О языках, устойчивых относительно операций выпадения, вставки

Дергач П.С.

В статье изучаются операции выпадения/вставки, продвижением которых занимался В. И. Левенштейн. Ставятся и даются ответы на следующие два вопроса. Какие регулярные языки устойчивы относительно операций выпадения/вставки? Существуют ли нерегулярные языки, которые устойчивы относительно операций выпадения/вставки?

Ключевые слова: операции выпадения и вставки, замкнутый класс, регулярный язык.

Введение

В статье изучаются операции выпадения/вставки, продвижением которых занимался В. И. Левенштейн [1]. Ставятся и даются ответы на следующие два вопроса. Какие регулярные языки устойчивы относительно операций выпадения/вставки? Существуют ли нерегулярные языки, которые устойчивы относительно операций выпадения/вставки? О решении похожих проблем можно прочитать в статьях [2-9]. О других аспектах исследований автора и других ученых в смежных областях к тематике данной работы можно прочитать в [10-21]. В дальнейшем планируется продолжить исследование полученного класса замкнутых относительно операций выпадения/вставки языков применительно к проблеме однозначности алфавитного декодирования.

Основные определения и результаты

Множество конечных слов в алфавите A обозначаем через A^*. Пустое слово Λ по умолчанию тоже лежит в A^*.

Множество натуральных чисел обозначаем через $\mathbb{N}$, а целых неотрицательных чисел — через $\mathbb{N}_0$.

Множество всех регулярных языков в алфавите A обозначаем через $R(A)$.

Для произвольного $\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_s} \in A^*$ обозначаем

$$in(\alpha) := A^* a_{i_1} A^* a_{i_2} A^* \ldots A^* a_{i_s} A^*.$$

Пусть $a \in A$, $\alpha_1, \alpha_2 \in A^*$. Говорим, что слово $\alpha_1 a \alpha_2$ *получено операцией вставки* из слова $\alpha_1\alpha_2$. Говорим, что слово $\alpha_1\alpha_2$ *получено операцией выпадения* из слова $\alpha_1 a \alpha_2$.

Пусть $\alpha \in A^*$. Вводим индуктивно при $k \in \mathbb{N}_0$ множества $[\alpha]_{in}^k$:

$$[\alpha]_{in}^0 := \{\alpha\},$$

$$[\alpha]_{in}^k := \{\alpha_1 a \alpha_2 \mid \alpha_1\alpha_2 \in [\alpha]_{in}^{k-1}, a \in A, \alpha_1, \alpha_2 \in A^*\}.$$

Аналогично, при $k \in \mathbb{N}_0$ вводим множества $[\alpha]_{out}^k$:

$$[\alpha]_{out}^0 := \{\alpha\},$$

$$[\alpha]_{out}^k := \{\alpha_1\alpha_2 \mid \alpha_1 a \alpha_2 \in [\alpha]_{out}^{k-1}, a \in A, \alpha_1, \alpha_2 \in A^*\}.$$

Обозначаем

$$[\alpha]_{in} = \bigcup_{k=0}^{\infty} [\alpha]_{in}^k,$$

$$[\alpha]_{out} = \bigcup_{k=0}^{\infty} [\alpha]_{out}^k.$$

Замечание 1. Множество $[\alpha]_{in}$ всегда бесконечно, а множество $[\alpha]_{out}$ всегда конечно.

Для любого множества $P \subset A^*$ вводим обозначения

$$[P]_{in} := \bigcup_{\alpha \in P} [\alpha]_{in},$$

$$[P]_{out} := \bigcup_{\alpha \in P} [\alpha]_{out}.$$

Замечание 2. Если $\alpha \in P$, то

$$[\alpha]_{in} \subseteq [P]_{in},\ [\alpha]_{out} \subseteq [P]_{out}.$$

Замечание 3. Если $P \subseteq A^*$, то

$$[[P]_{in}]_{in} = [P]_{in},\ [[P]_{out}]_{out} = [P]_{out}.$$

Теорема 1. *Пусть* $P \in R(A)$. *Тогда*

$$P = [P]_{in} \Longleftrightarrow P = \bigcup_{\alpha \in T} in(\alpha),$$

где T *— произвольное конечное множество слов в алфавите* A.

Теорема 2. *Пусть* $P \in R(A)$. *Тогда*

$$P = [P]_{out} \Longleftrightarrow P = \bigcup_{i=1}^{k} [\alpha_{i,1}]_{out} \cdot (A_{i,1})^* \ldots (A_{i,s(i)})^* \cdot [\alpha_{i,s(i)+1}]_{out},$$

где $k \in \mathbb{N},\ s(i) \in \mathbb{N}_0,\ \alpha_{i,j} \in A^*,\ A_{i,j} \subseteq A$.

Теорема 3. *Пусть* $P \subseteq A^*$. *Тогда* $[P]_{in} \in R(A)$.

Теорема 4. *Пусть* $P \subseteq A^*$. *Тогда* $[P]_{out} \in R(A)$.

Доказательство вспомогательных утверждений

Лемма 1. *Для любого* $\alpha \in A^*$ *верно, что* $in(\alpha) = [\alpha]_{in}$.
Доказательство.
По определению верно, что

$$in(\alpha) := A^* a_{i_1} A^* a_{i_2} A^* \dots A^* a_{i_s} A^*, \tag{1}$$

$$[\alpha]_{in} = \bigcup_{k=0}^{\infty} [\alpha]_{in}^k. \tag{2}$$

Замечаем, что множество (2) — множество всех слов, которые можно получить из слова α конечным количеством применений операции вставки. Но множество (1) как раз и состоит из таких слов.

■

Лемма 2. *Для любых* $P_1, P_2 \subseteq A^*$ *верно, что* $[P_1 \cdot P_2]_{in} = [P_1]_{in} \cdot [P_2]_{in}$.
Доказательство.

Возьмем произвольное слово α из множества $[P_1 \cdot P_2]_{in}$. Оно получается конечным количеством применений операции вставки в какое-то слово из $P_1 \cdot P_2$, то есть слово вида $\alpha_1 \cdot \alpha_2$, где $\alpha_1 \in P_1$, $\alpha_2 \in P_2$. Тогда слово α можно разбить на две части — префикс, содержащий в качестве подслова слово α_1 и постфикс, содержащий в качестве подслова слово α_2. Значит $[P_1 \cdot P_2]_{in} \subseteq [P_1]_{in} \cdot [P_2]_{in}$.

Возьмем теперь произвольное слово α из множества $[P_1]_{in} \cdot [P_2]_{in}$. Это слово представимо в виде $\alpha_1 \cdot \alpha_2$, где α_1 получается конечным количеством применений операции вставки в какое-то слово α_1' из P_1, а α_2 — конечным количеством применений операции вставки в какое-то слово α_2' из P_2. Но тогда слово $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$ можно получить конечным количеством применений операции вставки в слово $\alpha_1' \alpha_2' \in P_1 \cdot P_2$. Значит $[P_1]_{in} \cdot [P_2]_{in} \subseteq [P_1 \cdot P_2]_{in}$.

■

Лемма 3. *Для любого* $P \subseteq A^*$ *верно, что* $[P^*]_{in} = A^*$.
Доказательство.

Результат очевидно вытекает из того факта, что $\Lambda \in P^*$ и любое слово в алфавите A может быть получено из Λ конечным количеством применений операции вставки.

$\blacksquare$

Лемма 4. *Для любых* $P_1, P_2 \subseteq A^*$ *верно* $[P_1 \cdot P_2]_{out} = [P_1]_{out} \cdot [P_2]_{out}$.

Доказательство.

Возьмем произвольное слово α из множества $[P_1 \cdot P_2]_{out}$. Оно получается конечным количеством применений операции выпадения из какого-то слова в $P_1 \cdot P_2$, то есть слова вида $\alpha_1 \cdot \alpha_2$, где $\alpha_1 \in P_1$, $\alpha_2 \in P_2$. Тогда α можно разбить на две части — префикс, являющийся подсловом α_1 и постфикс, являющийся подсловом слова α_2. Отсюда получаем, что $[P_1 \cdot P_2]_{out} \subseteq [P_1]_{out} \cdot [P_2]_{out}$.

Возьмем теперь произвольное слово α из множества $[P_1]_{out} \cdot [P_2]_{out}$. Это слово представимо в виде $\alpha_1 \cdot \alpha_2$, где α_1 является подсловом какого-то слова α_1' из P_1, а α_2 — подсловом какого-то слова α_2' из P_2. Но тогда слово $\alpha = \alpha_1\alpha_2$ будет подсловом слова $\alpha_1'\alpha_2' \in P_1 \cdot P_2$. Отсюда получаем, что $[P_1]_{out} \cdot [P_2]_{out} \subseteq [P_1 \cdot P_2]_{out}$.

$\blacksquare$

Лемма 5. *Для любого* $P \subseteq A^*$ *верно, что* $[P^*]_{out} = A_1^*$, *где* $A_1 \subseteq A$.

Доказательство.

В качестве множества A_1 возьмем все те буквы, которые встречаются хотя бы в одном слове из множества P. Понятно, что тогда $[P^*]_{out} \subseteq A_1^*$.

С другой стороны, для любого слова $\alpha = a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_s} \in A_1^*$ обозначим через $\alpha_1 \in P$ слово, содержащее букву a_{i_1}, через $\alpha_2 \in P$ — слово, содержащее букву a_{i_2}, ..., через $\alpha_s \in P$ — слово, содержащее букву a_{i_s}. Ясно, что тогда слово α является подсловом слова $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_s \in P^s \subseteq P^*$. Поэтому $A_1^* \subseteq [P^*]_{out}$.

$\blacksquare$

Лемма 6. *Пусть* $P \subseteq A^*$. *Тогда*

$$P = [P]_{out} \Longleftrightarrow A^* \setminus P = [A^* \setminus P]_{in}.$$

Доказательство.

Пусть $P = [P]_{out}$. Докажем от противного, что $A^* \setminus P = [A^* \setminus P]_{in}$. Если это не так, то найдется слово $\alpha \notin A^* \setminus P$ и его подслово $\beta \in A^* \setminus P$. Это означает, что $\alpha \in P$, $\beta \notin P$. Но, в силу замечания 2, выполнено

$$\beta \in [\alpha]_{out} \subseteq [P]_{out} = P.$$

Получили противоречие. Аналогично доказывается в обратную сторону.

■

Лемма 7. *В A^* не существует счетного множества слов, попарно невложенных друг в друга.*

Доказательство.

Прежде всего, поясним, что под вложенностью слов друг в друга здесь имеется ввиду тот факт, что одно слово является подсловом другого, то есть может быть получено из него конечным применением операции выпадения.

Будем доказывать утверждение от противного. Если $|A| = 1$, то любые два слова в таком алфавите попарно вложимы и утверждение очевидно.

Разберем случай, когда $|A| = 2$. Пусть есть счетное семейство

$$T = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$$

слов в алфавите $\{0, 1\}$, попарно невложенных друг в друга. Обозначаем $\beta = \alpha_1$. Пусть $\beta = b(1)b(2)\ldots b(k)$. Разбиваем множество $T \setminus \{\beta\}$ на следующие непересекающиеся подмножества $T_1, \ldots, T_k$. T_1 содержит те и только те слова из T, в которых нет однобуквенного подслова $b(1)$. T_2 содержит те и только те слова из T, в которых есть однобуквенное подслово $b(1)$, но нет двухбуквенного подслова $b(1)b(2)$. И так далее до множества T_k, которое содержит те и только те слова из T, в которых есть подслово $b(1)b(2)\ldots b(k-1)$, но нет подслова $b(1)b(2)\ldots b(k) = \beta$. Последнее ограничение, впрочем, всегда верно для слов из $T \setminus \{\beta\}$, так как слова из T все попарно невложены друг в друга. Так как множество T счетно, то и хотя бы одно из множеств T_i счетно. Теперь сделаем одно очень важное замечание:

$$T_i \subseteq (A\setminus\{b(1)\})^* b(1)(A\setminus\{b(2)\})^* b(2)\ldots(A\setminus\{b(i-1)\})^* b(i-1)(A\setminus\{b(i)\})^*.$$

Итак, у нас есть счетное множество слов T_i из множества

$$(A\setminus\{b(1)\})^* b(1)(A\setminus\{b(2)\})^* b(2)\ldots(A\setminus\{b(i-1)\})^* b(i-1)(A\setminus\{b(i)\})^*, \quad (3)$$

которые попарно невложены друг в друга. Каждое из этих слов вполне естественным образом можно тогда представить в виде

$$\beta(1)b(1)\beta(2)b(2)\ldots\beta(i-1)b(i-1)\beta(i), \quad (4)$$

где в $\beta(j)$ нет буквы $b(j)$ при всех $1 \leq j \leq i$. Но алфавит A двухэлементный, поэтому все слова $\beta(j)$ в этом представлении состоят из многократно повторенного символа 0 или символа 1. Это означает, что для каждого из слов в T_i соответствующие им слова $\beta(j)$ все попарно вложимы друг в друга при любом фиксированном $1 \le j \le i$. Зафиксируем какое-нибудь слово $\gamma \in T_i$:

$$\gamma = \gamma(1)b(1)\gamma(2)b(2)\dots\gamma(i-1)b(i-1)\gamma(i).$$

Здесь, как и ранее, в $\gamma(j)$ нет символа $b(j)$ при $1 \le j \le i$. Пройдемся для всех остальных слов из $T_i \setminus \{\gamma\}$ по их словам $\beta(1)$ в первой позиции. Возможны два случая: либо это слово $\beta(1)$ содержит слово $\gamma(1)$, либо, наоборот, содержится в слове $\gamma(1)$. Всего слов в $T_i \setminus \{\gamma\}$ счетно, поэтому возможны два случая. В первом случае в T_i существует бесконечное количество слов, у которых $\beta(1)$ лежит в $\gamma(1)$. Тогда, в силу замечания 1, вариантов того, кем могут быть эти $\beta(1)$ лишь конечное количество. Значит в T_i можно выделить бесконечное подмножество слов с одинаковым словом $\beta(1)$ по первой позиции. В этом случае любое из этих слов возьмем за новое γ и повторим рассуждение для второй позиции. Во втором случае лишь конечное количество слов из T_i может по первой позиции лежать в $\gamma(1)$. Тогда в T_i существует бесконечное подмножество, в котором все слова по первой позиции содержат $\gamma(1)$. Так или иначе, мы нашли в T_i счетное подмножество, все слова из которого по первой позиции содержат $\gamma(1)$. После этого повторяем рассуждение для второй позиции. При этом слово γ может измениться, но свойство первой позиции о том, что там в качестве подслова есть $\gamma(1)$, сохраняется. Проведя это рассуждение по всем позициям, получаем счетное семейство слов, в каждой позиции в которых содержатся как подслова соответствующие части слова γ. Это противоречит попарной невложенности слов в нашем семействе. Для случая $|A| = 2$ утверждение доказано.

Теперь обобщим это рассуждение на случай, когда $|A| > 2$. Опять же, берем счетное семейство попарно невложенных слов T. Выбираем в нем слово $\beta = b(1)b(2)\dots b(k)$. Разбиваем множество T на множества $T_1, \dots, T_k$. Выбираем счетное T_i. Каждое из слов в T_i представляем в виде

$$\beta(1)b(1)\beta(2)b(2)\dots\beta(i-1)b(i-1)\beta(i),$$

где в $\beta(j)$ нет буквы $b(j)$ при всех $1 \le j \le i$. Разделяем эти слова на позиции. Фиксируем какое-то слово $\gamma \in T_i$ и сравниваем другие слова с γ по соответствующим позициям. По каждой из позиций возможны три варианта. Либо существует бесконечное количество слов в T_i, которые являются подсловом позиции в γ, либо существует бесконечное количество слов в T_i, которые содержат подслово позиции в γ, либо существует бесконечное количество слов в T_i, которые несравнимы с γ по этой позиции. В первом и втором случае поступаем со словом γ и множеством T_i точно также, как и в случае $|A| = 2$. Для этих случаев теперь считаем, что соответствующие позиции в словах содержат подслово позиции из γ. Рассмотрим теперь позиции, в которых реализуется третий случай. Если таких позиций нет, то рассуждение закончено. Если такие позиции есть, то сделаем с каждой из них следующее. Обозначаем через $\hat{T}$ множество слов в позиции. Мы знаем, что они не сравнимы со словом из этой же позиции, которое стоит в слове γ. Обозначаем его за $\hat{\beta}$. Так же, как и для слова β мы разбивали T на $T_1, \ldots, T_k$, разбиваем теперь для слова $\hat{\beta}$ множество $\hat{T}$ на $\hat{T_1}, \ldots, \hat{T_m}$, где m — длина слова $\hat{\beta}$. Выбираем какое-нибудь бесконечное $\hat{T_i}$, вкладываем его в множество, по виду аналогичное (3) и разбиваем слова из $\hat{T_i}$ на позиции, как это было сделано в (4). Таким образом, слова позиций, в которых реализуется третий случай, мы разбили на подпозиции. Очень важным при этом является то, что по каждой отдельной подпозиции количество букв, которые могут встретиться в словах этой подпозиции, уменьшилось при этом на 1 и теперь не превосходит $|A|-2$. Теперь можно к каждой из новых подпозиций применить снова деление на три случая и все дальнейшие манипуляции с этими подпозициями (для первого и второго случаев — замена γ и T_i, а для третьего случая — разбиение слов на подпозиции с меньшими по мощностям алфавитами). Поскольку мощность алфавита A конечна, то рассуждение в итоге сведется к уже рассмотренному случаю $|A| = 2$.

$\blacksquare$

Доказательство основных утверждений

Теорема 1. *Пусть* $P \in R(A)$*. Тогда*

$$P = [P]_{in} \Longleftrightarrow P = \bigcup_{\alpha \in T} in(\alpha),$$

где T *— произвольное конечное множество слов в алфавите* A*.*

Доказательство.

Пусть T — произвольное конечное множество слов в алфавите A. Для произвольного $\alpha \in T$ из определения (1) для множества $in(\alpha)$ ясно, что оно регулярно. Но тогда и множество

$$P := \bigcup_{\alpha \in T} in(\alpha),$$

как конечное объединение регулярных множеств, является регулярным. При этом верно, что

$$[P]_{in} = \left[\bigcup_{\alpha \in T} in(\alpha) \right]_{in} = \bigcup_{\alpha \in T} [in(\alpha)]_{in} \overset{*}{=} \bigcup_{\alpha \in T} in(\alpha) = P.$$

Равенство $\overset{*}{=}$ здесь является тривиальным следствием лемм 1,2 и 3.

В другую сторону, из теории регулярных языков хорошо известно (этот факт легко доказывается индукцией по длине вывода), что любой регулярный язык $P \in R(A)$ представим в виде

$$P = \bigcup_{i=1}^{k} \alpha_{i,1} \cdot (P_{i,1})^* \cdot \alpha_{i,2} \cdot (P_{i,2})^* \ldots (P_{i,s(i)})^* \cdot \alpha_{i,s(i)+1},$$

где $k \in \mathbb{N}$, $s(i) \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_{i,j} \in A^*$, $P_{i,j} \in R(A)$. Применяя леммы 1,2,3, получаем:

$$P = [P]_{in} =$$

$$= \bigcup_{i=1}^{k} [\alpha_{i,1}]_{in} \cdot [(P_{i,1})^*]_{in} \cdot [\alpha_{i,2}]_{in} \cdot [(P_{i,2})^*]_{in} \ldots \left[(P_{i,s(i)})^*\right]_{in} \cdot [\alpha_{i,s(i)+1}]_{in} =$$

$$= \bigcup_{i=1}^{k} in(\alpha_{i,1}) \cdot A^* \cdot in(\alpha_{i,2}) \cdot A^* \ldots A^* \cdot in(\alpha_{i,s(i)+1}) =$$

$$= \bigcup_{i=1}^{k} in(\alpha_{i,1} \cdot \alpha_{i,2} \cdot \ldots \cdot \alpha_{i,s(i)+1}).$$

Теорема доказана.

$\blacksquare$

Теорема 2. *Пусть* $P \in R(A)$. *Тогда*

$$P = [P]_{out} \Longleftrightarrow P = \bigcup_{i=1}^{k} [\alpha_{i,1}]_{out} \cdot (A_{i,1})^* \dots (A_{i,s(i)})^* \cdot [\alpha_{i,s(i)+1}]_{out},$$

где $k \in \mathbb{N}$, $s(i) \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_{i,j} \in A^*$, $A_{i,j} \subseteq A$.

Доказательство.

Пусть

$$P = \bigcup_{i=1}^{k} [\alpha_{i,1}]_{out} \cdot (A_{i,1})^* \dots (A_{i,s(i)})^* \cdot [\alpha_{i,s(i)+1}]_{out},$$

где $k \in \mathbb{N}$, $s(i) \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_{i,j} \in A^*$, $A_{i,j} \subseteq A$. В силу замечания 2, множества $[\alpha_{i,j}]_{out}$ конечны, а это означает, что $P \in R(A)$. Кроме того, из лемм 4 и 5 получаем

$$[P]_{out} = \left[\bigcup_{i=1}^{k} [\alpha_{i,1}]_{out} \cdot (A_{i,1})^* \dots (A_{i,s(i)})^* \cdot [\alpha_{i,s(i)+1}]_{out} \right]_{out} =$$

$$= \bigcup_{i=1}^{k} [[\alpha_{i,1}]_{out}]_{out} \cdot [(A_{i,1})^*]_{out} \dots [(A_{i,s(i)})^*]_{out} \cdot [[\alpha_{i,s(i)+1}]_{out}]_{out} =$$

$$= [\alpha_{i,1}]_{out} \cdot (A_{i,1})^* \dots (A_{i,s(i)})^* \cdot [\alpha_{i,s(i)+1}]_{out} = P.$$

В другую сторону. Мы знаем, что любой регулярный язык $P \in R(A)$ представим в виде

$$P = \bigcup_{i=1}^{k} \alpha_{i,1} \cdot (P_{i,1})^* \cdot \alpha_{i,2} \cdot (P_{i,2})^* \dots (P_{i,s(i)})^* \cdot \alpha_{i,s(i)+1},$$

где $k \in \mathbb{N}$, $s(i) \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_{i,j} \in A^*$, $P_{i,j} \in R(A)$. Применяя леммы 4,5, получаем:

$$P = [P]_{out} =$$

$$= \bigcup_{i=1}^{k} [\alpha_{i,1}]_{out} \cdot [(P_{i,1})^*]_{out} \cdot [\alpha_{i,2}]_{out} \cdot [(P_{i,2})^*]_{out} \dots \left[(P_{i,s(i)})^*\right]_{out} \cdot [\alpha_{i,s(i)+1}]_{out} =$$

$$= \bigcup_{i=1}^{k} [\alpha_{i,1}]_{out} \cdot (A_{i,1})^* \dots (A_{i,s(i)})^* \cdot [\alpha_{i,s(i)+1}]_{out},$$

где $A_{i,j}$ — некоторые подмножества алфавита A. Теорема доказана.

■

Теорема 3. *Пусть* $P \subseteq A^*$. *Тогда* $[P]_{in} \in R(A)$.

Доказательство.

Рассматриваем множество X всех минимальных по вложению слов языка P, то есть таких слов, которые есть в P, но никаких их собственных подслов в P нет. Из леммы 7 следует, что это множество конечно, так как любые два минимальных по вложению слова не могут быть вложены друг в друга. Заметим, что

$$[P]_{in} = \bigcup_{\alpha \in X} [\alpha]_{in}. \tag{5}$$

Вложимость правого множества в левое очевидна. А вложимость левого множества в правое следует из того факта, что любое слово из $[P]_{in}$ можно получить конечным количеством применений операции вставки из какого-нибудь слова из P. Но любое слово α из P, в свою очередь, содержит в себе хотя бы одно минимальное подслово из множества X и может быть получено из него конечным количеством применений операции вставки. Таким образом, равенство (5) доказано. Но, в силу леммы 1, множество $[\alpha]_{in}$ регулярно. А мы знаем, что конечное объединение регулярных множеств тоже регулярно. Теорема доказана.

■

Теорема 4. *Пусть* $P \subseteq A^*$. *Тогда* $[P]_{out} \in R(A)$.

Доказательство.

В силу замечания 3,

$$[P]_{out} = [[P]_{out}]_{out}.$$

Из леммы 6 получаем

$$A^* \setminus [P]_{out} = [A^* \setminus [P]_{out}]_{in}.$$

Из утверждения теоремы 3 следует, что тогда $A^* \setminus [P]_{out} \in R(A)$. Но дополнение к регулярному множеству регулярно. Теорема доказана.

■

Список литературы

[1] В. И. Левенштейн. *О Двоичные коды с исправлением выпадений и вставок символа 1.* Пробл. передачи информ., 1965. Т.1, вып. 1, М., Сс. 12-25.

[2] П. С. Дергач. *О каноническом регулярном представлении S-тонких языков.* Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 211-242.системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 211-242.

[3] П. С. Дергач. *О проблеме вложения допустимых классов.* Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 2, М., Сс. 143-174.

[4] П. С. Дергач, Э. С. Айрапетов. *О прогрессивном разбиении некоторых подмножеств натурального ряда.* Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 3, М., Сс. 79-86.

[5] П. С. Дергач. *О двух размерностях спектров тонких языков.* Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 3, М., Сс. 155-174.

[6] П. С. Дергач, Э. С. Айрапетов. *О прогрессивном разбиении последовательности натуральных чисел, имеющей пропуск длины 2.* Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 67-86.

[7] П. С. Дергач, Е. Д. Данилевская. *О покрытиях и разбиениях натуральных чисел, имеющих два последовательных пропуска длины 1.* Интеллектуальные системы, 2017. Т.21, вып. 1, М., Сс.192-237.

[8] П. С. Дергач. *О структуре вложения прогрессивных множеств сложности два.* Интеллектуальные системы, 2017. Т.21, вып. 2, М., Сс.117-162.

[9] П. С. Дергач, Ж. И. Раджабов. *О длине минимальной алфавитной склейки для класса линейных регулярных языков.* Интеллектуальные системы, 2017. Т.21, вып. 3, М., Сс.120-130.

[10] Д. Е. Александров. *Эффективные методы реализации проверки содержания сетевых пакетов регулярными выражениями.* Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 37-60.

[11] Д. Н. Бабин. *Частотные регулярные языки.* Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 205-210.

[12] Д. Е. Александров. *Об оценках автоматной сложности распознавания классов регулярных языков*. Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 4, М., Сс. 161-190.

[13] В. М. Дементьев. *О звездной высоте регулярного языка и циклической сложности минимального автомата.* Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 4, М., Сс. 215-222.

[14] И. Е. Иванов. *О сохранении периодических последовательностей автоматами с магазинной памятью с однобуквенным магазином.* Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 1, М., Сс. 145-160.

[15] А. А. Петюшко. *О контекстно-свободных биграмных языках.* Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 2, М., Сс. 187-208.

[16] И. Е. Иванов. *Нижняя оценка на максимальную длину периода выходной последовательности автономного автомата с магазинной памятью.* Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 3, М., Сс. 175-194.

[17] В. А. Орлов. *О конечных автоматах с максимальной степенью различимости состояний.* Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 1, М., Сс. 213-222.

[18] П. С. Дергач. *О проблеме проверки однозначности алфавитного декодирования в классе регулярных языков с полиномиальной функцией роста.* Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 147-202.

[19] А. М. Миронов. *Основные понятия теории вероятностных автоматов.* Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 283-330.

[20] А. А. Петюшко, Д. Н. Бабин. *Классификация Хомского для матриц биграммных языков.* Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 331-336.

[21] С. Б. Родин. *О связи линейно реализуемых автоматов и автоматов с максимальной вариативностью относительно кодирования состояний.* Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 337-348.

Сведения об авторах

Дергач Петр Сергеевич
Младший научный сотрудник МГУ имени М. В. Ломоносова
e-mail: dergachpes@mail.ru.

On languages that are stable to the drop/paste operations
Dergach P.S.

The article is devoted to the drop and paste operations, which have been promoted by V.I. Levenshtein. The following two questions are asked and answered. What is the class of regular languages that are stable to the drop/paste operations? Are there any irregular languages that are stable to these operations?

Keywords: drop and paste operations, closed class, regular language.