О нижней оценке максимального потенциала плоских схем с несколькими выходами через площадь

Калачев Г. В.

В статье исследуется связь между площадью и максимальным потенциалом плоских схем, реализующих булевы операторы. Максимальный потенциал — мера сложности плоских схем, отражающая энергопотребление схемы в худшем случае, его также часто называется активностью. Он равен максимальному числу выходов элементов схемы, равных 1, где максимум берётся по всем входным наборам схемы. В работе показано, что для произвольного булева оператора потенциал $\widehat{U}$ не меньше, чем $\sqrt{S}/4\sqrt{2}$, где S — площадь минимальной схемы, реализующей данный оператор.

Ключевые слова: клеточные схемы, активность, потенциал, связь мер сложности, нижние оценки, булевы операторы.

1. Введение

Плоская(клеточная) схема — это схема из функциональных элементов, уложенная на плоскость так, чтобы каждому входу и выходу соответствовала некоторая сторона клетки, в которой находится элемент. Таким образом, в такой схеме могут использоваться любые функциональные элементы, у которых в сумме не более четырёх контактов. Понятие клеточных схем ввёл Кравцов С.С. в работе [1] и показал, что порядок площади плоских схем, реализующих булевы функции от n переменных, равен 2^n.

В работе рассматривается максимальная мощность, выделяемая схемой. В работе [2] была введена мера мощности плоских схем — активность, и было показано, что дешифратор нельзя реализовать плоской схемой, одновременно оптимальной по площади и активности. В работе [3] была доказана нижняя оценка максимального потенциала булевых функций через их площадь.

В данной работе мы обобщим этот результат на случай частичных булевых операторов.

2. Определения и формулировка результата.

Формальное определение плоской схемы достаточно громоздкое, поэтому приведём неформальное определение[3]. *Плоской схемой* называется такая укладка схемы из функциональных элементов на плоскость, что каждый функциональный элемент помещается в ячейку целочисленной решётки на плоскости, чтобы его входы и выходы оказались на сторонах ячейки; при этом соединяющие провода также укладываются в свободные ячейки и моделируются цепочкой клеточных элементов, реализующих тождественные функции.

Чтобы сформулировать результаты, введем несколько определений. Рассмотрим плоскую схему K с n входами и n выходами. Входы схемы K, а также выходы всех ее элементов назовем *узлами* схемы K. Множество схем, реализующих оператор f обозначим $\mathrm{Impl}(f)$.

Площадью схемы K будем называть количество её элементов, будем обозначать эту величину $S(K)$.

Площадью булева оператора $f : \mathcal{D}' \to \{0,1\}^m$ назовём величину $S(f) := \min\limits_{K \in \mathrm{Impl}(f)} S(K)$, то есть площадь минимальной схемы, реализующей оператор f.

Потенциалом схемы K *на наборе* x назовем количество узлов схемы K, принимающих значение 1, когда на вход схемы подан набор x, будем обозначать эту величину $u_K(x)$.

Максимальным потенциалом схемы K на множестве $\mathcal{D} \subset \{0,1\}^n$ назовем величину $\widehat{U}_{\mathcal{D}}(K) = \max\limits_{x \in \mathcal{D}} u_K(x)$.

Максимальным потенциалом булева оператора $f : \mathcal{D}' \to \{0,1\}^m$ на множестве $\mathcal{D}$ назовём величину $\widehat{U}_{\mathcal{D}}(f) = \min\limits_{K \in \mathrm{Impl}(f)} \widehat{U}_{\mathcal{D}}(K)$. С случае $\mathcal{D} = \{0,1\}^n$ нижний индекс $\mathcal{D}$ у меры $\widehat{U}$ будем опускать.

Теорема 1. *Для любого оператора* $f : \mathcal{D} \to \{0,1\}^m$ *выполнено*

$$\widehat{U}(f) \succcurlyeq \frac{\sqrt{S(f)}}{4\sqrt{2}}.$$

[3] Формальное определение плоской схемы можно посмотреть, например, в [3].

Замечание. Заметим, что в теореме рассматривается максимальный потенциал на множестве всех наборов $\{0,1\}^n$, а не на области определения оператора f. Однако, в случае, когда есть выход оператора f, существенно зависящий от всех переменных, то работает доказательство, полностью аналогичное доказательству из [3], только участвующие в доказательстве наборы будут принадлежать множеству $\mathcal{D}$. В этом случае верна оценка:

$$\widehat{U}_{\mathcal{D}}(f) \succcurlyeq \frac{\sqrt{S(f)}}{4\sqrt{2}}.$$

3. Доказательство

Рассмотрим произвольный оператор $f : \mathcal{D} \to \{0,1\}^m$, у которого каждый выход отличен от константы и схему K, который реализует оператор f с наименьшим максимальным потенциалом (из всех схем с одинаковым потенциалом выберем схему с наименьшим количеством узлов).

При таком способе выбора схемы K все её входы соответствуют существенным переменным оператора f на множестве $\mathcal{D}$, иначе можно было бы удалить несущественный вход, уменьшив количество узлов схемы и не увеличив её максимальный потенциал. Также простым, но важным свойством схемы K является то, что каждый её узел зависит существенно от некоторого входа схемы, иначе он равен константе, и его можно удалить, уменьшив число узлов схемы. Поскольку базис мы никак не ограничиваем, то константный узел можно удалить, заменив соответствующим образом клеточный элемент, для которого этот узел является входом. По аналогии, каждый узел, являющийся входом некоторого элемента, является существенной переменной некоторого его выхода, иначе его также можно было бы удалить, уменьшив число узлов.

Без ограничения общности будем считать, что все оператор f существенно зависит от всех n переменных. По схеме K построим граф G_K с n вершинами следующим образом.

- Вершинами графа G_K являются входы схемы K.
- Входы x_i и x_j соединены ребром, если существует узел α_{ij} схемы K такой, что функция $\phi_{\alpha_{ij}}$, реализуемая в узле α_{ij} существенно зависит от x_i и x_j.

Случай связного графа G_K. Если граф G_K связен, достроим его до графа $\overline{G}_K$

- Найдём в схеме K два наиболее удалённых друг от друга узла β_1 и β_2.
- Добавим к графу G_K две дополнительные вершины β_1 и β_2.
- Соединим вершину β_i ($i \in \{1, 2\}$) ребром со всеми входами x_j, от которых ϕ_{β_i} существенно зависит.

Найдём в графе $\overline{G}_K$ кратчайший путь $\pi = [\beta_1, x_{i_1}, ..., x_{i_k}, \beta_2]$, соединяющий вершины β_1 и β_2. Без ограничения общности можно считать, что $i_1 < i_2 < ... < i_k$. Для краткости и единообразия переобозначим узлы $\alpha_{i_j i_{j+1}}$ за γ_j ($j = 1, ..., k-1$), а также положим $\gamma_0 = \beta_1$, $\gamma_k = \beta_2$. Для каждого из узлов γ_j введём набор номеров переменных $V_j = (v_j^1, ..., v_j^{m_j})$, от которых ϕ_{γ_j} зависит существенно, причём набор V_j упорядочен таким образом, что $v_j^1 = i_j$ при $j \geq 1$ и $v_j^{m_j} = i_{j+1}$ при $j \leq k-1$. Заметим, что V_j и V_{j+s} как множества не пересекаются при $s \geq 2$, поскольку иначе переменная $x_t \in V_j \cap V_{j_s}$ была бы в графе G_k соединена с вершинами x_j и x_{j+s+1}, что противоречит тому, что путь π — кратчайший.

Если $V = \{j_1, ..., j_s\}$ — набор индексов ($1 \leq j_t \leq n$), $x = (x_1, ..., x_n)$, тогда через $x[V]$ обозначим набор $(x_{j_1}, ..., x_{j_s})$. Положим $\phi_j(x[V_j]) = \phi_{\gamma_j}(x)$ — функция, полученная из ϕ_{γ_j} удалением несущественных переменных и перестановкой существенных переменных. Зафиксируем наборы $y'_j \in \{0,1\}^{|V_j|-1}$ для всех $j = 0, ..., k-1$ и $y''_j \in \{0,1\}^{|V_j|-1}$ для всех $j = 1, ..., k$ такие, что $\phi_j(0, y'_j) \neq \phi_j(1, y'_j)$ и $\phi_j(y''_j, 0) \neq \phi_j(y'', 1)$.

Через e_i обозначим двоичный вектор длины n, в котором i-й координата равна 1, а остальные равны 0. Поскольку $V_j \cap V_{j+s} = \varnothing$ при $s \geq 2$, существуют наборы $u_s^{t\prime}$, $u_s^{t\prime\prime} \in \{0,1\}^n$ ($s, t \in \{0, 1\}$) такие, что

$$u_0^{t\prime}[V_j] = (y'_j, 0), \quad u_0^{t\prime\prime}[V_j] = (0, y''_j), \text{ где } t \equiv j \mod 2,$$

$$u_1^{t\prime} = u_0^{t\prime} \oplus \bigoplus_{j \equiv t (mod\ 2)} e_{i_{j+1}}, \quad u_1^{t\prime\prime} = u_0^{t\prime\prime} \oplus \bigoplus_{j \equiv t (mod\ 2)} e_{i_j}.$$

Для каждого допустимого значения индекса j при $t = j \mod 2$ выполнено

$$\phi_{\gamma_j}(u_0^{t\prime}) = \phi_j(y'_j, 0) \neq \phi_j(y'_j, 1) = \phi_{\gamma_j}(u_0^{t\prime} \oplus e_{i_{j+1}}),$$

$$\phi_{\gamma_j}(u_0^{t\prime\prime}) = \phi_j(0, y''_j) \neq \phi_j(1, y''_j) = \phi_{\gamma_j}(u_0^{t\prime\prime} \oplus e_{i_j}).$$

Поскольку сложение по модулю 2 с вектором e_i изменяет лишь i-ю координату вектора, то существуют цепи c'_j и c''_j, соединяющие узел γ_j со входами $x_{i_{j+1}}$ и x_{i_j} соответственно такие, что $\phi_\gamma(u_0^{t\prime}) \neq \phi_\gamma(u_0^{t\prime} \oplus e_{i_{j+1}})$

для всех узлов $\gamma \in c'_j$ и $\phi_\gamma({u_0^t}'') \neq \phi_\gamma({u_0^t}'' \oplus e_{i_j})$ для всех узлов $\gamma \in c''_j$. Кроме того, для любого узла γ цепи c'_j функция ϕ_γ зависит существенно от переменной $x_{i_{j+1}}$ и не зависит от переменной x_{i_s} при $|s-(j+1)| \geq 2$, иначе в графе $\overline{G}_K$ вершина $x_{i_{j+1}}$ была бы соединена с x_s, и путь π не был бы кратчайшим. А это означает, что $\phi_\gamma({u_1^t}') = \phi_\gamma({u_0^t}' + e_{i_{j+1}}) \neq \phi_\gamma({u_0^t}')$, и что цепи c'_j и c'_{s-1} не пересекаются. Аналогично $\phi_\gamma({u_0^t}'') \neq \phi_\gamma({u_1^t}'')$ для любого узла γ цепи c''_j и цепи c''_j и c''_s не пересекаются при $|s-j| \geq 2$.

Теперь мы можем оценить сумму потенциалов схемы K на наборах ${u_0^t}'$, ${u_1^t}'$, ${u_0^t}''$ и ${u_1^t}''$

$$u_K({u_0^t}') + u_K({u_1^t}') \geq \sum_{j \equiv t (mod\ 2)} \sum_{\gamma \in c'_j} \Big(\phi_\gamma({u_0^t}') + \phi_\gamma({u_1^t}')\Big) = \sum_{j \equiv t (mod\ 2)} |c'_j|,$$

$$u_K({u_0^0}') + u_K({u_1^0}') + u_K({u_0^1}') + u_K({u_1^1}') \geq$$
$$\geq \sum_{j \equiv 0 (mod\ 2)} |c'_j| + \sum_{j \equiv 1 (mod\ 2)} |c'_j| = \sum_{j=0}^{k-1} |c'_j|.$$

По аналогии имеем

$$u_K({u_0^0}'') + u_K({u_1^0}'') + u_K({u_0^1}'') + u_K({u_1^1}'') \geq \sum_{j=1}^{k} |c''_j|.$$

Отсюда с использованием неравенства треугольника получим

$$\sum_{s \in \{0,1\}} \sum_{t \in \{0,1\}} (u_K({u_s^t}') + u_K({u_s^t}'')) \geq |c'_0| + \sum_{j=1}^{k-1} (|c'_j| + |c''_j|) + |c''_k| \geq$$
$$\geq \rho_K(\gamma_0, x_{i_1}) + 1 + \sum_{j=1}^{k-1} \big(\rho_K(x_{i_j}, x_{i_{j+1}}) + 2\big) + \rho_K(x_{i_k}, \gamma_k) + 1 \geq$$
$$\geq \rho_K(\gamma_0, \gamma_k) + 2k = \rho_K(\beta_1, \beta_2) + 2k.$$

Нетрудно убедиться, что максимальная площадь целочисленного множества с диаметром d в манхеттеновской метрике не превосходит $(d+1)^2/2$. Поскольку β_1 и β_2 — пара наиболее удалённых друг от друга узлов схемы, то расстояние между ними не меньше диаметра схемы, значит

$$\rho_K(\beta_1, \beta_2) + 2k \geq \sqrt{2S(K)} - 1 + 2k > \sqrt{2S(K)}.$$

Отсюда получаем требуемую оценку

$$\widehat{U}(f) = \widehat{U}(K) \geq \max_{s\in\{0,1\}} \max_{t\in\{0,1\}} \max(u_K(u_s^{t\prime}), u_K(u_s^{t\prime\prime})) \geq$$
$$\geq \frac{1}{8}\Big(\sum_{s\in\{0,1\}} \sum_{t\in\{0,1\}} \big(u_K(u_s^{t\prime}) + u_K(u_s^{t\prime\prime})\big)\Big) \geq$$
$$\geq \frac{\rho_K(\beta_1, \beta_2) + 2k}{8} > \frac{\sqrt{2S(f)}}{8} = \frac{\sqrt{S(f)}}{4\sqrt{2}}.$$

Случай несвязного графа G_K. Пусть граф G_K имеет ℓ компонент связности, и V_i — множество вершин G_K в i-й компоненте связности. Каждому V_i соответствует множество узлов N_i схемы K, зависящих от переменных из V_i. Множества N_i и N_j не пересекаются при $i \neq j$, поскольку иначе был бы узел, существенно зависящий одновременно от переменных из V_i и V_j, значит в G_K множества V_i и V_j были бы в одной компоненте связности. Множество узлов N_i задаёт подсхему K_i схемы K с множеством входов V_i. Каждый элемент схемы K входит в некоторую подсхему K_i, иначе его выход был бы равен константе, и его можно было бы удалить. Значит $S(K_1) + ... + S(K_\ell) \geq S(K)$. Поскольку множества входных переменных подсхем K_i не пересекаются, то максимальный потенциал схемы K складывается из максимальных потенциалов подсхем $K_1, ..., K_\ell$, а именно

$$\widehat{U}(K) = \max_{x\in\{0,1\}^n} u_K(x) = \max\Big\{\sum_{i=1}^{\ell} u_{K_i}(x_i) \;\Big|\; x_1, ..., x_\ell \in \{0,1\}^{|V_i|}\Big\} =$$
$$= \sum_{i=1}^{\ell} \max_{x_i\in\{0,1\}^{|V_i|}} u_{K_i}(x_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \widehat{U}(K_i).$$

Для каждой подсхемы K_i граф G_{K_i} соответствует компоненте связности G_K с множеством вершин V_i, и по доказанному случаю $\widehat{U}(K_i) \geq \sqrt{S(K_i)}/4\sqrt{2}$. Значит

$$\widehat{U}(K) = \sum_{i=1}^{\ell} \widehat{U}(K_i) \geq \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{\ell} \sqrt{S(K_i)} \geq \frac{1}{4\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^{\ell} S(K_i)} \geq \frac{\sqrt{S(K)}}{4\sqrt{2}}.$$

Теорема доказана.

Список литературы

[1] Кравцов С.С. О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 19. М.: Наука, 1967. 285–293.

[2] Калачев Г.В. Порядок мощности плоских схем, реализующих булевы функции // Дискретн. матем. 2014. **26**, № 1. 49—74.

[3] Калачев Г.В. Оценки мощности плоских схем, реализующих монотонные функции // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2017. **21**, № 2. 163—192.

On the lower bound for the maximum potential of plain circuits with several outputs through the area

Kalachev G. V.

In this paper we consider the relationship between the area and the maximum potential of plain circuits realizing Boolean operators. The maximal potential is a complexity measure of plain circuits, reflecting the power consumption of the circuit in the worst case, it is also often called activity. It is equal to the maximum number of outputs of circuit elements equal to 1, where the maximum is taken over all input sets of the circuit.It was porved that for arbitrary Boolean operator f, its maximal potential $\widehat{U}$ is greater or equal than $\sqrt{S}/4\sqrt{2}$ where S is the area of the minimal plain circuit realizing f.

Keywords: plain circuits, activity, potential, retations between complexity measures, lower bounds, Boolean operators.