От двузначной к k-значной логике

Жук Д.Н.

Традиционно считается, что при переходе от двузначного к многозначному случаю свойства решетки замкнутых классов функций координально меняются. В докладе будет показано, что несмотря на различия, эти решётки во многом похожи, а очень многие свойства, которые следуют из решетки Поста, могут быть обобщены на многозначный случай. Одним из таких примеров является решение задачи удовлетворения ограничениям для многозначного случая - показано, что самый общий полиномиальный алгоритм является во многом лишь комбинацией методов, давно известных для двузначного случая.

Ключевые слова: Булевы функции, k-значные функции, отношения, соответствие Галуа, задачи удовлетворения ограничениям.

1. Введение

Принято считать, что двузначный случай от k-значного отличается в первую очередь тем, что в двузначном случае все замкнутых классы функций описаны Э.Постом [28, 29], а в k-значном случае замкнутых классов континуум [3], а многочисленные результаты (например, [5, 17, 16, 8, 11, 22]) лишь подтверждают, что решётка замкнутых классов k-значной логики очень сложна.

Мы покажем, что несмотря на сложность, замкнутые классы функций k-значной логики во многом похожи на замкнутые классы двузначной логики, а многие свойства решетки Поста обобщаются на k-значный случай. Главным отличием является то, что k-значный случай одновременно может совмещать разные свойства, такие как монотонность и линейность, что невозможно в двузначном случае. Сначала мы покажем, как обобщаются на k-значный случай различные свойства и функции, являющиеся ключевыми при построении решетки Поста. Затем мы продемонстрируем, что полиноминальный алгоритм решения задачи удовлетворения ограничениям по сути является комбинацией методов, известных для двузначного случая.

2. Функции двузначной и k-значной логики

Функциями двузначной логики P_2 называются отображения вида

$$\{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\} \to \{0,1\}.$$

Положим $E_k = \{0,1,\ldots,k-1\}$. *Функциями k-значной логики* P_2 называются отображения вида

$$E_k \times E_k \times \cdots \times E_k \to E_k.$$

Обычным образом на функциях k-значной логики определяется оператор замыкания относительно операций суперпозиции. Замкнутый класс функций называется *клоном*, если он содержит селекторы.

3. Предполные классы

Теорема 1. *[28, 29] В P_2 есть 5 предполных классов:*

- *Класс функций сохраняющих 0 (T_0);*
- *Класс функций сохраняющих 1 (T_1);*
- *Класс самодвойственных функций (S);*
- *Класс монотонных функций (M);*
- *Класс линейных функцйи (L).*

Если перейти от двузначного случая к трехзначному, то там будут следующие предполные классы.

Теорема 2. *[4] В P_3 есть 18 предполных классов:*

1) *Классы сохранения множеств $T_0, T_1, T_2, T_{0,1}, T_{0,2}, T_{1,2}$.*

2) *Класс самодвойственных функций S, то есть, сохраняющие отношение $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.*

3) *Класс линейных функций.*

4) Классы монотонных функций $M_{0<1<2}, M_{1<0<2}, M_{0<2<1}$.

5) Класс сохранения разбиения $T_{0\sim 1}, T_{0\sim 2}, T_{1\sim 2}$.

6) Центральные предполные классы, то есть сохраняющие одно из отношений $\left(\begin{smallmatrix} 0&1&2&0&0&1&2 \\ 0&1&2&1&2&0&0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0&1&2&1&1&0&2 \\ 0&1&2&0&2&1&1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0&1&2&2&2&0&1 \\ 0&1&2&0&1&2&2 \end{smallmatrix}\right)$.

7) Предполный класс Слупецкого: множество всех несущественных функций.

Их этих теорем видно, что предполные классы P_3 отличаются от предполных классов P_3 только классами сохранения разбиений, центральными предполными классами и предполным классом Слупецкого. При этом классы сохранения разбиений являются всего лишь способом сведения к двузначному случаю, а центральные классы во многом похожи на классы монотонных функций: сравните $\left(\begin{smallmatrix} 0&1&2&0&0&1&2 \\ 0&1&2&1&2&0&0 \end{smallmatrix}\right)$ и $\left(\begin{smallmatrix} 0&1&2&0&0&1 \\ 0&1&2&1&2&2 \end{smallmatrix}\right)$. Таким образом принципиально новым является только предполный класс Слупецкого, и в дальнейшем мы покажем, что именно этот класс является главной отличительной особенностью P_k.

Если же перейти от трехзначного случая к k-значному , то никаких новых семейств предполных классов не появится, но существенно усложнится семейство предполных классов типа Слупецкого [30, 22].

4. Решетка замкнутых классов

Как было отмечено выше, все замкнутые классы двузначной логики были описаны Э.Постом [28, 29], причём решетку по вложению можно красиво изобразить на плоскости (рис. 1).

В то же время, для $k > 2$ имеется континуум предполных классов.

Теорема 3. *[3] уществует континуум замкнутых классов функций k-значной логики для $k > 2$.*

Тем не менее, вопреки сложившемуся мнению, континуальная мощность не является критичным моментом, что подтверждается работой автора [7, 35], в которой он построил все замкнутые классы самодвойственных функций трехзначной логики (континуальное семейство).

Если сравнить рисунки 1 и 2, то станет понятно, что между этими решётками много общего. Детальное же изучение [7, 35] покажет, что многие классы в решетке замкнутых классов самодвойственных функций являются обобщениями замкнутых классов, найденных Э.Постом в [28, 29].

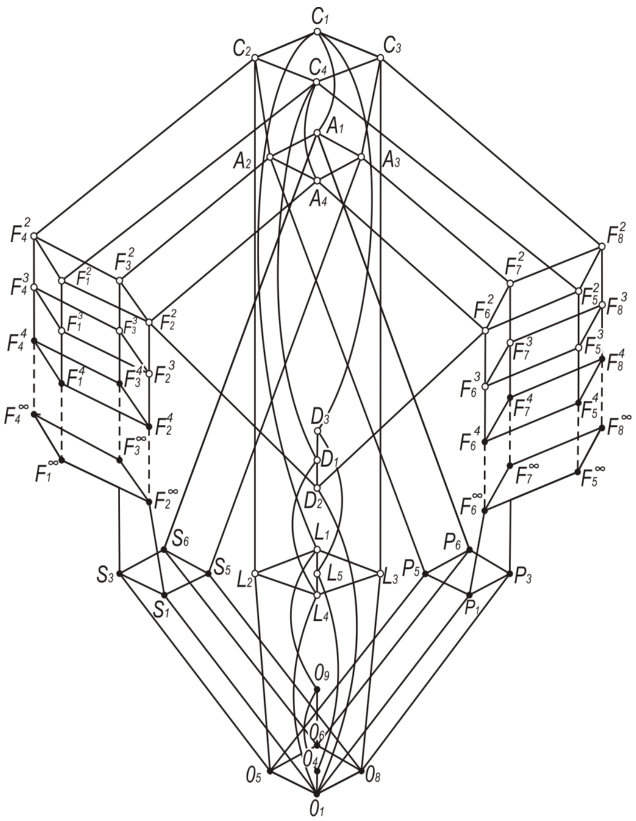

Рис. 1. Решетка Поста замкнутых классов P_2.

5. Соответствие Галуа

В этом разделе мы сформулируем, пожалуй, самое удивительное свойство замкнутых классов функций k-значной логики, которое является общим для двузначного и k-значного случая. Отображение $E_k^h \to \{0,1\}$ называется предикатом арности h. В работе мы не различаем предикаты и отношения, то есть вместо $\rho(a_1,\dots,a_h)=1$ мы пишем $(a_1,\dots,a_h)\in\rho$. Предикаты (отношения) мы изображаем в виде матриц, где столбцам соответствуют наборы, на которых предикат принимает значение 1.

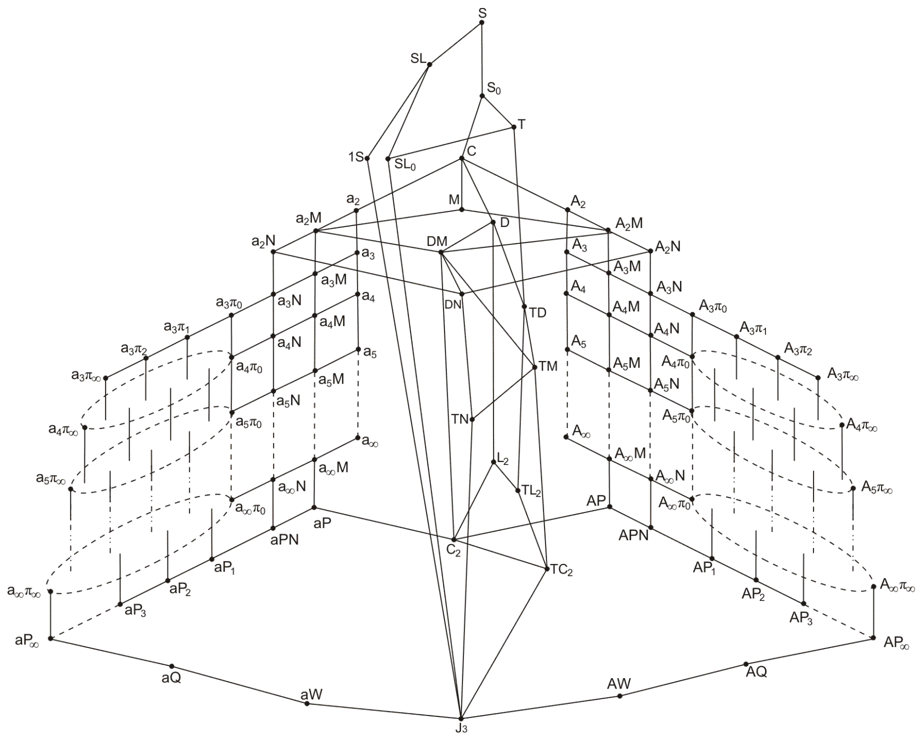

Рис. 2. Решетка замкнутых классов самодвойственных функций P_3.

Будем говорить, что функция $f \in P_k^m$ *сохраняет предикат (отношение)* ρ, если

$$f\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & a_{m,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,h} & a_{2,h} & \dots & a_{m,h} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f(a_{1,1}, a_{2,1}, \dots, a_{m,1}) \\ f(a_{1,2}, a_{2,2}, \dots, a_{m,2}) \\ \dots \\ f(a_{1,h}, a_{2,h}, \dots, a_{m,h}) \end{pmatrix} \in \rho$$

для любых

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{1,2} \\ \dots \\ a_{1,h} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{2,1} \\ a_{2,2} \\ \dots \\ a_{2,h} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{m,1} \\ a_{m,2} \\ \dots \\ a_{m,h} \end{pmatrix} \in \rho.$$

Через $Pol(\rho)$ обозначим множество всех функций $f \in P_k$, таких что f сохраняет ρ. Для множества предикатов S положим

$$Pol(S) = \bigcap_{\rho \in S} Pol(\rho).$$

Множество всех предикатов, которые сохраняются функцией $f \in P_k$, будем обозначать через $Inv(f)$. Для $M \subseteq P_k$ положим

$$Inv(M) = \bigcap_{f \in M} Inv(f).$$

Введем на множестве всех предикатов k-значной логики R_k оператор замыкания относительно позитивных примитивных формул, то есть формул следующего вида

$$\rho(x_1, \ldots, x_n) = \exists y_1 \ldots \exists y_l \ \rho_1(z_{1,1}, \ldots, z_{1,n_1}) \wedge \ldots \wedge \rho_s(z_{s,1}, \ldots, z_{s,n_s}),$$

где $z_{i,j} \in \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_l\}$.

Следующая теорема из [1, 2, 22] описывает важное свойство операций Pol и Inv.

Теорема 4. *Пусть $\mathbb{L}(P_k)$ — множество всех клонов в P_k, $\mathbb{L}(R_k)$ — множество всех замкнутых множеств в R_k, содержащих пустой предикат и предикат равенства, тогда отображения*

$$Inv : \mathbb{L}(P_k) \longrightarrow \mathbb{L}(R_k),$$

$$Pol : \mathbb{L}(R_k) \longrightarrow \mathbb{L}(P_k)$$

являются биективными отображениями, которые сохраняют частичный порядок $\subseteq$, то есть

$$\forall A, B \in \mathbb{L}(P_k) : A \subseteq B \Rightarrow Inv(B) \subseteq Inv(A),$$

$$\forall S, T \in \mathbb{L}(R_k) : S \subseteq T \Rightarrow Pol(T) \subseteq Pol(S).$$

Из этой теоремы следует, что для исследования решетки замкнутых классов P_k можно изучать решетку замкнутых классов предикатов k-значной логики.

6. Критичные предикаты

Наблюдение. Рассмотрим предикат двузначной логики $\rho(x, y, z) = (x \leq y) \wedge (y \neq z)$. Нетрудно видеть, что с помощью позитивных примитивных формул из него можно вывести два предиката ρ_1 и ρ_2 следующим образом: $\rho_1(x, y) = \exists z\ (\rho(x, y, z)) = (x \leq y)$, $\rho_2(y, z) = \exists x\ (\rho(x, y, z)) = (y \neq z)$. В то же время, из ρ_1 и ρ_2 можно обратно вывести ρ следующим образом $\rho(x, y, z) = \rho_1(x, y) \wedge \rho_2(y, z)$. Это позволяет утверждать, что предикат ρ не нужен нам для исследования замкнутых классов функций, а сам предикат ρ распадается на два более простых предиката.

Предикат называется *существенным*, если он представляется в виде конъюнкции предикатов меньшей арности. Это понятие было введено в работах [6, 7, 33] и позволило не только получить простое доказательство решетки Поста замкнутых классов, но и описать все замкнутые классы самодвойственных функций трехзначной логики [7, 35].

Можно пойти дальше и ввести понятие критичного (максимального) предиката [7, 35, 18]. А именно, предикат называется *критичным*, если его нельзя разложить на предикаты меньшей арности и большие (по числу ноборов) предикаты той же арности, то есть его нельзя представить в виде конъюнкции предикатов меньшей арности и больших предикатов той же арности, которые из него выводятся.

Нетрудно убедиться, что имеют место следующие утверждения.

Лемма 1. *[7, 35, 18, 36] Каждый предикат представляется в виде конъюнкции критичных предикатов, которые из него выводятся.*

Лемма 2. *[7, 35, 18, 36] Любой клон может быть задан как класс сохранения критичных предикатов.*

В работе [36] было обнаружено следующее удивительное свойство критичных предикатов двузнайной логики.

Теорема 5. *[36] Пусть ρ — критичный предикат двузначной логики. Тогда $\rho(x_1, \ldots, x_n) = L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_m$ для каких-то линейных уравнений $L_1, L_2, \ldots, L_m$.*

В качестве примеров критичных предикатов можно привести следующие предикаты, которые задают предполный класс монотонных функций, предполный класс линейных функций и счётную цепочку замкнутых классов, соответственно.

- $(x \leq y) = (x = 0) \vee (y = 1)$;

- $(x \neq y) = (x + y = 1)$;
- предикат $\{0,1\}^n \setminus \{0\}^n$ определяется как $(x_1 = 1) \vee (x_2 = 1) \vee \cdots \vee (x_n = 1)$.

При $k > 2$ такого описания получить не удалось. Более того, усилиями Станислава Моисеева на компьютере был найден следующий критичный предикат в P_3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Попытки придумать красивое описание не увенчались успехом, но было обнаружено, что этот предикат сохраняется только селекторами. Чтобы избежать рассмотрения таких случаев мы определим идемпотентную слабую функцию почти единогласия.

Функция f называется *идемпотентной*, если она сохраняет все константы, то есть $f(x, x, \ldots, x) = x$. Функция f называется *слабой функцией почти единогласия*, если она удовлетворяет следующему условию:

$$f(x, \ldots, x, y) = f(x, \ldots, x, y, x) = \cdots = f(y, x, \ldots, x).$$

В качестве примеров идемпотентной слабой функции почти единогласия можно привести.

- $x \vee y$, $x \wedge y$, $\max(x, y)$
- $x + y + z$
- $xy \vee xz \vee yz$

Нетрудно видеть, что идемпотентная слабая функция почти единогласия не принадлежит ни одному предполному классу типа Слупецкого [36]. Более того, в работе [25] было показано, что это самая слабая функция, которая гарантирует, что на любом подмножестве и фактормножестве есть функции отличные от селекторов, что делает рассмотрение этой функции более чем оправданным.

Оказалось, что при наличии идемпотентной слабой функции почти единогласия можно доказать результат, очень похожий на описание критичных предикатов двузначной логики.

Теорема 6. *[36] Пусть ρ – критичный предикат k-значной логики, сохраняемый идемпотентной слабой функцией почти единогласия. Тогда найдутся $A_1, \ldots, A_n \subseteq E_k$, такие что $(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) \cap \rho$ представляется в виде дизъюнкции линейных уравнений, причём только одно из них может содержать более одной переменной.*

7. Функция голосования

Одной из самых популярных функций двузначной логики, возникающей во многих задачах, является функция голосования, которая естественным образом обобщается на k-значный случай.

Функция $f \in P_k$ называется *функцией голосования*, если

$$f(x, x, y) = f(x, y, x) = f(y, x, x) = x.$$

Легко видеть, что в P_2 есть только одна функция голосования, хотя, например, в P_3 их 3^6.

Важным свойством функции голосования является следующее утверждение

Лемма 3. *[9] Любой замкнутый класс в P_k, содержащий функцию голосования, задаётся предикатами арности 1 и 2.*

Есть много других свойств функций голосования, которые легко переносятся с двузначного случая на k-значный (см. например [20, 19]).

В частности, Станиславу Моисееву удалось найти все 1 918 040 замкнутых классов трехзначной логики, содержащих функцию голосования [38]. Например, на рисунках 3 и 4 вы можете сравнить решетки замкнутых классов P_2 и P_3, содержащие функцию голосования (во втором случае на рисунок влезла только верхняя часть). Получается, что решетка в P_3 просто намного больше, но не принципиально другая.

8. Функция почти единогласия

В этом разделе мы рассмотрим функции, которые делают решетку Поста счётной. Пусть функция $f_n \in P_2$ от n переменных принимает значение 1 только тогда, когда среди значений переменных более одной единицы. Известно, что функции $f_3, f_4, f_5, \ldots$ порождают попарно различные замкнутые классы. Такие функции легко обобщаются на k-значный случай.

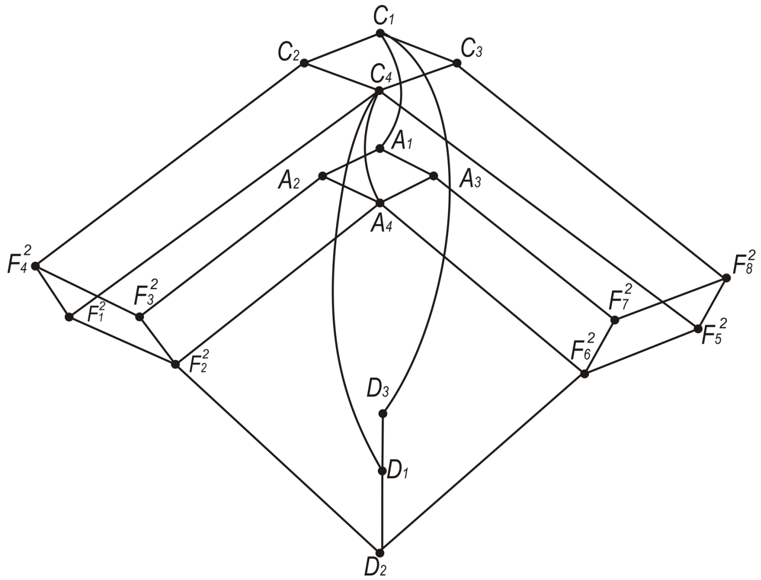

Рис. 3. Решетка замкнутых классов P_2, содержащих функцию голосования.

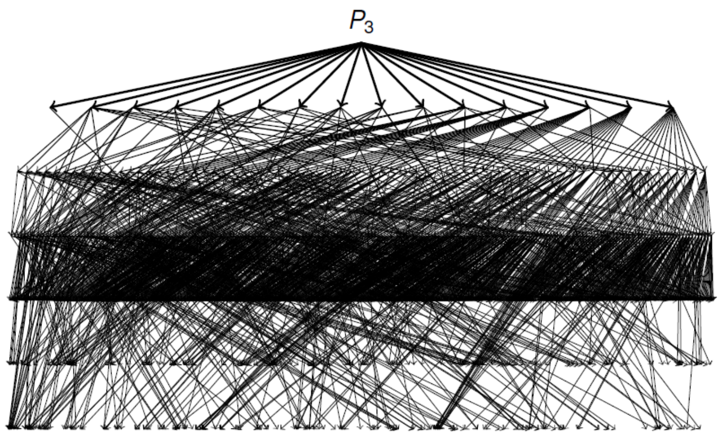

Рис. 4. Верхние слои решетки замкнутых классов P_3, содержащих функцию голосования.

Функция f называется *функцией почти единогласия*, если

$$f(x, \dots, x, y) = f(x, \dots, x, y, x) = f(y, x, \dots, x) = x.$$

Для функции почти единогласия можно доказать утверждение, аналогичное утверждению для функции почти единогласия.

Лемма 4. *[9] Любой замкнутый класс, содержащий функцию почти единогласия от n переменных, задаётся предикатами арности $n-1$.*

Функции почти единогласия активно изучались при исследовании многозначных логик, а также в универсальной алгебре [27, 26, 15, 10, 38, 21]. При этом надо понимать, что в k значном случае ситуация намного сложнее и изначально не было даже понятно, можно ли алгоритмически проверить существование функции почти единогласия в замкнутом классе [23, 24, 34]. Тем не менее, сейчас они уже достаточно хорошо изучены и мы можем доказывать утверждения, аналогичные тем, что есть в двухзначном случае. Например, верна следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть множество функций $F \subseteq P_k$ от m переменных сохраняет все константы, а замыкание $[F]$ содержит функцию почти единогласия. Тогда $[F]$ содержит функцию почти единогласия от $(m-1)k(k-1)/2+1$ переменных. Оценка не может быть улучшена.*

Отметим также, что в книге [22] исследование замкнутых классов, содержащих функцию почти единогласия, приводится в качестве одной из стратегий к изучению k-значной логики.

9. Минимальные клоны

Замкнутый класс называется *минимальным клоном*, если любая его функция, отличная от селектора, порождает вместе с селекторами весь класс.

Все минимальные клоны двузначной логики могут быть получены из решётки Поста, а минимальные клоны в P_3 и P_4 найдены на компьютере.

- В P_2 всего 7 минимальных клонов: $[\{x \vee y\}]$, $[\{x \wedge y\}]$, $[\{xy \vee xz \vee yx\}]$, $[\{x+y+z\}]$, $[\{\overline{x}\}]$, $[\{x,0\}]$, $[\{x,1\}]$ [28, 29].
- В P_3 всего 84 минимальных клона (24 с точностью до внутреннего автоморфизма) (B. Csákány, 1983, [14]).
- В P_4 всего 5242 минимальных клона (Karsten Schölzel, 2012).

Найти аналогичным образом все минимальные клоны в P_5 не представляется возможным из-за слишком большого количества вариантов. Тем не менее ещё в 1983 году была получена классификация всех минимальных клонов [31].

Теорема 8. *[31] В P_k есть только 5 типов минимальных клонов:*

1) порождённые унарной функцией,

2) порождённые бинарной идемпотентной функцией,

3) порождённые функцией голосования,

4) порождённые функцией минорирования ($f(x,x,y) = f(x,y,x) = f(y,x,x) = y$),

5) порождённые полуселекотором(semiprojection), то есть, на всех неразнозначных наборах возвращается одна переменная.

Таким образом, единственным принципиальным отличием двузначного случая от k-значного являются полуселекторы, то есть функции, которые на любом двух элементном множестве превращаются в обычные селекторы.

10. Минимальные существенные функции

Функция называется *существенной* если она принимает все k значений и зависит существенно по крайней мере от двух переменных.

Легко убедиться, что выполняется следующая лемма.

Лемма 5. *Любой замкнутый класс P_2, содержащий существенную функцию, содержит одну из следующих функций: $x \vee y$, $x \wedge y$, $xy \vee xz \vee yz$ или $x + y + z$.*

В этом разделе обобщим этот результат на k-значный случай.

Мы говорим, что B *поглощает* A с помощью функции f если $f(B, \dots, B, A, B, \dots, B) \subseteq B$ для любой позиции A.

Ниже мы приводим некоторые примеры поглощающих множеств.

- $\{0\}$ поглощает $\{0, 1\}$ с помощью $x \wedge y$.
- $\{1\}$ поглощает $\{0, 1\}$ с помощью $x \vee y$.

- $\{0\}$ и $\{1\}$ поглощают $\{0, 1\}$ с помощью функции голосования.

Множество функций называется *полиномиально полным*, если вместе с константами оно порождает всё P_k.

Теорема 9. *Пусть замкнутый класс $F \subseteq P_k$ содержит идемпотентную слабую функцию почти единогласия. Тогда он содержит одну из следующих функций*

1) $f(x, y)$, такую что B поглощает E_k с помощью функции f;

2) $f(x, y, z)$, такую что B поглощает E_k с помощью функции f;

3) $f(x_1, \ldots, x_n)$, такую что $f/\sigma \cong x_1 + x_2 + \cdots + x_n (\mod p)$ для некоторого отношения эквивалентности σ на E_k;

либо F/σ полиномиально полно для некоторого отношения эквивалентности σ на E_k.

Можно ещё упростить это утверждение, если рассмотреть только монотонные функции k-значной логики.

Легко убедиться, что выполняется следующая лемма.

Лемма 6. *Любой замкнутый класс монотонных функций в P_2, содержащий существенную функцию, содержит $x \vee y$, $x \wedge y$ или $xy \vee xz \vee yz$.*

Этот результат может быть обобщён на k-значный случай следующим образом.

Теорема 10. *Пусть замкнутый класс монотонных функций в P_k содержит идемпотентную слабую функцию почти единогласия. Тогда он содержит одну из следующих функций*

1) $f(x, y)$, такую что $\{0, \ldots, m\}$ поглощает E_k с помощью f;

2) $f(x, y)$, такую что $\{m, \ldots, k-1\}$ поглощает E_k с помощью f;

3) $f(x, y, z)$, такую что $\{0\}$ и $\{k-1\}$ поглощают E_k с помощью f.

11. Задача удовлетворения ограничениям

Пусть Γ – множество допустимых предикатов k-значной логики. Тогда для каждого Γ мы определяем массовую проблему.

Проблема 1. CSP(Γ).

Дано: конъюнкция предикатов, то есть формула вида

$$\rho_1(x_{i_{1,1}}, \dots, x_{i_{1,n_1}}) \wedge \dots \wedge \rho_s(x_{i_{s,1}}, \dots, x_{i_{s,n_s}}),$$

где $\rho_1, \dots, \rho_s \in \Gamma$.

Проверить выполнима ли формула.

Пример. Пусть $k = 3, \Gamma = \{x < y, x \le y\}$. Примеры задач:

- $x_1 < x_2 \wedge x_2 < x_3 \wedge x_3 < x_4$, не имеет решений;
- $x_1 \le x_2 \wedge x_2 \le x_3 \wedge x_3 \le x_1$, есть, например, решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Для $k = 2$ полная классификация сложности задачи CSP(Γ) была получена в 1978 году [32].

Теорема 11. *[32] Пусть* Γ *— множество предикатов двузначной логики. Тогда* CSP(Γ) *решается за полиномиальное время если*

1) 0 *сохраняет* Γ,

2) 1 *сохраняет* Γ,

3) $x \vee y$ *сохраняет* Γ,

4) $x \wedge y$ *сохраняет* Γ,

5) $xy \vee yz \vee xz$ *сохраняет* Γ,

6) $x + y + z$ *сохраняет* Γ.

иначе CSP(Γ) *NP-полна.*

В дальнейшем была получена классификация для трехзначного случая [12], а в 2017 году и для k-значного [13, 37].

Теорема 12. *[13, 37] Пусть* Γ *— множество предикатов k-значной логики. Если есть слабая функция почти единогласия, которая сохраняет* Γ, *то* CSP(Γ) *решается за полиномиальное время; иначе* CSP(Γ) *NP-полна.*

При этом алгоритм, приведенный в [37], является во многом комбинацией методов, которые решают задачу в двузначном случае, а главное отличие заключается в том, что здесь разные пункты Теоремы 11 могут переплетаться в одной задаче.

Алгоритм для произвольного k из [37].

1) Применяем метод резолюций к бинарным проекциям всех предикатов.

2) Пытаемся разбить область значений каждой переменной на две части и решить две более простые задачи.

3) Если B поглощает область значений какой-то переменной с помощью бинарной или тернарной функции, то уменьшаем область значений до B.

4) Если существует отношение эквивалентности σ, такое что $\mathrm{Pol}(\Gamma)$ полиномиально полно, то уменьшаем область значений переменной до любого класса эквивалентности σ.

5) Иначе существуют отношения эквивалентности $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ такие что задача по модулю этих отношений является системой линейных уравнений в поле.

   - Решаем систему линейных уравнений в поле.
   - Для любого конкретного решения системы линейных уравнений мы можем проверить, что существует соответствующее решение исходной задачи следующим образом: ограничиваем область значений каждой переменной на решение системы и сводим задачу к задаче удовлетворения ограничений на меньшем множестве, то есть более простой.
   - Применяя предыдущий шаг, методом неопределенных коэффициентов вычисляем линейное уравнение, которое может быть добавлено к исходной задаче, чтобы множество решений не поменялось.
   - Добавляем найденное линейное уравнение к системе и повторяем процедуру.

12. Массовые проблемы

Таким образом, получается, что очень многие результаты, полученные для k-значного случая, являются лишь обобщением результатов, известных для двузначного. Поэтому остаётся открытым вопрос: есть ли какое-то принципиальное отличие между P_2 и P_k, или все отличие заключается в том, что P_k намного больше, а иногда настолько большое, что полноценное описание невозможно куда-либо записать. Чтобы ответить на этот вопрос, мы рассмотрим следующие массовые проблемы.

Проблема 2. *Дан предикат; проверить что заданный им замкнутый класс конечно порождён.*

Проблема 3. *Дано конечное множество функций; проверить что порожденный ими замкнутый класс предикатно-описуем.*

Проблема 4. *Дан предикат и конечное множество функций; проверить, что они задают один и тот же класс.*

Каждая из этих задача легко решается как для P_2, так и для других случаев, когда нам известна решетка всех замкнутых классов, даже если она континуальной мощности [7, 35]. Но разрешимы ли эти задачи в P_k? Или описания всех замкнутых классов P_k, даже необозримого для человека, не существует в принципе, так как хорошее описание должно позволять решать перечисленные задачи.

В 2017 году Мэтью Мур объявил, что Проблема 3 алгоритмически неразрешима, но пока так и не опубликовал доказательство. Если в итоге оно будет опубликовано, то это, на наш взгляд, станет первым принципиальным отличием P_2 от P_k.

Список литературы

[1] В. Г. Бондарчук, В. Г. Калужнин, В. Н. Котов, Б. А. Ромов. Теория Галуа для алгебр Поста I. *Кибернетика*, (3):1–10, 1969.

[2] В. Г. Бондарчук, В. Г. Калужнин, В. Н. Котов, Б. А. Ромов. Теория Галуа для алгебр Поста II. *Кибернетика*, (5):1–9, 1969.

[3] Ю. И. Янов, А. А. Мучник. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса. *ДАН СССР*, 127(1):44–46, 1959.

[4] С. В. Яблонский. О функциональной полноте в трехзначном исчислении. *ДАН СССР*, 95(6):1152–1156, 1954.

[5] С. В. Яблонский. Функциональные построения в k-значной логике. *Труды математического института имени ВА Стеклова*, 51(0):5–142, 1958.

[6] Д. Н. Жук. Предикатный метод построения решетки Поста. *Дискретная математика*, 23(2):115–128, 2011.

[7] Д. Н. Жук. *Решетка замкнутых классов самодвойственных функций трехзначной логики.* Издательство МГУ, 2011.

[8] С. С. Марченков. О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики. *Проблемы кибернетики*, 40:261–266, 1983.

[9] K. A. Baker, F. Pixley. Polynomial interpolation and the Chinese Remainder Theorem for algebraic systems. *Math. Zeitschrift*, 143:165–174, 1975.

[10] L. Barto. Finitely related algebras in congruence distributive varieties have near unanimity terms. *Canadian Journal of Mathematics*, 65(1):3–21, 2013.

[11] A. A. Bulatov. Finite sublattices in the lattice of clones. *Algebra and Logic*, 33(5):287–306, 1994.

[12] Andrei A. Bulatov. A dichotomy theorem for constraint satisfaction problems on a 3-element set. *J. ACM*, 53(1):66–120, January 2006.

[13] Andrei A. Bulatov. A dichotomy theorem for nonuniform csps. *CoRR*, abs/1703.03021, 2017.

[14] B. Csákány. All minimal clones on the three-element set. *Acta cybernetica*, 6:227–238, 1984.

[15] B. A. Davey, L. Heindorf, R. McKenzie. Near unanimity: an obstacle to general duality theory. *Algebra Universalis*, 33(3):428–439, 1995.

[16] J. Demetrovics, L. Hannak. The number of reducts of preprimial algebra. *Algebra Universalis*, 16(1):178–185, 1983.

[17] L. A. Kaluznin, R. Pöschel. Funktionen-und relationenalgebren. *VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin*, 19:79, 1979.

[18] K. A. Kearnes, Á. Szendrei. Clones of algebras with parallelogram terms. *Internat. J. Algebra Comput.*, 22, 2012.

[19] S. Kerkhoff. On the minimal majority operations on a three-element set. *Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, 25(4-5):511–527, 2015.

[20] S. Kerkhoff, D. Zhuk. The generation of clones with majority operations. *Algebra universalis*, 72(1):71–80, 2014.

[21] Benoit Larose, Cynthia Loten, László Zádori. A polynomial-time algorithm for near-unanimity graphs. *Journal of Algorithms*, 55(2):177–191, 2005.

[22] D. Lau. *Function algebras on finite sets*. Springer, 2006.

[23] M. Maróti. On the (un) decidability of a near-unanimity term. *Algebra universalis*, 57(2):215–237, 2007.

[24] M. Maróti. The existence of a near-unanimity term in a finite algebra is decidable. *The Journal of Symbolic Logic*, 74(3):1001–1014, 2009.

[25] M. Maróti, R. Mckenzie. Existence theorems for weakly symmetric operations. *Algebra universalis*, 59(3–4):463–489, 2008.

[26] M. Maroti, L. Zadori. Reflexive digraphs with near unanimity polymorphisms. *Discrete Mathematics*, 312(15):2316 – 2328, 2012.

[27] A. Mitschke. Near unanimity identities and congruence distributivity in equational classes. *Algebra universalis*, 8(1):29–32, 1978.

[28] E. L. Post. Determination of all closed systems of truth tables. *Bull. Amer. Math. Soc.*, (26: 427), 1920.

[29] E. L. Post. *Two-Valued Iterative Systems of Mathematical Logic*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1941.

[30] I. Rosenberg. über die funktionale vollständigkeit in den mehrwertigen logiken. *Rozpravy Československe Akad. Věd., Ser. Math. Nat. Sci.*, 80:3–93, 1970.

[31] I. Rosenberg. Minimal clones i: the five types. In *Lectures in universal algebra*, pages 405–427. Elsevier, 1986.

[32] T. J. Schaefer. The complexity of satisfiability problems. In *Proceedings of the Tenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '78, pages 216–226, New York, NY, USA, 1978. ACM.

[33] D. Zhuk. The cardinality of the set of all clones containing a given minimal clone on three elements. *Algebra Universalis*, 68(3–4):295–320, 2012.

[34] D. Zhuk. The existence of a near-unanimity function is decidable. *Algebra Universalis*, 71(1):31–54, 2014.

[35] D. Zhuk. The lattice of all clones of self-dual functions in three-valued logic. *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, 24(1–4):251–316, 2015.

[36] D. Zhuk. Key (critical) relations preserved by a weak near-unanimity function. *Algebra Universalis*, 77(2):191–235, 2017.

[37] D. Zhuk. The proof of csp dichotomy conjecture. *CoRR*, abs/1704.01914, 2017.

[38] D. Zhuk, S. Moiseev. On the clones containing a near-unanimity function. In *43rd IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic (ISMVL 2013)*, pages 129–134, May 2013.

From two-valued logic to k-valued logic.

Zhuk D.N.

Traditionally, it is believed that the lattices of clones in two-valued logic and k-valued logic are totally different. In the paper we show that despite the differences they have a lot in common, and many properties that follow from the Post lattice can be generalized to the multi-valued case. As an example we show that the most general polynomial algorithm for the constraint satisfaction problem on k-element set can be viewed as a combination of methods known for two-valued case.

Keywords: Boolean functions, k-valued functions, relations, Galois connection, constraint satisfaction problem.