\ \wedge\ ([\{p\}]_{p.p.} = [\mu(p)]_{p.p.}).$$

Существование функции μ мы докажем далее в разделе 4.1.

Докажем теперь лемму 1. Пусть M — клон трёхзначной логики, содержащий функции 0, 1, 2, min, max. Доказательство леммы 1 даёт следующая логическая цепочка:

1) $\big(\exists Q \subseteq R_3(2)\big)\ \big(M = Pol(Q)\big)$ (по теореме Бейкера—Пиксли).

2) $Pol(Q) = Pol([Q]_{p.p.})$ (по теореме Гейгера—Боднарчука (см. раздел 1.3), так как

$$Pol(Q) = Pol\ Inv\ (Pol\ Q) = Pol\ (Inv\ Pol\ Q) = Pol([Q]_{p.p.})).$$

3) $Q = \{s_1, \ldots, s_m\}$ для некоторых предикатов $s_1, \ldots, s_m \in R_3(2)$ (так как $Q \subseteq R_3(2)$ и поэтому конечно).

4) $[Q]_{p.p.} = [\{s_1, \ldots, s_m\}]_{p.p.} = [[\{s_1\}]_{p.p.} \cup \ldots \cup [\{s_m\}]_{p.p.}]_{p.p.}$ (по определению $[\ ]_{p.p.}$).

5) Так как $M = Pol([\{s_1, \ldots, s_m\}]_{p.p.})$ и M содержит функции 0, 1, 2, min, max, то все предикаты $s_1, \ldots, s_m$ сохраняются функциями 0, 1, 2, min, max. Поэтому к ним можно применить функцию μ: $[[\{s_1\}]_{p.p.} \cup \ldots \cup [\{s_m\}]_{p.p.}]_{p.p.} = [[\mu(s_1)]_{p.p.} \cup \ldots \cup [\mu(s_m)]_{p.p.}]_{p.p.}$.

6) $[[\mu(s_1)]_{p.p.} \cup \ldots \cup [\mu(s_m)]_{p.p.}]_{p.p.} = [\mu(s_1) \cup \ldots \cup \mu(s_m)]_{p.p.}$ (по определению $[\ ]_{p.p.}$).

7) $[Q]_{p.p.} = [Q']_{p.p.}$, где $Q' = \mu(s_1) \cup \ldots \cup \mu(s_m)$.

8) $Q' \subseteq \{q_1, \ldots, q_{10}\}$ (по определению μ).

9) $Pol([Q']_{p.p.}) = Pol(Q')$.

4.1. Существование вспомогательной функции μ

Пусть $p \in R_3(2)$ — предикат арности 2, сохраняемый функциями 0, 1, 2, min, max. Докажем, что

$$\big(\exists Q \subseteq \{q_1, \ldots, q_{10}\}\big)\ \big([\{p\}]_{p.p.} = [Q]_{p.p.}\big).$$

Доказательство. Существует ровно 26 предикатов арности 2, сохраняемых функциями 0, 1, 2, min, max. Это предикаты $false^{(2)}$, $true^{(2)}$, $eq^{(2)}$, предикаты $q_1, \ldots, q_{10}$, определённые в разделе 2.1, и 13 предикатов из списка ниже. В качестве номера предиката p_j этого списка мы указываем число j (в десятичной кодировке), определяемое формулой

$$j = \tilde{p}_j(2,2) \cdot 2^8 + \tilde{p}_j(2,1) \cdot 2^7 + \tilde{p}_j(2,0) \cdot 2^6 + \ldots + \tilde{p}_j(0,1) \cdot 2^1 + \tilde{p}_j(0,0) \cdot 2^0,$$

где $\tilde{p}_j(x_1, x_2) = 1$, если p_j истинен на наборе (x_1, x_2); $\tilde{p}_j(x_1, x_2) = 0$ иначе.

$p_{281} = \{22, 11, 10, 00\}$ *(частичный порядок $1 < 0$)*

$p_{307} = \{22, 12, 11, 01, 00\}$

$p_{315} = \{22, 12, 11, 10, 01, 00\}$

$p_{401} = \{22, 21, 11, 00\}$ *(частичный порядок $2 < 1$)*

$p_{403} = \{22, 21, 11, 01, 00\}$ *(частичный порядок $0 < 1,\ 2 < 1$)*

$p_{409} = \{22, 21, 11, 10, 00\}$

$p_{411} = \{22, 21, 11, 10, 01, 00\}$

$p_{435} = \{22, 21, 12, 11, 01, 00\}$

$p_{441} = \{22, 21, 12, 11, 10, 00\}$

$p_{473} = \{22, 21, 20, 11, 10, 00\}$ *(линейный порядок $2 < 1 < 0$)*

$p_{475} = \{22, 21, 20, 11, 10, 01, 00\}$ *(предпорядок $2 < (0 \sim 1)$)*

$p_{505} = \{22, 21, 20, 12, 11, 10, 00\}$ *(предпорядок $(1 \sim 2) < 0$)*

$p_{507} = \{22, 21, 20, 12, 11, 10, 01, 00\}$ *(все наборы кроме 02)*

Очевидно, что для любого $p \in \{false^{(2)}, true^{(2)}, eq^{(2)}, q_1, \ldots, q_{10}\}$

$$\big(\exists Q \subseteq \{q_1, \ldots, q_{10}\}\big)\ \big([\{p\}]_{p.p.} = [Q]_{p.p.}\big).$$

Покажем, что и оставшиеся 13 предикатов обладают этим свойством.

1) Предикаты p_{281}, p_{401}, p_{403}, p_{473}, p_{475}, p_{505}, p_{507} получаются перестановкой переменных из предикатов $q_1, \ldots, q_{10}$, и поэтому они обладают требуемым свойством:

$$p_{281}(x_1, x_2) = q_1(x_2, x_1);$$
$$p_{401}(x_1, x_2) = q_3(x_2, x_1);$$
$$p_{403}(x_1, x_2) = q_5(x_2, x_2);$$
$$p_{473}(x_1, x_2) = q_4(x_2, x_1);$$
$$p_{475}(x_1, x_2) = q_6(x_2, x_1);$$
$$p_{505}(x_1, x_2) = q_8(x_2, x_1);$$
$$p_{507}(x_1, x_2) = q_{10}(x_2, x_1).$$

2) Для каждого из предикатов $p_{307}, p_{315}, p_{435}$ мы предъявим некоторое множество $Q = \{s_1, \ldots, s_m\} \subseteq \{q_1, \ldots, q_{10}\}$, такое что

$$[\{p\}]_{p.p.} = [\{s_1, \ldots, s_m\}]_{p.p.},$$

а доказательство факта $[\{p\}]_{p.p.} = [\{s_1, \ldots, s_m\}]_{p.p.}$ мы сведём к доказательству двух вспомогательных фактов:

а) $p \in [\{s_1, \ldots, s_m\}]_{p.p.}$.

б) $(\forall s \in \{s_1, \ldots, s_m\})\ (s \in [\{p\}]_{p.p.})$.

Итак,

а) $[\{p_{307}\}]_{p.p.} = [\{q_4, q_{10}\}]_{p.p.}$, так как

$$\begin{aligned}
p_{307}(x_1, x_2) &= q_4(x_1, x_2) \wedge q_{10}(x_2, x_1);\\
q_4(x_1, x_2) &= \exists y_1 \left(p_{307}(x_1, y_1) \wedge p_{307}(y_1, x_2)\right);\\
q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1\, \exists y_2 \left(p_{307}(x_1, y_2) \wedge p_{307}(y_2, y_1) \wedge p_{307}(x_2, y_1)\right).
\end{aligned}$$

б) $[\{p_{315}\}]_{p.p.} = [\{q_6, q_{10}\}]_{p.p.}$, так как

$$\begin{aligned}
p_{315}(x_1, x_2) &= q_6(x_1, x_2) \wedge q_{10}(x_2, x_1);\\
q_6(x_1, x_2) &= \exists y_1 \left(p_{315}(x_1, y_1) \wedge p_{315}(y_1, x_2)\right);\\
q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1\, \exists y_2 \left(p_{315}(x_1, y_2) \wedge p_{315}(y_2, y_1) \wedge p_{315}(x_2, y_1)\right).
\end{aligned}$$

в) $[\{p_{435}\}]_{p.p.} = [\{q_8, q_{10}\}]_{p.p.}$, так как

$$\begin{aligned}
p_{435}(x_1, x_2) &= q_8(x_1, x_2) \wedge q_{10}(x_2, x_1);\\
q_8(x_1, x_2) &= \exists y_1 \left(p_{435}(x_1, y_1) \wedge p_{435}(y_1, x_2)\right);\\
q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1\, \exists y_2 \left(p_{435}(y_1, x_1) \wedge p_{435}(y_1, y_2) \wedge p_{435}(y_2, x_2)\right).
\end{aligned}$$

3) Предикаты p_{409}, p_{411}, p_{441} получаются перестановкой переменных из предикатов p_{307}, p_{315}, p_{435}, поэтому они также обладают требуемым свойством:

$$\begin{aligned}
p_{409}(x_1, x_2) &= p_{307}(x_2, x_1);\\
p_{411}(x_1, x_2) &= p_{315}(x_2, x_1);\\
p_{441}(x_1, x_2) &= p_{435}(x_2, x_1).
\end{aligned}$$

□

5. Доказательство леммы 2

Напомним, что в разделе 2.2 мы сопоставили каждой вершине v диаграммы 1 некоторое множество предикатов $\pi(v) \subseteq \{q_1, \ldots, q_{10}\}$. Лемма 2 говорит о том, что для любого $Q \subseteq \{q_1, \ldots, q_{10}\}$ существует вершина v диаграммы, такая что

$$Pol(Q) = Pol(\pi(v)).$$

Введём индуктивное определение:

1) $Classes(0) = \{[\varnothing]_{p.p.}\}$.

2) $Classes(m) =$
$$= Classes(m-1) \ \cup \ \big\{[C \cup \{q_m\}]_{p.p.} \colon C \in Classes(m-1)\big\}$$
$$(1 \leqslant m \leqslant 10).$$

Учитывая, что $[Q \cup \{p\}]_{p.p.} = [[Q]_{p.p.} \cup \{p\}]_{p.p.}$, заметим, что

$$Classes(m) = \{[Q]_{p.p.} \colon Q \subseteq \{q_1, \ldots, q_m\}\} \quad (0 \leqslant m \leqslant 10).$$

Поэтому, учитывая, что $Pol(Q) = Pol([Q]_{p.p.})$, утверждение леммы 2 можно переформулировать следующим образом:

$$(\forall\, C \in Classes(10))\ (\exists\, v)\ (Pol(C) = Pol(\pi(v))).$$

А учитывая, что $(Pol(Q) = Pol(Q')) \iff ([Q]_{p.p.} = [Q']_{p.p.})$ и тот факт, что $(C \in Classes(m)) \Rightarrow ([C]_{p.p.} = C)$, утверждение леммы 2 можно дополнительно переформулировать так:

$$(\forall\, C \in Classes(10))\ (\exists\, v)\ (C = [\pi(v)]_{p.p.}).$$

Докажем этот факт индукцией по параметру m в обозначении $Classes(m)$.

1) Базис индукции. Пусть $m = 0$. Тогда

$$Classes(0) = \{[\varnothing]_{p.p.}\}.$$

Поэтому если $C \in Classes(0)$, то $C = [\pi(v_1)]_{p.p.}$, где согласно нашим обозначениям v_1 обозначает верхнюю точку диаграммы 1.

2) Индукционный переход. Зафиксируем $m \in \{1, \ldots, 10\}$ и предположим, что

$$(\forall\, C \in Classes(m-1))\ (\exists\, v)\ (C = [\pi(v)]_{p.p.}).$$

Покажем, что

$$(\forall\, C \in Classes(m))\ (\exists\, v)\ (C = [\pi(v)]_{p.p.}).$$

Пусть $C \in Classes(m)$. Из определения $Classes(m)$ имеем:

$$\big(C \in Classes(m-1)\big) \vee \\ \vee\ (\exists\, C' \in Classes(m-1))\ (C = [C' \cup \{q_m\}]_{p.p.}).$$

Поэтому доказательство индукционного перехода сводится к доказательству факта

$$(\forall\, C \in Classes(m-1))\ (\exists\, v)\ \big([C \cup \{q_m\}]_{p.p.} = [\pi(v)]_{p.p.}\big). \tag{\textit{induct-step-m}}$$

Докажем этот факт. Зафиксируем $C \in Classes(m-1)$. По предположению индукции $C = [\pi(v)]_{p.p.}$ для некоторой вершины v. Далее,

а) Если $p_m \in C$, то, очевидно,

$$[C \cup \{q_m\}]_{p.p.} = [C]_{p.p.} = [\pi(v)]_{p.p.}.$$

Рассмотрение этих случаев ($p_m \in C$) мы будем опускать в дальнейшем.

б) Если $p_m \notin C$, то для завершения доказательства необходимо найти вершину v', такую что

$$[\pi(v) \cup \{q_m\}]_{p.p.} = [\pi(v')]_{p.p.}. \tag{\textit{induct-step-m-v}}$$

Следующие 10 подразделов статьи содержат доказательства индукционных переходов в форме (*induct-step-m*) для $m \in \{1, \ldots, 10\}$. Доказательство m-ого индукционного перехода проводится последовательным разбором случаев для всех $C \in Classes(m-1)$. Справедливость вспомогательного факта (*induct-step-m-v*) мы обосновываем так: для

$C \in Classes(m-1)$, такого что $C = [\pi(v)]_{p.p.}$, мы явно указываем вершину v', такую что

$$[C \cup \{q_m\}]_{p.p.} = [[\pi(v)]_{p.p.} \cup \{q_m\}]_{p.p.} = [\pi(v')]_{p.p.},$$

причём

$$(\pi(v) \cup \{q_m\}) \subseteq \pi(v').$$

Это равенство мы обосновываем так: для каждого $p \in \pi(v') \setminus (\pi(v) \cup \{q_m\})$ мы указываем примитивную позитивную формулу над множеством предикатов $\pi(v) \cup \{q_m\}$, определяющую предикат p (т. е. показываем, что $p \in [\pi(v) \cup \{q_m\}]_{p.p.}$).

Дополнительно на каждом индукционном шаге m мы явным образом строим множество $Classes(m)$.

В заключение, в дальнейших подразделах мы будем использовать обозначение:

$$C_j = [\pi(v_j)]_{p.p.} \quad (1 \leqslant j \leqslant 33).$$

5.1. Добавление предиката q_1

1) $[C_1 \cup \{q_1\}]_{p.p.} = [[\varnothing]_{p.p.} \cup \{q_1\}]_{p.p.} = [\{q_1,\ q_2\}]_{p.p.} = C_2$, так как

$$q_2(x_1, x_2) = \exists y_1 \left(q_1(x_1, y_1) \wedge q_1(x_2, y_1)\right).$$

Таким образом, $Classes(1) = \{C_1, C_2\}$.

5.2. Добавление предиката q_2

1) $[C_1 \cup \{q_2\}]_{p.p.} = [[\varnothing]_{p.p.} \cup \{q_2\}]_{p.p.} = [\{q_2\}]_{p.p.} = C_3$.

Таким образом, $Classes(2) = \{C_1, C_2, C_3\}$.

5.3. Добавление предиката q_3

1) $[C_1 \cup \{q_3\}]_{p.p.} = [[\varnothing]_{p.p.} \cup \{q_3\}]_{p.p.} = [\{q_3,\ q_7\}]_{p.p.} = C_4$, так как

$$q_7(x_1, x_2) = \exists y_1 \left(q_3(x_1, y_1) \wedge q_3(x_2, y_1)\right).$$

2) $[C_2 \cup \{q_3\}]_{p.p.} = [[\{q_1,\ q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_3\}]_{p.p.} = [\{q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5,\ q_6,\ q_7,\ q_8,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_5$, так как

$$\begin{aligned} q_4(x_1,x_2) &= \exists y_1\ \big(q_1(x_1,y_1) \wedge q_3(y_1,x_2)\big); \\ q_5(x_1,x_2) &= \exists y_1\ \big(q_3(x_1,y_1) \wedge q_1(x_2,y_1)\big); \\ q_6(x_1,x_2) &= \exists y_1\ \big(q_2(x_1,y_1) \wedge q_3(y_1,x_2)\big); \\ q_7(x_1,x_2) &= \exists y_1\ \big(q_3(x_1,y_1) \wedge q_3(x_2,y_1)\big); \\ q_8(x_1,x_2) &= \exists y_1\ \exists y_2\ \big(q_1(x_1,y_2) \wedge q_3(y_2,y_1) \wedge q_3(x_2,y_1)\big); \\ q_9(x_1,x_2) &= \exists y_1\ \exists y_2\ \big(q_3(x_1,y_2) \wedge q_2(y_2,y_1) \wedge q_3(x_2,y_1)\big); \\ q_{10}(x_1,x_2) &= \exists y_1\ \exists y_2\ \big(q_2(x_1,y_2) \wedge q_3(y_2,y_1) \wedge q_3(x_2,y_1)\big). \end{aligned}$$

3) $[C_3 \cup \{q_3\}]_{p.p.} = [[\{q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_3\}]_{p.p.} = [\{q_2, q_3, q_6, q_7, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_6$, так как

$$\begin{aligned} q_6(x_1,x_2) &= \exists y_1\ \big(q_2(x_1,y_1) \wedge q_3(y_1,x_2)\big); \\ q_7(x_1,x_2) &= \exists y_1\ \big(q_3(x_1,y_1) \wedge q_3(x_2,y_1)\big); \\ q_9(x_1,x_2) &= \exists y_1\ \exists y_2\ \big(q_3(x_1,y_2) \wedge q_2(y_2,y_1) \wedge q_3(x_2,y_1)\big); \\ q_{10}(x_1,x_2) &= \exists y_1\ \exists y_2\ \big(q_2(x_1,y_2) \wedge q_3(y_2,y_1) \wedge q_3(x_2,y_1)\big). \end{aligned}$$

Таким образом, $Classes(3) = \{C_1, C_2, \ldots, C_6\}$.

5.4. Добавление предиката q_4

1) $[C_1 \cup \{q_4\}]_{p.p.} = [[\varnothing]_{p.p.} \cup \{q_4\}]_{p.p.} = [\{q_4\}]_{p.p.} = C_7$.

2) $[C_2 \cup \{q_4\}]_{p.p.} = [[\{q_1,\ q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_4\}]_{p.p.} = [\{q_1,\ q_2,\ q_4,\ q_6\}]_{p.p.} = C_8$, так как

$$q_6(x_1,x_2) = \exists y_1\ \big(q_2(x_1,y_1) \wedge q_4(y_1,x_2)\big).$$

3) $[C_3 \cup \{q_4\}]_{p.p.} = [[\{q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_4\}]_{p.p.} = [\{q_1,\ q_2,\ q_4,\ q_6\}]_{p.p.} = C_8$, так как

$$\begin{aligned} q_1(x_1,x_2) &= q_2(x_1,x_2) \wedge q_4(x_1,x_2); \\ q_6(x_1,x_2) &= \exists y_1\ \big(q_2(x_1,y_1) \wedge q_4(y_1,x_2)\big). \end{aligned}$$

4) $[C_4 \cup \{q_4\}]_{p.p.} = [[\{q_3,\ q_7\}]_{p.p.} \cup \{q_4\}]_{p.p.} = [\{q_3,\ q_4,\ q_7,\ q_8\}]_{p.p.} = C_9$, так как

$$q_8(x_1,x_2) = \exists y_1\ \big(q_4(x_1,y_1) \wedge q_7(y_1,x_2)\big).$$

5) $[C_6 \cup \{q_4\}]_{p.p.} = [[\{q_2,\ q_3,\ q_6,\ q_7,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} \cup \{q_4\}]_{p.p.} = [\{q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5,\ q_6,\ q_7,\ q_8,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_5$, так как

$$\begin{aligned}
q_1(x_1, x_2) &= q_2(x_1, x_2) \wedge q_4(x_1, x_2);\\
q_5(x_1, x_2) &= \exists y_1 \big(q_2(x_1, y_1) \wedge q_4(y_1, x_1) \wedge q_3(y_1, x_2)\big);\\
q_8(x_1, x_2) &= \exists y_1 \big(q_4(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2)\big).
\end{aligned}$$

Таким образом, $Classes(4) = \{C_1, C_2, \ldots, C_9\}$.

5.5. Добавление предиката q_5

1) $[C_1 \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [[\varnothing]_{p.p.} \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [\{q_5,\ q_9\}]_{p.p.} = C_{10}$, так как

$$q_9(x_1, x_2) = \exists y_1 \big(q_5(x_1, y_1) \wedge q_5(x_2, y_1)\big).$$

2) $[C_2 \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [[\{q_1,\ q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [\{q_1,\ q_2,\ q_5,\ q_6,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_{11}$, так как

$$\begin{aligned}
q_6(x_1, x_2) &= \exists y_1 \big(q_1(x_1, y_1) \wedge q_5(y_1, x_2)\big);\\
q_9(x_1, x_2) &= \exists y_1 \big(q_5(x_1, y_1) \wedge q_5(x_2, y_1)\big);\\
q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1 \exists y_2 \big(q_1(x_1, y_2) \wedge q_5(y_2, y_1) \wedge q_5(x_2, y_1)\big).
\end{aligned}$$

3) $[C_3 \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [[\{q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_5, q_6, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{11}$, так как

$$\begin{aligned}
q_1(x_1, x_2) &= q_2(x_1, x_2) \wedge q_5(x_2, x_1);\\
q_6(x_1, x_2) &= \exists y_1 \big(q_2(x_1, y_1) \wedge q_5(y_1, x_2)\big);\\
q_9(x_1, x_2) &= \exists y_1 \big(q_5(x_1, y_1) \wedge q_5(x_2, y_1)\big);\\
q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1 \exists y_2 \big(q_2(x_1, y_2) \wedge q_5(y_2, y_1) \wedge q_5(x_2, y_1)\big).
\end{aligned}$$

4) $[C_4 \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [[\{q_3,\ q_7\}]_{p.p.} \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [\{q_3,\ q_5,\ q_7,\ q_8,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_{12}$, так как

$$\begin{aligned}
q_8(x_1, x_2) &= \exists y_1 \big(q_5(y_1, x_1) \wedge q_3(y_1, x_2)\big);\\
q_9(x_1, x_2) &= \exists y_1 \big(q_5(x_1, y_1) \wedge q_5(x_2, y_1)\big);\\
q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1 \exists y_2 \big(q_5(x_1, y_1) \wedge q_5(y_2, y_1) \wedge q_3(y_2, x_2)\big).
\end{aligned}$$

5) $[C_6 \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [[\{q_2,\ q_3,\ q_6,\ q_7,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [\{q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5,\ q_6,\ q_7,\ q_8,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_5$, так как

$$\begin{aligned}
q_1(x_1,x_2) &= q_2(x_1,x_2) \wedge q_5(x_2,x_1);\\
q_4(x_1,x_2) &= \exists y_1 \big(q_2(x_1,y_1) \wedge q_5(y_1,x_1) \wedge q_3(y_1,x_2)\big);\\
q_8(x_1,x_2) &= \exists y_1 \big(q_5(y_1,x_1) \wedge q_3(y_1,x_2)\big).
\end{aligned}$$

6) $[C_7 \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [[\{q_4\}]_{p.p.} \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [\{q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5,\ q_6,\ q_7,\ q_8,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_5$, так как

$$\begin{aligned}
q_1(x_1,x_2) &= q_4(x_1,x_2) \wedge q_5(x_2,x_1);\\
q_2(x_1,x_2) &= \exists y_1 \exists y_2 \big(q_4(x_1,y_1) \wedge q_5(y_1,x_2) \wedge\\
&\qquad\qquad\qquad \wedge q_4(y_2,x_1) \wedge q_5(x_2,y_2)\big);\\
q_3(x_1,x_2) &= q_4(x_1,x_2) \wedge q_5(x_1,x_2);\\
q_6(x_1,x_2) &= \exists y_1 \big(q_4(x_1,y_1) \wedge q_5(y_1,x_2)\big);\\
q_7(x_1,x_2) &= \exists y_1 \big(q_4(x_1,y_1) \wedge q_5(x_1,y_1) \wedge\\
&\qquad\qquad\qquad \wedge q_4(x_2,y_1) \wedge q_5(x_2,y_1)\big);\\
q_8(x_1,x_2) &= \exists y_1 \big(q_4(x_1,y_1) \wedge q_5(x_2,y_1)\big);\\
q_9(x_1,x_2) &= \exists y_1 \big(q_5(x_1,y_1) \wedge q_5(x_2,y_1)\big);\\
q_{10}(x_1,x_2) &= \exists y_1 \exists y_2 \big(q_4(x_1,y_2) \wedge q_5(y_2,y_1) \wedge q_5(x_2,y_1)\big).
\end{aligned}$$

7) $[C_8 \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [[\{q_1,\ q_2,\ q_4,\ q_6\}]_{p.p.} \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [\{q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5,\ q_6,\ q_7,\ q_8,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_5$, так как

$$\begin{aligned}
q_3(x_1,x_2) &= q_4(x_1,x_2) \wedge q_5(x_1,x_2);\\
q_7(x_1,x_2) &= \exists y_1 \big(q_4(x_1,y_1) \wedge q_5(x_1,y_1) \wedge\\
&\qquad\qquad\qquad \wedge q_4(x_2,y_1) \wedge q_5(x_2,y_1)\big);\\
q_8(x_1,x_2) &= \exists y_1 \big(q_4(x_1,y_1) \wedge q_5(x_2,y_1)\big);\\
q_9(x_1,x_2) &= \exists y_1 \big(q_5(x_1,y_1) \wedge q_5(x_2,y_1)\big);\\
q_{10}(x_1,x_2) &= \exists y_1 \big(q_6(x_1,y_1) \wedge q_5(x_2,y_1)\big).
\end{aligned}$$

8) $[C_9 \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [[\{q_3,\ q_4,\ q_7,\ q_8\}]_{p.p.} \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [\{q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5,$ $q_6,\ q_7,\ q_8,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_5$, так как

$$\begin{aligned} q_1(x_1,x_2) &= q_4(x_1,x_2) \wedge q_5(x_2,x_1); \\ q_2(x_1,x_2) &= \exists y_1\, \exists y_2\, \big(q_4(x_1,y_1) \wedge q_5(y_1,x_2) \wedge \\ &\qquad\qquad \wedge q_4(y_2,x_1) \wedge q_5(x_2,y_2)\big); \\ q_6(x_1,x_2) &= \exists y_1\, \big(q_4(x_1,y_1) \wedge q_5(y_1,x_2)\big); \\ q_9(x_1,x_2) &= \exists y_1\, \big(q_5(x_1,y_1) \wedge q_5(x_2,y_1)\big); \\ q_{10}(x_1,x_2) &= \exists y_1\, \big(q_5(x_1,y_1) \wedge q_8(y_1,x_2)\big). \end{aligned}$$

Таким образом, $Classes(5) = \{C_1, C_2, \ldots, C_{12}\}$.

5.6. Добавление предиката q_6

1) $[C_1 \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [[\varnothing]_{p.p.} \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [\{q_2,\ q_6\}]_{p.p.} = C_{13}$, так как

$$q_2(x_1,x_2) = q_6(x_1,x_2) \wedge q_6(x_2,x_1).$$

2) $[C_2 \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [[\{q_1,\ q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [\{q_1,\ q_2,\ q_6\}]_{p.p.} = C_{14}$.

3) $[C_3 \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [[\{q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [\{q_2,\ q_6\}]_{p.p.} = C_{13}$.

4) $[C_4 \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [[\{q_3,\ q_7\}]_{p.p.} \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [\{q_2,\ q_3,\ q_6,\ q_7,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} =$ $= C_6$, так как

$$\begin{aligned} q_2(x_1,x_2) &= q_6(x_1,x_2) \wedge q_6(x_2,x_1); \\ q_9(x_1,x_2) &= \exists y_1\, \exists y_2\, \big(q_3(x_1,y_2) \wedge q_6(y_1,y_2) \wedge \\ &\qquad\qquad \wedge q_6(x_1,y_1) \wedge q_3(x_2,y_1)\big); \\ q_{10}(x_1,x_2) &= \exists y_1\, \big(q_6(x_1,y_1) \wedge q_7(y_1,x_2)\big). \end{aligned}$$

5) $[C_7 \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [[\{q_4\}]_{p.p.} \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [\{q_1,\ q_2,\ q_4,\ q_6\}]_{p.p.} = C_8$, так как

$$\begin{aligned} q_1(x_1,x_2) &= q_4(x_1,x_2) \wedge q_6(x_2,x_1); \\ q_2(x_1,x_2) &= q_6(x_1,x_2) \wedge q_6(x_2,x_1). \end{aligned}$$

6) $[C_9 \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [[\{q_3,\ q_4,\ q_7,\ q_8\}]_{p.p.} \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [\{q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5,$ $q_6,\ q_7,\ q_8,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_5$, так как

$$
\begin{aligned}
q_1(x_1,x_2) &= q_4(x_1,x_2) \wedge q_6(x_2,x_1);\\
q_2(x_1,x_2) &= q_6(x_1,x_2) \wedge q_6(x_2,x_1);\\
q_5(x_1,x_2) &= q_6(x_1,x_2) \wedge q_8(x_2,x_1);\\
q_9(x_1,x_2) &= \exists y_1\, \exists y_2\, \big(q_3(x_1,y_2) \wedge q_6(y_1,y_2) \wedge\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \wedge q_6(x_1,y_1) \wedge q_3(x_2,y_1)\big);\\
q_{10}(x_1,x_2) &= \exists y_1\, \big(q_6(x_1,y_1) \wedge q_7(y_1,x_2)\big).
\end{aligned}
$$

7) $[C_{10} \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [[\{q_5, q_9\}]_{p.p.} \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_5, q_6, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} =$ $= C_{11}$, так как

$$
\begin{aligned}
q_1(x_1,x_2) &= q_6(x_1,x_2) \wedge q_5(x_2,x_1);\\
q_2(x_1,x_2) &= q_6(x_1,x_2) \wedge q_6(x_2,x_1);\\
q_{10}(x_1,x_2) &= \exists y_1\, \big(q_6(x_1,y_1) \wedge q_9(y_1,x_2)\big).
\end{aligned}
$$

8) $[C_{12} \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [[\{q_3,\ q_5,\ q_7,\ q_8,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [\{q_1,\ q_2,\ q_3,$ $q_4,\ q_5,\ q_6,\ q_7,\ q_8,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_5$, так как

$$
\begin{aligned}
q_1(x_1,x_2) &= q_6(x_1,x_2) \wedge q_5(x_2,x_1);\\
q_2(x_1,x_2) &= q_6(x_1,x_2) \wedge q_6(x_2,x_1);\\
q_4(x_1,x_2) &= q_6(x_1,x_2) \wedge q_8(x_1,x_2).
\end{aligned}
$$

Таким образом, $Classes(6) = \{C_1, C_2, \ldots, C_{14}\}$.

5.7. Добавление предиката q_7

1) $[C_1 \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [[\varnothing]_{p.p.} \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [\{q_7\}]_{p.p.} = C_{15}$.

2) $[C_2 \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [[\{q_1, q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} =$ $= C_{16}$, так как

$$
\begin{aligned}
q_8(x_1,x_2) &= \exists y_1\, \big(q_1(x_1,y_1) \wedge q_7(y_1,x_2)\big);\\
q_9(x_1,x_2) &= \exists y_1\, \exists y_2\, \big(q_1(y_1,x_1) \wedge q_7(y_1,y_2) \wedge q_1(y_2,x_2)\big);\\
q_{10}(x_1,x_2) &= \exists y_1\, \big(q_2(x_1,y_1) \wedge q_7(y_1,x_2)\big).
\end{aligned}
$$

3) $[C_3 \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [[\{q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [\{q_2,\ q_7,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_{17}$, так как

$$q_9(x_1, x_2) = \exists y_1\, \exists y_2\, \big(q_2(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2) \wedge \wedge\, q_7(x_1, y_2) \wedge q_2(y_2, x_2)\big);$$
$$q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1\, \big(q_2(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2)\big).$$

4) $[C_7 \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [[\{q_4\}]_{p.p.} \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [\{q_3,\ q_4,\ q_7,\ q_8\}]_{p.p.} = C_9$, так как

$$q_3(x_1, x_2) = q_4(x_1, x_2) \wedge q_7(x_1, x_2);$$
$$q_8(x_1, x_2) = \exists y_1\, \big(q_4(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2)\big).$$

5) $[C_8 \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [[\{q_1,\ q_2,\ q_4,\ q_6\}]_{p.p.} \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [\{q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5,\ q_6,\ q_7,\ q_8,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_5$, так как

$$q_3(x_1, x_2) = q_4(x_1, x_2) \wedge q_7(x_1, x_2);$$
$$q_5(x_1, x_2) = \exists y_1\, \big(q_4(x_1, y_1) \wedge q_7(x_1, y_1) \wedge q_1(x_2, y_1)\big);$$
$$q_8(x_1, x_2) = \exists y_1\, \big(q_1(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2)\big);$$
$$q_9(x_1, x_2) = \exists y_1\, \exists y_2\, \big(q_1(y_1, x_1) \wedge q_7(y_1, y_2) \wedge q_1(y_2, x_2)\big);$$
$$q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1\, \big(q_2(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2)\big).$$

6) $[C_{10} \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [[\{q_5, q_9\}]_{p.p.} \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [\{q_3, q_5, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{12}$, так как

$$q_3(x_1, x_2) = q_5(x_1, x_2) \wedge q_7(x_1, x_2);$$
$$q_8(x_1, x_2) = \exists y_1\, \big(q_5(y_1, x_1) \wedge q_7(y_1, x_2)\big);$$
$$q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1\, \big(q_9(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2)\big).$$

7) $[C_{11} \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [[\{q_1,\ q_2,\ q_5,\ q_6,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [\{q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5,\ q_6,\ q_7,\ q_8,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_5$, так как

$$q_3(x_1, x_2) = q_5(x_1, x_2) \wedge q_7(x_1, x_2);$$
$$q_4(x_1, x_2) = \exists y_1\, \big(q_1(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2) \wedge q_6(x_1, x_2)\big);$$
$$q_8(x_1, x_2) = \exists y_1\, \big(q_1(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2)\big).$$

8) $[C_{13} \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [[\{q_2, q_6\}]_{p.p.} \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [\{q_2, q_3, q_6, q_7, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_6$, так как

$$\begin{aligned} q_3(x_1, x_2) &= q_6(x_1, x_2) \wedge q_7(x_1, x_2); \\ q_9(x_1, x_2) &= \exists y_1 \, \exists y_2 \, \big(q_2(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2) \wedge \\ &\qquad \wedge q_7(x_1, y_2) \wedge q_2(y_2, x_2)\big); \\ q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1 \, \big(q_2(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2)\big). \end{aligned}$$

9) $[C_{14} \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [[\{q_1,\ q_2,\ q_6\}]_{p.p.} \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [\{q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5,\ q_6,\ q_7,\ q_8,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_5$, так как

$$\begin{aligned} q_3(x_1, x_2) &= q_6(x_1, x_2) \wedge q_7(x_1, x_2); \\ q_4(x_1, x_2) &= \exists y_1 \, \big(q_1(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2) \wedge q_6(x_1, x_2)\big); \\ q_5(x_1, x_2) &= \exists y_1 \, \big(q_6(x_1, y_1) \wedge q_7(x_1, y_1) \wedge q_1(x_2, y_1)\big); \\ q_8(x_1, x_2) &= \exists y_1 \, \big(q_1(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2)\big); \\ q_9(x_1, x_2) &= \exists y_1 \, \exists y_2 \, \big(q_1(y_1, x_1) \wedge q_7(y_1, y_2) \wedge q_1(y_2, x_2)\big); \\ q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1 \, \big(q_2(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2)\big). \end{aligned}$$

Таким образом, $Classes(7) = \{C_1, C_2, \ldots, C_{17}\}$.

5.8. Добавление предиката q_8

1) $[C_1 \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [[\varnothing]_{p.p.} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [\{q_7,\ q_8\}]_{p.p.} = C_{18}$, так как

$$q_7(x_1, x_2) = q_8(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1).$$

2) $[C_2 \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [[\{q_1, q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{16}$, так как

$$\begin{aligned} q_7(x_1, x_2) &= q_8(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1); \\ q_9(x_1, x_2) &= \exists y_1 \, \exists y_2 \, \big(q_1(y_1, x_1) \wedge q_8(y_2, y_1) \wedge \\ &\qquad \wedge q_1(y_2, x_2) \wedge q_8(y_1, x_2)\big); \\ q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1 \, \big(q_2(x_1, y_1) \wedge q_8(y_1, x_2)\big). \end{aligned}$$

3) $[C_3 \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [[\{q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{16}$, так как

$$\begin{aligned}
q_1(x_1, x_2) &= q_2(x_1, x_2) \wedge q_8(x_1, x_2);\\
q_7(x_1, x_2) &= q_8(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1);\\
q_9(x_1, x_2) &= \exists y_1\, \exists y_2\, \big(q_2(x_1, y_2) \wedge q_8(y_2, y_1) \wedge q_8(y_1, x_1) \wedge\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \wedge q_2(y_1, x_2) \wedge q_8(y_1, x_2)\big);\\
q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1\, \big(q_2(x_1, y_1) \wedge q_8(y_1, x_2)\big).
\end{aligned}$$

4) $[C_4 \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [[\{q_3,\ q_7\}]_{p.p.} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [\{q_3,\ q_7,\ q_8\}]_{p.p.} = C_{19}$.

5) $[C_6 \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [[\{q_2,\ q_3,\ q_6,\ q_7,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [\{q_1,\ q_2,\ q_3,$ $q_4,\ q_5,\ q_6,\ q_7,\ q_8,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_5$, так как

$$\begin{aligned}
q_1(x_1, x_2) &= q_2(x_1, x_2) \wedge q_8(x_1, x_2);\\
q_4(x_1, x_2) &= q_6(x_1, x_2) \wedge q_8(x_1, x_2);\\
q_5(x_1, x_2) &= q_6(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1).
\end{aligned}$$

6) $[C_7 \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [[\{q_4\}]_{p.p.} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [\{q_3,\ q_4,\ q_7,\ q_8\}]_{p.p.} = C_9$, так как

$$\begin{aligned}
q_3(x_1, x_2) &= q_4(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1);\\
q_7(x_1, x_2) &= q_8(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1).
\end{aligned}$$

7) $[C_8 \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [[\{q_1,\ q_2,\ q_4,\ q_6\}]_{p.p.} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [\{q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5,$ $q_6,\ q_7,\ q_8,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_5$, так как

$$\begin{aligned}
q_3(x_1, x_2) &= q_4(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1);\\
q_5(x_1, x_2) &= q_6(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1);\\
q_7(x_1, x_2) &= q_8(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1);\\
q_9(x_1, x_2) &= \exists y_1\, \exists y_2\, \big(q_1(y_1, x_1) \wedge q_8(y_2, y_1) \wedge\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \wedge q_1(y_2, x_2) \wedge q_8(y_1, x_2)\big);\\
q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1\, \big(q_2(x_1, y_1) \wedge q_8(y_1, x_2)\big).
\end{aligned}$$

8) $[C_{10} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [[\{q_5, q_9\}]_{p.p.} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [\{q_3, q_5, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} =$ $= C_{12}$, так как

$$\begin{aligned}
q_3(x_1, x_2) &= q_5(x_1, x_2) \wedge q_8(x_1, x_2);\\
q_7(x_1, x_2) &= q_8(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1);\\
q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1\, \big(q_5(x_1, y_1) \wedge q_8(y_1, x_2)\big).
\end{aligned}$$

9) $[C_{11} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [[\{q_1,\ q_2,\ q_5,\ q_6,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [\{q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5,\ q_6,\ q_7,\ q_8,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_5$, так как

$$
\begin{aligned}
q_3(x_1, x_2) &= q_5(x_1, x_2) \wedge q_8(x_1, x_2);\\
q_4(x_1, x_2) &= q_6(x_1, x_2) \wedge q_8(x_1, x_2);\\
q_7(x_1, x_2) &= q_8(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1).
\end{aligned}
$$

10) $[C_{13} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [[\{q_2,\ q_6\}]_{p.p.} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [\{q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5,\ q_6,\ q_7,\ q_8,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_5$, так как

$$
\begin{aligned}
q_1(x_1, x_2) &= q_2(x_1, x_2) \wedge q_8(x_1, x_2);\\
q_3(x_1, x_2) &= q_6(x_1, x_2) \wedge q_8(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1);\\
q_4(x_1, x_2) &= q_6(x_1, x_2) \wedge q_8(x_1, x_2);\\
q_5(x_1, x_2) &= q_6(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1);\\
q_7(x_1, x_2) &= q_8(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1);\\
q_9(x_1, x_2) &= \exists y_1\, \exists y_2\, \big(q_2(x_1, y_2) \wedge q_8(y_2, y_1) \wedge q_8(y_1, x_1) \wedge\\
&\qquad \wedge q_2(y_1, x_2) \wedge q_8(y_1, x_2)\big);\\
q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1\, \big(q_2(x_1, y_1) \wedge q_8(y_1, x_2)\big).
\end{aligned}
$$

11) $[C_{14} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [[\{q_1,\ q_2,\ q_6\}]_{p.p.} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [\{q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5,\ q_6,\ q_7,\ q_8,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_5$, так как

$$
\begin{aligned}
q_3(x_1, x_2) &= q_6(x_1, x_2) \wedge q_8(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1);\\
q_4(x_1, x_2) &= q_6(x_1, x_2) \wedge q_8(x_1, x_2);\\
q_5(x_1, x_2) &= q_6(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1);\\
q_7(x_1, x_2) &= q_8(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1);\\
q_9(x_1, x_2) &= \exists y_1\, \exists y_2\, \big(q_1(y_1, x_1) \wedge q_8(y_2, y_1) \wedge\\
&\qquad \wedge q_1(y_2, x_2) \wedge q_8(y_1, x_2)\big);\\
q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1\, \big(q_2(x_1, y_1) \wedge q_8(y_1, x_2)\big).
\end{aligned}
$$

12) $[C_{15} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [[\{q_7\}]_{p.p.} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [\{q_7,\ q_8\}]_{p.p.} = C_{18}$.

13) $[C_{17} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [[\{q_2,\ q_7,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [\{q_1,\ q_2,\ q_7,\ q_8,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_{16}$, так как

$$
q_1(x_1, x_2) = q_2(x_1, x_2) \wedge q_8(x_1, x_2).
$$

Таким образом, $Classes(8) = \{C_1, C_2, \ldots, C_{19}\}$.

5.9. Добавление предиката q_9

1) $[C_1 \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [[\varnothing]_{p.p.} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [\{q_9\}]_{p.p.} = C_{20}$.

2) $[C_2 \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [[\{q_1,\ q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [\{q_1,\ q_2,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_{21}$, так как

$$q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1 \left(q_1(x_1, y_1) \wedge q_9(y_1, x_2)\right).$$

3) $[C_3 \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [[\{q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [\{q_2,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_{22}$, так как

$$q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1 \left(q_2(x_1, y_1) \wedge q_9(y_1, x_2)\right).$$

4) $[C_4 \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [[\{q_3,\ q_7\}]_{p.p.} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [\{q_3,\ q_7,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_{23}$, так как

$$q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1 \left(q_9(x_1, y_1) \wedge q_3(y_1, x_2)\right).$$

5) $[C_7 \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [[\{q_4\}]_{p.p.} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [\{q_4,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_{24}$, так как

$$q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1 \left(q_4(x_1, y_1) \wedge q_9(y_1, x_2)\right).$$

6) $[C_8 \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [[\{q_1,\ q_2,\ q_4,\ q_6\}]_{p.p.} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [\{q_1,\ q_2,\ q_4,\ q_6,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_{25}$, так как

$$q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1 \left(q_1(x_1, y_1) \wedge q_9(y_1, x_2)\right).$$

7) $[C_9 \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [[\{q_3,\ q_4,\ q_7,\ q_8\}]_{p.p.} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [\{q_3,\ q_4,\ q_7,\ q_8,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_{26}$, так как

$$q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1 \left(q_9(x_1, y_1) \wedge q_3(y_1, x_2)\right).$$

8) $[C_{13} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [[\{q_2,\ q_6\}]_{p.p.} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [\{q_2,\ q_6,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_{27}$, так как

$$q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1 \left(q_2(x_1, y_1) \wedge q_9(y_1, x_2)\right).$$

9) $[C_{14} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [[\{q_1, q_2, q_6\}]_{p.p.} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_6, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{28}$, так как

$$q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1 \left(q_1(x_1, y_1) \wedge q_9(y_1, x_2)\right).$$

10) $[C_{15} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [[\{q_7\}]_{p.p.} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [\{q_7,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_{29}$, так как

$$q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1 \big(q_9(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2)\big).$$

11) $[C_{18} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [[\{q_7,\ q_8\}]_{p.p.} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [\{q_7,\ q_8,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_{30}$, так как

$$q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1 \big(q_9(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2)\big).$$

12) $[C_{19} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [[\{q_3, q_7, q_8\}]_{p.p.} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [\{q_3, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{31}$, так как

$$q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1 \big(q_9(x_1, y_1) \wedge q_3(y_1, x_2)\big).$$

Таким образом, $Classes(9) = \{C_1, C_2, \ldots, C_{31}\}$.

5.10. Добавление предиката q_{10}

1) $[C_1 \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [[\varnothing]_{p.p.} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [\{q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_{32}$, так как

$$q_9(x_1, x_2) = q_{10}(x_1, x_2) \wedge q_{10}(x_2, x_1).$$

2) $[C_2 \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [[\{q_1,\ q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [\{q_1,\ q_2,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_{21}$, так как

$$q_9(x_1, x_2) = q_{10}(x_1, x_2) \wedge q_{10}(x_2, x_1).$$

3) $[C_3 \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [[\{q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [\{q_2,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_{22}$, так как

$$q_9(x_1, x_2) = q_{10}(x_1, x_2) \wedge q_{10}(x_2, x_1).$$

4) $[C_4 \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [[\{q_3,\ q_7\}]_{p.p.} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [\{q_3,\ q_7,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_{23}$, так как

$$q_9(x_1, x_2) = q_{10}(x_1, x_2) \wedge q_{10}(x_2, x_1).$$

5) $[C_7 \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [[\{q_4\}]_{p.p.} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [\{q_4,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_{24}$, так как

$$q_9(x_1, x_2) = q_{10}(x_1, x_2) \wedge q_{10}(x_2, x_1).$$

6) $[C_8 \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [[\{q_1,\ q_2,\ q_4,\ q_6\}]_{p.p.} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [\{q_1,\ q_2,\ q_4,\ q_6,$ $q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_{25}$, так как

$$q_9(x_1, x_2) = q_{10}(x_1, x_2) \wedge q_{10}(x_2, x_1).$$

7) $[C_9 \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [[\{q_3,\ q_4,\ q_7,\ q_8\}]_{p.p.} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [\{q_3,\ q_4,\ q_7,\ q_8,$ $q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_{26}$, так как

$$q_9(x_1, x_2) = q_{10}(x_1, x_2) \wedge q_{10}(x_2, x_1).$$

8) $[C_{10} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [[\{q_5,\ q_9\}]_{p.p.} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [\{q_5,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_{33}$.

9) $[C_{13} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [[\{q_2, q_6\}]_{p.p.} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [\{q_2, q_6, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{27}$, так как

$$q_9(x_1, x_2) = q_{10}(x_1, x_2) \wedge q_{10}(x_2, x_1).$$

10) $[C_{14} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [[\{q_1, q_2, q_6\}]_{p.p.} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_6, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} =$ $= C_{28}$, так как

$$q_9(x_1, x_2) = q_{10}(x_1, x_2) \wedge q_{10}(x_2, x_1).$$

11) $[C_{15} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [[\{q_7\}]_{p.p.} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [\{q_7,\ q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_{29}$, так как

$$q_9(x_1, x_2) = q_{10}(x_1, x_2) \wedge q_{10}(x_2, x_1).$$

12) $[C_{18} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [[\{q_7, q_8\}]_{p.p.} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [\{q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{30}$, так как

$$q_9(x_1, x_2) = q_{10}(x_1, x_2) \wedge q_{10}(x_2, x_1).$$

13) $[C_{19} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [[\{q_3, q_7, q_8\}]_{p.p.} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [\{q_3, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} =$ $= C_{31}$, так как

$$q_9(x_1, x_2) = q_{10}(x_1, x_2) \wedge q_{10}(x_2, x_1).$$

14) $[C_{20} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [[\{q_9\}]_{p.p.} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [\{q_9,\ q_{10}\}]_{p.p.} = C_{32}$.

Таким образом, $Classes(10) = \{C_1, C_2, \ldots, C_{33}\}$.

6. Доказательство леммы 3

На втором шаге доказательства (раздел 2) мы показали, что клонов трёхзначной логики, содержащих функции 0, 1, 2, min, max, не более чем 33. При этом каждый такой клон является классом сохранения множества предикатов $\pi(v)$ для некоторой вершины v диаграммы 1. Для завершения доказательства основной теоремы нам нужно показать, что различные вершины диаграммы определяют различные клоны, т. е. если v', v'' — две различные вершины диаграммы 1, то

$$Pol(\pi(v')) \neq Pol(\pi(v'')).$$

Для того чтобы доказать этот факт, мы укажем список функций $f_1, \ldots, f_9$, таких что для различных вершин v', v''

$$\big(Pol(v') \cap \{f_1, \ldots, f_9\}\big) \neq \big(Pol(v'') \cap \{f_1, \ldots, f_9\}\big).$$

Пусть $f_1, \ldots, f_9$ — одноместные функции трёхзначной логики, определённые следующим образом:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$	$f_7(x)$	$f_8(x)$	$f_9(x)$
0	1	1	2	0	2	0	2	0	1
1	0	1	1	0	2	0	1	2	2
2	0	0	0	1	1	2	2	2	2

В следующей таблице для каждой вершины v диаграммы символом «+» отмечены те и только те из функций $f_1, \ldots, f_9$, которые сохраняют все предикаты из $\pi(v)$. Как можно видеть, у любых двух различных строк таблицы множества функций, помеченных символом «+», различаются, что завершает доказательство леммы 3.

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9
v_1	+	+	+	+	+	+	+	+	+
v_2		+		+	+	+			
v_3	+	+		+	+	+			
v_4	+						+	+	+
v_5									
v_6	+								
v_7				+		+		+	+
v_8				+		+			
v_9								+	+
v_{10}		+	+				+		
v_{11}		+							
v_{12}							+		
v_{13}	+	+		+		+			
v_{14}		+		+		+			
v_{15}	+				+		+	+	+
v_{16}					+				
v_{17}	+				+				
v_{18}					+		+	+	+
v_{19}							+	+	+
v_{20}	+	+	+	+	+		+		+
v_{21}		+		+	+				
v_{22}	+	+		+	+				
v_{23}	+						+		+
v_{24}				+					+
v_{25}				+					
v_{26}									+
v_{27}	+	+		+					
v_{28}		+		+					
v_{29}	+				+		+		+
v_{30}					+		+		+
v_{31}							+		+
v_{32}	+	+		+	+		+		+
v_{33}		+					+		

Благодарности

Автор выражает благодарность к. ф.-м. н. Жуку Дмитрию Николаевичу за внимание к работе и полезные замечания.

Список литературы

[1] Geiger D. Closed systems of functions and predicates. Pacific journal of mathematics. 1968 Oct 1; 27(1), 95-100.

[2] Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А. Теория Галуа для алгебр Поста. Кибернетика. 1969. №3. с. 1—10 (часть I); №5. с. 1—9 (часть II).

[3] Baker K. A., Pixley A. F. Polynomial interpolation and the Chinese remainder theorem for algebraic systems. Math. Zeitschrift 143 (1975), 165-174.

The lattice of all clones on the three-element set containing functions 0, 1, 2, *min*, *max*

Moiseev S. V.

This paper describes the lattice of all clones on the three-element set that contain all constant functions $0, 1, 2$ and functions min, max. The clones are characterized as sets of predicates being preserved by them.

Keywords: clone theory, lattice of clones, three-valued logic.