Об автоматных функциях с магазинной памятью

Иванов И.Е.

Известно, что автоматы с магазинной памятью сохраняют множество периодических последовательностей. Ранее автор привёл верхние и нижние оценки на максимальный период выходной последовательности автономного автомата с магазинной памятью в зависимости от характеристик автомата. В данной работе приводятся оценки на максимальный период выходной последовательности для общего случая. Период выходный последовательности был изучен главным образом как функция от периода входной последовательности.

Ключевые слова: автомат с магазинной памятью, детерминированная функция, периодические последовательности.

1. Введение

Теория автоматов как конечных, так и бесконечных начала активно развиваться в 50-е годы прошлого века. Разумеется, упоминания были и раньше. Машины Тьюринга были введены А.Тьюрингом в 1936 году [35]. Несколько позже в работе Мак-Каллока и Питтса [30] появилось понятие конечного автомата.

Развитие теории автоматов было стимулировано развитием теории формальных грамматик, основной задачей которой было построение математической модели для описания естественных языков. Основополагающими работами данной тематики можно считать работы американского ученого Н.Хомского [36], [37], в которых и были сформулированы современные подходы теории формальных грамматик. Их основным результатом можно считать построение иерархии Хомского, то есть классификации формальных грамматик по правилам вывода.

Оказалось, что каждому классу иерархии соотвествует свой тип распознавателя. Для регулярных языков распознавателем является конечный автомат [21]. Конечные автоматы как распознаватели языков изучались очень широко и довольно скоро стали самостоятельным объектом исследований. Была доказана эквивалентность классов детерминированных и недетерминированных конечных автоматов [34], алгоритмически решена проблема эквивалентности автоматов [32]. Для регулярных языков были алгоритмически решены следующие проблемы: проблема принадлежности слова языку, проблема пустоты языка, проблема бесконечности языка. Была доказана замкнутость регулярных языков относительно операций объединения, пересечения и дополнения. Обзор по этим результатам можно найти в [1], [10].

Понятие регулярности было обобщено для бесконечных последовательностей (ω-языки). Мак-Нотон показал, что и в этом случае акцептором является конечный автомат [31]. Обзор по результатам для ω-языков, распознаваемых конечными автоматами, можно найти в [33], [50].

Многие задачи для конечных автоматов в рамках теории формальных языков были решены. Было доказано существование алгоритмов по большинству языковых проблем, например:

- Существует алгоритм проверки принадлежности слова регулярному языку.
- Существует алгоритм проверки регулярного языка на пустоту.
- Существует алгоритм проверки регулярного языка на бесконечность.
- Существует алгоритм проверки эквивалентности двух регулярных языков.
- Существует алгоритм проверки вхождения одного языка в другой (как подмножество).

Более детально с этой областью формальных языков можно ознакомиться в [1], [10].

Класс регулярных языков является самым изученным в иерархии Хомского. Оказалось, что если расширить принятое в теории формальных грамматик определение детерминированного автомата, добавив к нему выход, то можно не только построить всю теорию регулярных языков, но и получить новую функциональную систему, изучение которой само по себе представляет интерес.

В 1960-х годах возникают задачи распознавания полноты для конечных автоматов: требуется найти алгоритм, позволяющий по любой системе автоматов установить, является ли она полной или нет. Для булевых функций, то есть автоматов без памяти, данная задача была решена Э.Постом [43]. Для функций с задержками В.Б. Кудрявцев установил критерии полноты [25]. Вместе с тем была показана континуальность предполных классов автоматных функций [26]. М.И. Кратко в общем случае доказал алгоритмическую неразрешимость распознавания полноты для конечных автоматов относительно операции суперпозиции и обратной связи [24].

В дальнейшем задача полноты для автоматных функций была широко изучена в различных вариациях. При этом можно выделить несколько основных подходов.

Первый связан с определением понятия равенства автоматов. Были исследованы следующие вариации:

- А-полнота [8], [9];
- Клини-полнота [12];
- ϵ-полнота [49];
- полнота с учетом недостижимых состояний [53];
- N - полнота [2].

Все эти задачи оказались алгоритмически неразрешимыми.

Следующий подход связан с изучением полноты в некоторых подклассах автоматов. В.Б. Кудрявцев для функций с задержками описал все предполные классы и нашел алгоритм распознавания полноты [25]. А.А. Часовских в классе линейных автоматов также описал все предполные классы и нашел алгоритм распознавания полноты конечных систем относительно операции композиции [54].

Третий подход связан с ограничениями на исследуемые системы автоматов. А.А. Летичевский привёл алгоритм решения задачи о полноте относительно операций композиции для автоматов Медведева (конечных систем автоматных функций, выдающих свое состояние) при наличии всех булевых функций [28]. В 1986 В.А. Буевич показал алгоритмическую разрешимость задачи А-полноты для систем, содержащих все булевы функции [9]. В 1992 Д.Н. Бабин показал существование алгоритма распознавания полноты относительно суперпозиции и обратной связи для систем, содержащих все булевы функции [3]. Также он осуществил классификацию добавок из замкнутых классов булевых функций по свойству алгоритмической разрешимости распознавания полноты и показал, что обеспечивающих алгоритмическую разрешимость добавок конечное число [4].

Задача распознавания полноты конечных систем относительно операций суперпозиции не имеет смысла, так как любая конечная система относительно суперпозиции не является полной. Поэтому относительно суперпозиции разумно изучать полноту бесконечных систем. Д.Н. Бабиным было доказано, что система, состоящая из всех одноместных конечных автоматов и всех булевых функций, полна. Это означает, что арность множества автоматных функций равна двум (аналог 13-ой проблемы Гильберта для автоматных функций) [5]. В задаче выразимости констант при наличии всех булевых функций преуспел А.А. Летуновский. Им детально были изучены периодические свойства конечных автоматов. В работе [29] полностью описаны периоды выходных последовательностей, которые может генерировать произвольный автомат из замыкания конечной системы автоматов.

Развитием функционального подхода в теории автоматов в основном занималась советская школа теории автоматов. С основными результатами можно ознакомиться в [27].

Следующим классом языков в иерархии Хомского является класс контекстно-свободных языков. Для них распознавателем является автомат с магазинной памятью. Важность магазинов (известных также под названием стеков) в процессах обработки языков была осознана в начале 1950-х годов. Эттингер[40] и Шютценберже [38] первыми формализовали понятие автомата с магазинной памятью. Эквивалентность автоматов с магазинной памятью и контекстно-свободных грамматик была показана Хомским[37] и Эви[39]. Очень скоро стало понятно, что класс контекстно-свободных языков устроен сложнее класса регулярных. В работах [6], [15] появились примеры алгоритмически неразрешаемых проблем, а именно:

- Не существует алгоритма, позволяющего установить равенство двух контекстно-свободных языков.

- Не существует алгоритма проверки, что один контекстно-свободный язык лежит в другом.

- Не существует алгоритма проверки, что пересечение двух контекстно-свободных языков является пустым.

- Не существует алгоритма проверки контекстно-свободного языка на регулярность.

Оказалось, что многие техники работы с конечными автоматами и регулярными языками для автоматов с магазинной памятью не работают. В частности, было показано, что класс языков, распознаваемых детерминированными автоматами с магазинной памятью, не равен классу всех контекстно-свободных языков, а является его собственным подмножеством [11] [38].

Так как для большинства нетривиальных языковых задач были получены отрицательные результаты в виде отсутствия алгоритмов, то были предприняты попытки найти подклассы, в которых эти задачи имели бы решения. Пожалуй, самой известной и трудоёмкой задачей является проблема эквивалентности детерминированных контекстно-свободных языков, которая была решена лишь в 1997 году французским математиком Сенизерже (Senizergues) [46]. За почти полвека этой проблемой занимались многие математики, и были получены положительные решения этой проблемы в различных подклассах [23], [16], [52], [20], [51], [7], [42], [44], [48], [41], [45].

Заметим, что для всех исследуемых выше подклассов детерминированных автоматов с магазинной памятью проблема регулярности, то есть эквивалентности конечному автомату, разрешима [47]. Тем не менее, для всех этих подклассов проблема включения одного языка в другой алгоритмически неразрешима.

Несмотря на существование алгоритмов для задач проверки на регулярность и эквивалентность, до сих пор во многих классах не понятна сложность этих задач. С одними из последних результатов в этой области можно ознакомиться в [13], [14].

Основной целью работы является изучение свойств автоматов с магазинной памятью как преобразователей последовательностей. Изучение детерминированных автоматных функций в теории конечных автоматов позволяет строить продуктивные методы их анализа [27]. Периодические свойства конечных автоматов — это фундамент, на основе которого выполнено множество построений. В случае же автомата с магазинной памятью периодические свойства почти не были изучены. Данная работа и предыдущие работы автора [17], [18], [19] — это попытка разобраться в этом вопросе.

Основными результатами данной работы можно считать следующие:

- Приведена оценка на максимальную длину периода выходной последовательности в зависимости от характеристик автомата.
- В случае однобуквенного алфавита удалось существенно понизить полученную верхнюю оценку. Была дана асимптотически достижимая оценка для автономного случая.
- В случае произвольного алфавита магазина удалось показать, что существенно понизить полученную верхнюю оценку нельзя. Были построены примеры автономных автоматов с магазинной памятью, генерирующих периодические последовательности с длиной периода, экспоненциально зависящей от характеристик автомата.
- Было доказано, что найдется такой автомат с магазинной памятью с однобуквенным магазином, который способен преобразовывать входную последовательность, увеличивая ее период квадратичным образом.
- Если же в магазине автомата с магазинной памятью разрешить иметь хотя бы два символа, то найдется такой автомат, который сможет преобразовывать входную последовательность, увеличивая ее период полиномиально.

Далее работа состоит из 7 разделов, включая введение, заключение и список литературы. Во втором разделе приводятся основные определения и постановка задачи. Следующие две части посвящены изучению автономных автоматов с магазинной памятью. В третьем разделе изучается случай, когда алфавит магазина содержит больше двух символов, а в четвёртом — случай однобуквенного магазина. В пятом разделе работы рассматривается автомат с магазинной памятью со входом. Далее следуют заключение и список литературы.

2. Определения

Инициальным детерминированным автоматом с магазинной памятью будем называть "девятку"

$$P = (A, Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0),$$

где A — входной алфавит, Q — конечное множество состояний, B — выходной алфавит, Γ — алфавит памяти (алфавит ленты магазина), $\varphi : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda) \to Q$ — функция переходов, $\psi : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda) \to B$ — функция выхода, $\eta : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda) \to \Gamma^*$ — функция памяти, $q_0 \in Q$ — начальное состояние, $\gamma_0 \in \Gamma^*$ — начальная запись в магазине.

Функционирование P можно определить с помощью системы канонических уравнений, которые задают в каждый момент времени t состояние автомата $q(t)$, записанное в магазине слово $\gamma(t)$ и выход автомата $b(t)$ при подаче на вход $a(t)$:

$$\begin{cases} q(0) = q_0, \\ \gamma(0) = \gamma_0, \\ z(t) = LS(\gamma(t)), \\ q(t+1) = \varphi(a(t), q(t), z(t)), \\ \gamma(t+1) = S(\gamma(t))\eta(a(t), q(t), z(t)), \\ b(t) = \psi(a(t), q(t), z(t)), \end{cases}$$

где $LS : \Gamma^* \to \Gamma \cup \{\lambda\}$ возвращает последний символ при подаче непустого слова и $LS(\lambda) = \lambda$, а $S : \Gamma^* \to \Gamma^*$ стирает последний символ входного слова и $S(\lambda) = \lambda$.

Инициальный автомат с магазинной памятью определяет детерминированную функцию $f : A^* \to B^*$. Обозначим через $\mathcal{M}(A, B)$ множество детерминированных функций, порождаемых автоматами с магазинной памятью. Отметим, что $\mathcal{M}(A, B)$ содержит множество ограниченно-детерминированных функций.

Обозначим $n = |Q|$, $m = |\Gamma|$, $k = \max\limits_{(q,z) \in Q \times \Gamma \cup \{\lambda\}} |\eta(q, z)|$ и будем говорить, что $P \in \mathcal{M}(n, m, k)$. Здесь n — число состояний, m — арность (или ширина) магазина, k — максимально возможная длина записи в магазин за один такт.

Будем говорить, что $P_0 = (Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0)$, — инициальный автомат с магазинной памятью без входа, если он удовлетворяет системе канонических уравнений:

$$\begin{cases} q(0) = q_0, \\ \gamma(0) = \gamma_0, \\ z(t) = LS(\gamma(t)), \\ q(t+1) = \varphi(q(t), z(t)), \\ \gamma(t+1) = S(\gamma(t))\eta(q(t), z(t)), \\ b(t) = \psi(q(t), z(t)). \end{cases}$$

Будем говорить, что автомат с магазинной памятью без входа P_0 лежит в $\mathcal{M}_0(n, m, k)$, если $n = |Q|$, $m = |\Gamma|$, $k = \max\limits_{(q,z) \in Q \times \Gamma \cup \{\lambda\}} |\eta(q, z)|$. Для автомата с магазинной памятью без входа обозначим $L(P)$ минимальную длину периода периодической последовательности, которую он генерирует. Нас будет интересовать максимальная длина периода в классе автоматов $\mathcal{M}_0(n, m, k)$, а именно:

$$L(n, m, k) = \max_{P \in \mathcal{M}_0(n,m,k)} L(P).$$

Для оценки длины периода автономного автомата с магазинной памятью удобно пользоваться следующими функциями: $\omega(q, \gamma) : Q \times \Gamma^* \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ и $\pi(q, \gamma) : Q \times \Gamma^* \to Q$, которые формально определим следующим образом. Пусть автомат находится в состоянии q, а в магазине лежит слово γ. Если существует такое минимальное положительное количество тактов τ работы автомата, что магазин становится пустым, а автомат переходит в состояние q', то положим, что $\omega(q, \gamma) = \tau$, а $\pi(q, \gamma) = q'$, иначе $\omega(q, \gamma) = \infty$, а значение $\pi(q, \gamma)$ не определено.

Для автомата с магазинной памятью со входом P и слова α из A^+ обозначим $L(P, \alpha)$ — период выходной последовательности при подаче последовательности α^∞ на вход автомату с магазинной памятью P.

Данная работа посвящена исследованию свойств функций $L(n, m, k)$ и $L(P, \alpha)$.

3. Периодическиеские свойства автономных автоматов с магазинной памятью при $|\Gamma| > 1$

3.1. Периодичность выходной последовательности

Известно, что автоматы автономные с магазинной памятью генерируют периодические последовательности [22]. Приведем свое доказательство этого факта в принятых обозначениях.

Теорема 1 ([22])**.** *Автономный автомат с магазинной памятью* $P = (Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0)$ *генерирует периодическую выходную последовательность.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что автомат имеет самую общую функцию выхода, то есть $B = Q \times \Gamma \cup \{\lambda\}$ и $\psi(q, z) = (q, z)$. Рассмотрим последовательности $q(t), \gamma(t), z(t)$, заданные каноническими уравнениями. Для целого $h > 0$ определим $M(h) = \{t \mid |\gamma(t)| \le h\}$.

Если найдётся такое h_0, что $|M(h_0)| = \infty$, то это означет, что найдутся такие t_1 и t_2 из $M(h_0)$, что $q(t_1) = q(t_2)$ и $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, что и доказывает периодичность выходной последовательности в силу детерминированности канонических уравнений.

Пусть теперь для любого h выполнено, что $|M(h)| < \infty$. Заметим, что $M(h+1) \supseteq M(h)$. Значит, начиная с некоторого номера H, будет выполнено, что $|M(h)| > 0$ при $h > H$ и, следовательно, корректно определена последовательность $t_h = \max M(h)$. В последовательности t_h найдутся такие $t_{h_1} < t_{h_2}$, что $q(t_{h_1}) = q(t_{h_2})$ и $z(t_{h_1}) = z(t_{h_2})$. Из определения последовательности t_h следует, что функционирование автомата, начиная с моментов t_h, зависит лишь от верхнего символа магазина и состояния автомата. Тогда из детерминированности канонических уравнений получаем, что для любого неотрицательного целого τ выполнено $q(t_{h_1}+\tau) = q(t_{h_2}+\tau)$ и $z(t_{h_1}+\tau) = z(t_{h_2}+\tau)$, откуда и следует периодичность последовательностей $q(t)$ и $z(t)$ и выходной последовательности.

□

3.2. Верхняя оценка

Теорема 2. *При* $k > 1$

$$L(n, m, k) \le \frac{n(k^{nm+1} - 1)}{k - 1}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный автономный автомат с магазинной памятью $P = (Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0)$ из $\mathcal{M}_0(n, m, k)$ и докажем оценку для $L(P)$. Не ограничивая общность рассуждения, можно считать, что у выходной последовательности отсутствует предпериод и что автомат имеет самую общую функцию выхода, то есть $B = Q \times \Gamma \cup \{\lambda\}$ и $\psi(q, z) = (q, z)$. Пусть последовательности $q(t), \gamma(t), z(t)$ заданы каноническими уравнениями автомата P.

Рассмотрим несколько случаев.

Пусть автомат P достигает дна магазина бесконечное число раз, то есть любой записанный символ будет удален из магазина. В этом случае для всех достижимых пар из $Q \times \Gamma^*$ определены функции ω и π. Нас будут интересовать значения функций на однобуквенных словах. Причем для каждого правила записи в магазин $\eta(q, z) = \alpha(1)...\alpha(\ell)$ можно записать, что

$$\omega(q, z) = 1 + \omega(q_\ell, \alpha(\ell)) + \omega(q_{\ell-1}, \alpha(\ell - 1)) + ... + \omega(q_1, \alpha(1)),$$

где $q_\ell = \varphi(q, z)$, и $q_i = \pi(q_{i+1}, \alpha(i + 1))$.

Таким образом, можно составить систему линейных уравнений на значения $w(q, z)$. Пусть вектор $\vec{\omega} = (\omega_1, ..., \omega_{nm})$ — решение этой системы, причем упорядоченное по возрастанию. Очевидно, что $\omega_1 = 1$, $\omega_i \leq 1 + k\omega_{i-1}$ при $i > 1$. Из этих соотношений следует, что

$$\omega_i \leq \sum_{j=0}^{i-1} k^j.$$

Значит, для длины периода выполнено

$$L(P) \leq \sum_{q \in Q} \omega(q, \lambda) \leq n(1 + k\omega_1) \leq n \sum_{i=0}^{nm} k^i \leq \frac{n(k^{nm+1} - 1)}{k - 1}.$$

Рассмотрим следующий случай. Пусть последовательность $|\gamma(t)|$ ограничена и $|\gamma(t)| > 0$. Рассмотрим $\ell = \min\limits_{0<t\leq L(P)} |\gamma(t)|$. Обозначим $\gamma' = \gamma(t_0)$ и $q' = q(t_0)$, где t_0 таково, что $|\gamma(t_0)| = l$. Не ограничивая общности рассуждения, можно считать, что $\gamma_0 = \gamma'$ и $q_0 = q'$. Рассмотрим автомат P', который получится из автомата P заменой начального слова в магазине на $LS(\gamma')$. Очевидно, что P и P' геренируют одни и те же периодические последовательности. Теперь изменим поведение автомата P' следующим образом. Тот такт работы, когда у автомата P'

в магазине находится однобуквенное слово $LS(\gamma')$, а сам автомат находится в состоянии q', разобьем на два такта: в первый такт мы стираем $LS(\gamma')$ и остаемся в том же состоянии q', а во втором такте пишем в магазин нужное слово и переходим в следующее состояние. Таким образом, полученный автомат удовлетворяет предыдущему случаю, а длина периода последовательности, которую он генерирует на 1 больше, чем у автомата P. Таким образом, оценка верна и в данном случае.

Рассмотрим последний случай. Пусть последовательность $|\gamma(t)|$ не ограничена. Пусть $\ell = \min\limits_{0<t\le L(P)} |\gamma(t)|$. Обозначим $\gamma' = \gamma(t_0)$ и $q' = q(t_0)$, где t_0 таково, что $|\gamma(t_0)| = l$. Не ограничивая общности рассуждения, можно считать, что $\gamma_0 = \gamma'$ и $q_0 = q'$. Рассмотрим автомат P', который получится из автомата P заменой начального слова в магазине на $LS(\gamma')$. Очевидно, что P и P' геренируют одни и те же периодические последовательности. Теперь изменим поведение автомата P' следующим образом. Добавим состояние q''. Автомат P' из состояния q' переходит в q'', в котором опустошается магазин. При пустом магазине в состоянии q'' P' ведет себя так же, как автомат P, когда находится в состоянии q' и видит символ $LS(\gamma')$ магазина. Полученный автомат удовлетворяет первому рассматриваемому случаю. Учитывая, что $\omega(q'', z) = 1$, видим, что добавленное состояние не увеличивает оценку, что и завершает доказательство.

□

Пример 1.

Рассмотрим автомат $P_1 = (Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0)$, где $Q = \{q\}$, $B = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{1, 2, ..., m\}$, $q_0 = q$, $\gamma_0 = \lambda$. Функция переходов тривиальна. Функция выхода выдает 1, если магазин пуст; в остальных случаях — 0. Функцию памяти определим следующим образом:

$$\eta(q, z) = \begin{cases} 1^k, \text{ если } z = \lambda, \\ (i+1)^k, \text{ если } z = i < m, \\ \lambda, \text{ если } z = m, \end{cases}$$

где натуральное число $k > 1$. Для данного автомата выпишем систему:

$$\begin{cases} \omega(q,\lambda) = 1 + k\omega(q,1), \\ \omega(q,1) = 1 + k\omega(q,2), \\ \dots \\ \omega(q,i) = 1 + k\omega(q,i+1), \\ \dots \\ \omega(q,m-1) = 1 + k\omega(q,m), \\ \omega(q,m) = 1. \end{cases}$$

Длиной периода в данном автомате можно считать количество тактов работы автомата между пустыми состояниями магазина, то есть $\omega(q,\lambda)$. Из системы видно, что

$$\omega(q,\lambda) = \sum_{i=0}^{m} k^i.$$

Этот пример показывает достижимость оценки сверху из теоремы для случая $|Q| = 1$, то есть из него следует, что для автомата с одним состоянием верхняя и нижняя оценки совпадают, то есть верна следующая теорема.

Теорема 3. *При $k > 1$*

$$L(1,m,k) = \frac{(k^{m+1} - 1)}{k-1}.$$

3.3. Нижняя оценка

Лемма 1. *Пусть дана система уравнений*

$$\begin{cases} x_0 = a + bx_1, \\ x_1 = a + bx_2, \\ \dots \\ x_{m-1} = a + bx_m, \\ x_m = c, \end{cases}$$

где a, b, c — некоторые действительные параметры, причем $b \neq 1$. Тогда

$$x_0 = a\frac{b^m - 1}{b-1} + b^m c.$$

Доказательство.

$$x_0 = a + bx_1 = a + b(a + bx_2) = a + ab + b^2x_2 = a + ab + ab^2 + b^3x_3 =$$

$$= ... = a(1 + b + b^2 + ... + b^{m-1}) + b^m x_m.$$

Отсюда и получаем, что

$$x_0 = a\frac{b^m - 1}{b - 1} + b^m c,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Пример 2.

Пусть автономный автомат с магазинной памятью

$$P_m = (Q, B, \Gamma, \varphi, \eta, \psi, q_n, \lambda) \in \mathcal{M}_0(n, m, k),$$

где $B = \{0, 1\}$, $Q = \{q_1, ..., q_n\}$, $\Gamma = \{1, ..., m\}$, $m > 1$,

$$\psi(q, z) = \begin{cases} 1, \text{ если } q = q_1, \ z = \lambda, \\ 0, \text{ иначе}, \end{cases}$$

$$\varphi(q, z) = \begin{cases} q_{i+1}, \text{ если } q = q_i, \ i \neq n, \ z = m - 1, \\ q_{i-1}, \text{ если } q = q_i, \ i \neq 0, \ z = m, \\ q, \text{ иначе}, \end{cases}$$

$$\eta(q, z) = \begin{cases} (z + 1)^k, \text{ если } z < m - 1, \\ m1^{k-1}, \text{ если } q \neq q_n, \ z = m - 1, \\ \lambda, \text{ иначе.}, \end{cases}$$

На рисунке 1 приведем диаграмму этого автомата. Переходы автомата описываются следующим шаблоном z/η, то есть из данного состояния q, при значении верхнего символа магазина z, автомат записывает на выходную ленту $\psi(q, z)$, а в магазине стирает последний символ и дописывает слово η. Следующее состояние указывает стрелка. Начальное состояние помечено символом "$*$" и через запятую указана начальная запись в магазине. Для удобства записи формул будем считать, что пустому значению λ соотвествует значение $z = 0$.

Из уравнений следует, что

$$\omega(q, z) = 1 + k\omega(q, z + 1), \ z < m - 1.$$

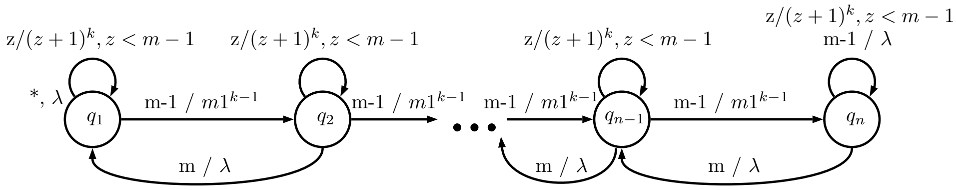

Рис. 1. Диаграмма автомата P_m.

Очевидно, что $\omega(q_n, m-1) = 1$. При $i \neq n$ имеем:

$$\omega(q_i, m) = 1 + \omega(q_{i+1}, m1^{k-1}) = 1 + (k-1)\omega(q_{i+1}, 1) + \omega(q_{i+1}, m).$$

Пусть ω_0 — длина периода последовательности, сгенерированной автоматом с магазинной памятью. Тогда $\omega_0 = 1 + k\omega(q_1, 1)$. Обозначая $\omega_{i,j} = \omega(q_i, j)$ получаем следующую систему линейных уравнений при $m > 2$ (случай $m = 2$ будет рассмотрен отдельно):

$$\begin{cases}
\omega_{n,m-1} = 1, \\
\omega_{n,m-2} = 1 + k\omega_{n,m-1}, \\
... \\
\omega_{n,i} = 1 + k\omega_{n,i+1}, \\
... \\
\omega_{n,1} = 1 + k\omega_{n,2}, \\
\omega_{n-1,m-1} = 2 + (k-1)\omega_{n,1}, \\
... \\
\omega_{j,m-2} = 1 + k\omega_{j,m-1}, \\
... \\
\omega_{j,i} = 1 + k\omega_{j,i+1}, \\
... \\
\omega_{j,1} = 1 + k\omega_{j,2}, \\
\omega_{j-1,m-1} = 2 + (k-1)\omega_{j,1}, \\
... \\
\omega_{1,1} = 1 + k\omega_{1,2}, \\
\omega_0 = 1 + k\omega_{1,1}.
\end{cases}$$

Применяя лемму 1 к уравнениям вида $w_{i,j} = 1 + kw_{i,j+1}$ при каждом фиксированном i и $j = 1, ..., m-2$, удается получить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \omega_{n,m-1} = 1, \\ \omega_{n,1} = \frac{k^{m-2}-1}{k-1} + \omega_{n,m-1}k^{m-2}, \\ \omega_{n-1,m-1} = 2 + (k-1)\omega_{n,1}, \\ ... \\ \omega_{i,1} = \frac{k^{m-2}-1}{k-1} + \omega_{i,m-1}k^{m-2}, \\ \omega_{i-1,m-1} = 2 + (k-1)\omega_{i,1}, \\ ... \\ \omega_{2,1} = \frac{k^{m-2}-1}{k-1} + \omega_{2,m-1}k^{m-2}, \\ \omega_{1,m-1} = 2 + (k-1)\omega_{2,1}, \\ \omega_0 = \frac{k^{m-1}-1}{k-1} + k^{m-1}\omega_{1,m-1}. \end{cases}$$

Преобразовывая дальше, получаем:

$$\begin{cases} \omega_{n,m-1} = 1, \\ \omega_{n-1,m-1} = 1 + k^{m-2} + \omega_{n,m-1}(k^{m-1} - k^{m-2}), \\ ... \\ \omega_{i-1,m-1} = 1 + k^{m-2} + \omega_{i,m-1}(k^{m-1} - k^{m-2}), \\ ... \\ \omega_{1,m-1} = 1 + k^{m-2} + \omega_{2,m-1}(k^{m-1} - k^{m-2}), \\ \omega_0 = \frac{k^{m-1}-1}{k-1} + k^{m-1}\omega_{1,m-1}. \end{cases}$$

К полученной системе снова применим лемму 1. Получаем, что

$$\begin{cases} \omega_{1,m-1} = (1 + k^{m-2})\frac{(k^{m-1}-k^{m-2})^{n-1}-1}{k^{m-1}-k^{m-2}-1} + (k^{m-1} - k^{m-2})^{n-1}, \\ \omega_0 = \frac{k^{m-1}-1}{k-1} + k^{m-1}\omega_{1,m-1}. \end{cases}$$

Откуда находим период выходной последовательности:

$$\omega_0 = \frac{k^{m-1} - 1}{k - 1} + k^{m-1}((1+k^{m-2})\frac{(k^{m-1} - k^{m-2})^{n-1} - 1}{k^{m-1} - k^{m-2} - 1} + (k^{m-1} - k^{m-2})^{n-1}).$$

Теперь перейдем к рассмотрению случая, когда $m = 2$. В этом случае получается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \omega_{n,1} = 1, \\ \omega_{n-1,1} = 2 + (k-1)\omega_{n,1}, \\ ... \\ \omega_{i-1,1} = 2 + (k-1)\omega_{i,1}, \\ ... \\ \omega_{1,m-1} = 2 + (k-1)\omega_{2,1}, \\ \omega_0 = 1 + k\omega_{1,m-1}. \end{cases}$$

Применяя лемму 1 и преобразовывая, получаем, что

$$\omega_0 = \begin{cases} 4n-1, \text{ если } k=2, \\ 1 + \frac{k}{k-2}((k-1)^n + (k-1)^{n-1} - 2), \text{ если } k > 2. \end{cases}$$

Объединяя обе формулы и учитывая, что $L(P_m) = \omega_0$, получаем итоговую:

$$L(P_m) = \begin{cases} 4n-1, \text{ если } m=2,\ k=2, \\ \frac{k^{m-1}-1}{k-1} + k^{m-1}((1+k^{m-2})\frac{(k^{m-1}-k^{m-2})^{n-1}-1}{k^{m-1}-k^{m-2}-1} + (k^{m-1}-k^{m-2})^{n-1}), \text{ иначе.} \end{cases}$$

К сожалению, данный пример автомата для случая $k=2,\ m=2$ вырождается, то есть длина периода в этом случае существенно отличается. Поэтому рассмотрим следующий пример.

Пример 3.

Пусть автономный автомат с магазинной памятью

$$P(n') = (Q, B, \Gamma, \varphi, \eta, \psi, q_s^1, \lambda) \in \mathcal{M}_0(n, m, k),$$

где $n' \in \mathbb{N}$ — параметр, $B = \{0,1\}$, $Q = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n'} Q_i$, где $Q_i = \{q_s^i, q_{s1}^i, q_{s2}^i, q_1^i, q_2^i, ..., q_8^i\}$, $\Gamma = \{1, 2\}$,

$$\psi(q, z) = \begin{cases} 1, \text{ если } q = q_s^1,\ z = \lambda, \\ 0, \text{ иначе,} \end{cases}$$

$$\varphi(q,z)=\begin{cases}q_s^i,\ \text{если } q=q_{s2}^{i+1},\ z=2,\ i<n',\\ q_s^i,\ \text{если } q=q_8^{i-1},\ i>1,\\ q_{s1}^i,\ \text{если } q=q_s^i,\ z=1,\\ q_{s2}^i,\ \text{если } q=q_s^i,\ z=2,\\ q_1^i,\ \text{если } q=q_s^i,\ z=\lambda,\\ q_2^i,\ \text{если } q=q_1^i,\\ q_3^i,\ \text{если } q=q_2^i,\\ q_3^i,\ \text{если } q=q_{s1}^i,\ z=1,\\ q_4^i,\ \text{если } q=q_3^i,\\ q_5^i,\ \text{если } q=q_4^i,\\ q_5^i,\ \text{если } q=q_{s2}^i,\ z=1,\\ q_6^i,\ \text{если } q=q_5^i,\\ q_7^i,\ \text{если } q=q_6^i,\\ q_7^i,\ \text{если } q=q_{s1}^i,\ z=2,\ i<n',\\ q_8^i,\ \text{если } q=q_7^i,\ i<n',\\ q_s^{n'},\ \text{если } q=q_{s1}^{n'},\ z=2,\\ q_s^{n'},\ \text{если } q=q_7^{n'},\end{cases}$$

$$\eta(q,z)=\begin{cases}\lambda,\ \text{если } q=q_{s2}^{i+1},\ z=2,\ i<n',\\ 11,\ \text{если } q=q_8^{i-1},\ i>1,\\ \lambda,\ \text{если } q=q_s^i,\ z=1,\\ \lambda,\ \text{если } q=q_s^i,\ z=2,\\ 1x,\ \text{если } q=q_s^i,\ z=\lambda,\\ 1x,\ \text{если } q=q_1^i,\\ 1x,\ \text{если } q=q_2^i,\\ 1x,\ \text{если } q=q_{s1}^i,\ z=1,\\ 2x,\ \text{если } q=q_3^i,\\ 2x,\ \text{если } q=q_4^i,\\ 2x,\ \text{если } q=q_{s2}^i,\ z=1,\\ 1x,\ \text{если } q=q_5^i,\\ 2x,\ \text{если } q=q_6^i,\\ 2x,\ \text{если } q=q_{s1}^i,\ z=2,\ i<n',\\ 2x,\ \text{если } q=q_7^i,\ i<n',\\ \lambda,\ \text{если } q=q_{s1}^{n'},\ z=2,\\ 1,\ \text{если } q=q_7^{n'}.\end{cases}$$

На рисунке 2 приведем диаграмму этого автомата. Переходы автомата описываются следующим шаблоном z/η, то есть из данного состояния, при значении верхнего символа магазина z, автомат записывает на выходную ленту $\psi(q,z)$, а в магазине стирает последний символ и дописывает слово η. Следующее состояние указывает стрелка. Начальное состояние помечено символом " $*$ " и через запятую указана начальная запись в магазине. Для удобства записи формул будем считать, что пустому значению λ соотвествует значение $z=0$.

Данный автомат имитирует работу автомата из предыдущего примера с n' состояниями, $k=2$, $m=4$. Обозначим его P'. Поскольку в текущем случае $\Gamma=\{1,2\}$, то чтобы имитировать автомат мы будем использовать кодировку, приведенную в таблице 1.

Каждому состоянию P' соотвествует множество состояний Q_i. Текущий автомат устроен таким образом, что в состоянии q_s^i в магазине будет записан корректный код. И каждому переход из состояния q_i в q_j автомата P' соовествует переход из состояний q_s^i в q_s^j текущего автомата с

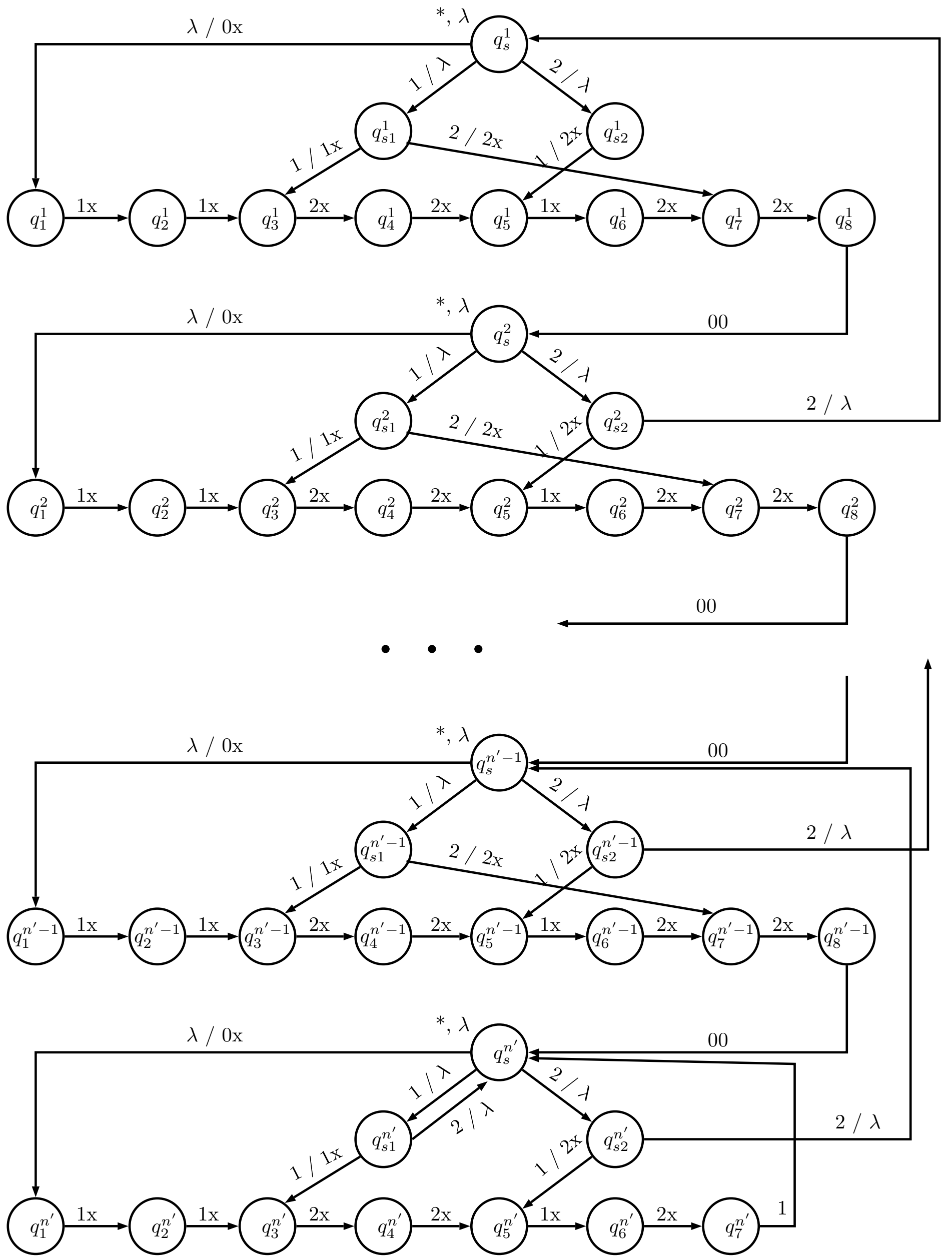

Рис. 2. Диаграмма автомата $P(n')$.

$\#1$	11
$\#2$	12
$\#3$	21
$\#4$	22

Таблица 1. Используемая кодировка символов.

:

аналогичной трансформацией магазина. Заметим, что в текущем случае на этот переход может потребоваться более одного такта.

Теперь, когда стало понятно из каких соображений строился автомат, строго подсчитаем длину периода выходящей последовательности.

Из уравнений автомата получаем:

$$\omega(q_s^{n'}, \#3) = 2,$$

$$\omega(q_s^{n'}, \#2) = 5 + \omega(q_s^{n'}, \#3\#3) = 5 + 2\omega(q_s^{n'}, \#3) = 9,$$

$$\omega(q_s^{n'}, \#1) = 7 + \omega(q_s^{n'}, \#2\#3\#3) = 7 + 2\omega(q_s^{n'}, \#3) + \omega(q_s^{n'}, \#2) = 20.$$

Пусть $1 < i < n'$. Тогда

$$\omega(q_s^i, \#3) = 4 + \omega(q_s^{i+1}, \#4\#1) = 4 + \omega(q_s^{i+1}, \#4) + \omega(q_s^{i+1}, \#1) =$$
$$= 6 + \omega(q_s^{i+1}, \#1)$$

и

$$\omega(q_s^i, \#2) = 6 + \omega(q_s^{i+1}, \#3\#4\#1) =$$
$$= 6 + \omega(q_s^{i+1}, \#1) + \omega(q_s^{i+1}, \#4) + \omega(q_s^i, \#3) =$$
$$= 14 + 2\omega(q_s^{i+1}, \#1).$$

Откуда получаем, что

$$\omega(q_s^i, \#1) = 8 + \omega(q_s^{i+1}, \#2\#3\#4\#1) = 30 + 4\omega(q_s^{i+1}, \#1).$$

Из полученных выше уравнений составим следующую систему:

$$\begin{cases} \omega(q_s^{n'}, \#1) = 20, \\ \omega(q_s^{n'-1}, \#1) = 30 + 4\omega(q_s^{n'}, \#1), \\ ... \\ \omega(q_s^{i-1}, \#1) = 30 + 4\omega(q_s^{i}, \#1), \\ ... \\ \omega(q_s^{1}, \#1) = 30 + 4\omega(q_s^{2}, \#1). \end{cases}$$

Воспользовавшись леммой, получаем, что

$$\omega(q_s^1, \#1) = 30 \cdot 4^{n'-1} - 10.$$

Теперь найдем длину периода

$$\tau = \omega(q_s^1, \lambda) = 9 + \omega(q_s^2, \#1\#2\#3\#4\#1) =$$

$$9 + \omega(q_s^1, \#1\#2\#3) + \omega(q_s^2, \#4\#1) = 11 + \omega(q_s^1, \#1\#2\#3) +$$

$$+\omega(q_s^2, \#1) = 11 + \omega(q_s^1, \#1) + \omega(q_s^1, \#2) + \omega(q_s^1, \#3) + \omega(q_s^2, \#1) =$$

$$= 11 + \omega(q_s^1, \#1) + (14 + 2\omega(q_s^2, \#1)) + (6 + \omega(q_s^{i+1}, \#1)) + \omega(q_s^2, \#1) =$$

$$= 31 + \omega(q_s^1, \#1) + 4\omega(q_s^2, \#1) = 1 + 2\omega(q_s^1, \#1) = 15 \cdot 4^{n'} - 19.$$

Подставляя $n' = \frac{n-1}{9}$, получаем

$$\tau = 15 \cdot 4^{\frac{n-1}{9}} - 19.$$

Из примеров следует, что доказана следующая теорема:

Теорема 4. *При* $m > 1$, $k > 1$

$$L(n, m, k) \geq \begin{cases} 15 \cdot 4^{\frac{n-1}{9}} - 19, \ \text{при } m = 2, \ k = 2, \\ (\frac{k-1}{k})^{n-1} k^{(m-1)n}, \ \text{иначе}. \end{cases}$$

Замечание. При доказательстве нижней оценки было существенно использовано то, что алфавит магазина содержит больше одного символа. В следующем разделе отдельно рассматривается случай однобуквенного магазина.

4. Периодические свойства автономных автоматов с однобуквенным магазином

Для получения оценок на $L(n, 1, k)$ введем дополнительные ограничения на рассматриваемые автоматы. Пусть P — автономный автомат с магазинной памятью с однобуквенным магазином. Будем считать, что P генерирует периодическую последовательность без предпериода и все состояния достижимые и встречаются бесконечное число раз в последовательности $q(t)$, заданной каноническими уравнениями. Заметим, что если в последовательности $\gamma(t)$ пустое слово встречается лишь конечное число раз, то из-за отсутствия предпериода магазин не бывает пустым. Поэтому в этом случае P функционируют в точности как автомат без магазина, то есть конечный автомат. Разумеется, этот случай нас не интересует. Поэтому будем считать, что пустое слово в последовательности $\gamma(t)$ будет встречаться бесконечное число раз. Для удобства будем считать, что начальная запись в магазине пустая, то есть $\gamma_0 = \lambda$. Будем рассматривать наиболее общую функцию выхода $\psi(q, z) = (q, z)$, то есть $B = Q \times \Gamma \cup \{\lambda\}$. Очевидно, что наложение описанных ограничений на класс автоматов не меняют максимальную длину периода внутри класса автоматов.

Обозначим через $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$ множество автоматов P из $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$, для которых выполнены описанные выше ограничения, а именно:

- периодическая последовательность, сгенерированная P, не имеет предпериода;
- все состояния достижимы бесконечное число раз;
- $\gamma_0 = \lambda$;
- $B = Q \times \Gamma \cup \{\lambda\}$ и $\psi(q, z) = (q, z)$.

Очевидно, что выполнено

$$L(n, 1, k) = \max_{P \in \mathcal{M}'_0(n,1,k)} L(P),$$

поэтому далее будем рассматривать автоматы только из $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$.

Введем еще несколько определений, необходимых для дальнейших рассуждений. Для автомата P выделим множество стирающих состояний

$$S = \{q \in Q \mid \eta(q, 1) = \lambda\}.$$

Если $q \in W = Q \backslash S$, то будем говорить, что состояние пишущее. В множестве пишущих состояний выделим подмножество нейтральных состояний

$$N = \{q \in Q \mid \eta(q, 1) = 1\},$$

то есть таких, при прохождении через которые непустое слово, записанное в магазине, не изменяет свою длину.

Если в автомате P найдется множество состояний $C = \{c_1, ..., c_\ell\} \subseteq Q$ такое, что выполнено $\varphi(c_i, 1) = c_{i+1}$ для $i = 1, .., l-1$ и $\varphi(c_\ell, 1) = c_1$, то будем говорить, что C является автоматным циклом. Длиной автоматного цикла C будем называть число состояний в этом цикле.

Для автомата P однозначно определены последовательности состояний и состояний магазина согласно каноническим уравнениям. Будем говорить, что автоматный цикл C достижим, если найдется такой момент времени t_1, что выполнены следующие условия:

1) $\{q(t_1), q(t_1 + 1), ..., q(t_1 + |C| - 1)\} = C$;

2) $z(t_1) = z(t_1 + 1) = ... = z(t_1 + |C| - 1) = 1$.

Каждому автоматному циклу сопоставим индекс — число, на которое изменится длина памяти магазина при одном проходе по нему. Будем называть автоматный цикл стирающим, если индекс отрицательный, то есть количество символов в магазине при одном проходе по циклу уменьшается. Если индекс автоматного цикла неотрицательный, то будем говорить, что автоматный цикл пишущий.

Будем называть конфигурацией автомата пару его состояние и состояние магазина $c(t) = (q(t), \gamma(t))$. Будем говорить, что конфигурация c_2 достижима из конфигурации c_1, и писать $c_1 \Rightarrow c_2$, если автомат с магазинной памятью из конфигурации c_1 перейдет в конфигурацию c_2 через конечное число тактов.

В некоторых случаях нас будет интересовать поведение автомата при непустом магазине. В таких случаях будем говорить, что конфигурация c_2 достижима без опустошения магазина из конфигурации c_1, и писать $c_1 \Rrightarrow c_2$, если конфигурация c_2 достижима из конфигурации c_1 и во всех промежуточных конфигурация, исключая c_1 и c_2, магазин не пуст. Заметим, что и c_1, и c_2 могут иметь пустой магазин.

4.1. Доказательство нижней оценки L(n,1,k)

Пример 4.

Пусть автономный автомат с магазинной памятью

$$P(s) = (Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, r_h, \lambda) \in \mathcal{M}_0(n, 1, k),$$

где $0 < s < n$, $B = \{0, 1\}$, $Q = \{q_1, ..., q_{n-s}, r_1, ..., r_s\}$, $\Gamma = \{1\}$, $h = (((k-1)(n-s+1)+2) \mod s) + 1$

$$\psi(q, z) = \begin{cases} 1, \text{ если } q = q_h, \ z = \lambda, \\ 0, \text{ иначе}, \end{cases}$$

$$\varphi(q, z) = \begin{cases} q_{i+1}, \text{ если } q = q_i, \ i \neq n-s, \\ r_1, \text{ если } q = q_{n-s}, \\ r_{i+1}, \text{ если } q = r_i, \ z = 1, \\ q_1, \text{ если } q = r_h, \ z = \lambda, \\ q_{1+[\frac{(h-1-i) \mod s}{k-1}]}, \text{ если } q = r_i, \ i \neq h, \ z = \lambda, \\ q, \text{ иначе}, \end{cases}$$

$$\eta(q, z) = \begin{cases} 1^k, \text{ если } q = q_i, \\ 1^k, \text{ если } q = r_h, \ z = \lambda, \\ 1^{k-1-((h-1-i) \mod s) \mod (k-1)}, \text{ если } q = r_i, \ i \neq h, \ z = \lambda, \\ \lambda, \text{ иначе}. \end{cases}$$

На рисунке 3 приведем диаграмму этого автомата для $n = 8$, $k = 3$ и $s = 5$. Переходы автомата описываются следующим шаблоном z/η, то есть из данного состояния, при значении верхнего символа магазина z, автомат записывает на выходную ленту $\psi(q, z)$, а в магазине стирает последний символ и дописывает слово η. Следующее состояние указывает стрелка. Начальное состояние помечено "$*$" и через запятую указана начальная запись в магазине.

Опишем функционирование описанного выше автомата $P(s)$ и поясним его канонические уравнения. Автомат начинает работу из состояния r_h и с пустым магазином. Далее автомат максимально заполняет магазин, проходя по состояниям $q_1, ..., q_{n-s}$ до тех пор, пока не попадает в стирающий цикл $r_1, ..., r_s$. В состоянии r_1 в магазине записано $(k-1)(n-s+1)+1$ символов. Так как дальше при каждом заполнении магазина мы будем уменьшать на единицу количество записываемых символов, то состояния, в которых, магазин становится пустым, будут

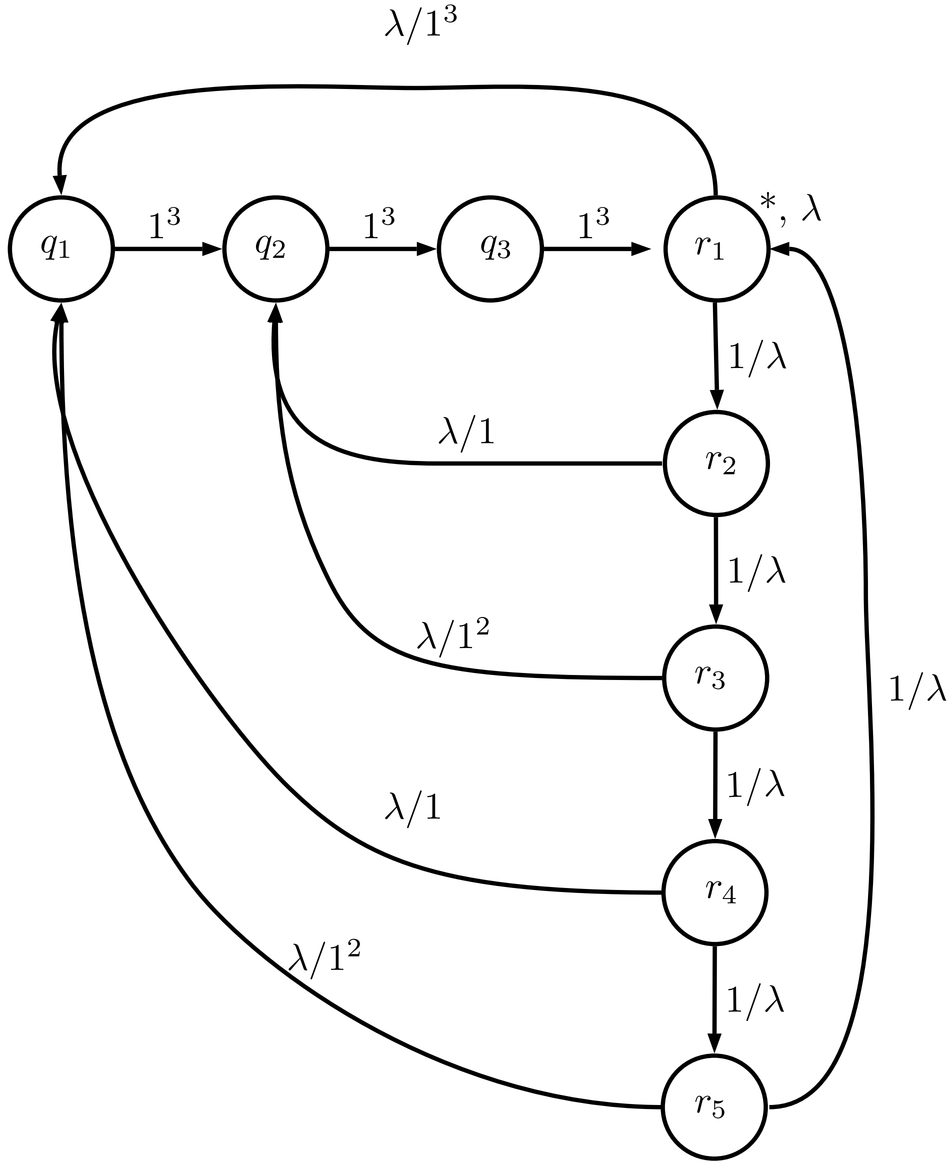

Рис. 3. Диаграмма автомата $P(s)$ при $n = 8$, $k = 3$ и $s = 5$.

меняться последовательно. То есть если мы стартовали из состоянии r_{i+1} при пустом магазине, то, заполнив и опустошив магазин, автомат окажется в состоянии r_i. Исходя из этого, мы и получаем формулу для номера начального состояния. Мы подберем r_h таким, чтобы, заполняя магазин максимально возможным количеством символов, после стирания их попасть в состояние r_{h-1}. Отсюда получаем, что

$$h = (((k-1)(n-s+1)+2) \mod s) + 1.$$

Следующим требующем объяснения моментом в описании уравнений автомата является его поведение при опустошении магазина, то есть в состояниии r_i и $z = \lambda$. По сказанному выше в состоянии r_h автомат пишет максимально возможное количество символов в магазин. Значит, из этого состояния при пустом магазине автомат должен перейти в состояние q_1 и записать при этом слово длины k в магазин. При следующем опустошении магазина мы окажемся в состоянии r_{h-1}. Из этого состояния начинается заполнение магазина. Причем автомат должен записать на единицу меньше символов в магазин. Следовательно, из состояния r_{h-1} автомат перейдет в состояние q_1, и в магазин будет записано слово длины $k-1$. Продолжая опустошать магазин, автомат будет писать на 1 символ меньше и переходить в состояние q_1 до тех пор, пока не придётся записать один символ. После этого мы уже не сможем перейти в состояние q_1, так как зациклимся. Следовательно, мы должны будем перейти в состояние q_2 и записать в магазин $k-1$ символ по той же причине. И далее при переходе из стирающего цикла мы будем писать от $k-1$ до 1 символа в магазин, после чего будем менять состояние перехода.

Подсчитаем длину периода $L(P(s))$. Удобно считать стирающие такты и записывающие по отдельности:

$$L(P(s)) = \tau_{\text{записи}} + \tau_{\text{стирания}},$$

где

$$\tau_{\text{стирания}} = \sum_{i=0}^{s-1}((n-s+1)(k-1)+1-i) = s(k-1)(n-s+1)+s-\frac{s(s-1)}{2},$$

$$\tau_{\text{записи}} = s(n-s+1) - \sum_{i=0}^{s-2}[\frac{i}{k-1}].$$

Таким образом, длина периода сгенерированной им последовательности равна

$$L(P(s)) = sk(n-s+1) + s - \frac{s(s-1)}{2} - \sum_{i=0}^{s-2}[\frac{i}{k-1}].$$

Лемма 2. *Для натуральных* s, $k>1$ *выполнено*

$$\frac{s^2}{2(k-1)} - \frac{3s}{2} \le \sum_{i=0}^{s-2}[\frac{i}{k-1}] \le \frac{s^2}{2(k-1)} + \frac{3s}{2}.$$

Доказательство. Пусть $f(s) = \sum\limits_{i=0}^{s-1}[\frac{i}{k-1}]$. Тогда

$$f(s) = (k-1)\sum_{i=0}^{[\frac{s}{k-1}]-1} i + [\frac{s}{k-1}](s \mod (k-1)) =$$

$$= (k-1)\frac{[\frac{s}{k-1}]([\frac{s}{k-1}]-1)}{2} + [\frac{s}{k-1}](s \mod (k-1)).$$

Отсюда получаем, что

$$f(s) \le (k-1)\frac{\frac{s}{k-1}(\frac{s}{k-1}-1)}{2} = \frac{s^2}{2(k-1)} - \frac{s}{2}$$

и

$$f(s) \ge (k-1)\frac{(\frac{s}{k-1}+1)\frac{s}{k-1}}{2} + s = \frac{s^2}{2(k-1)} + \frac{3s}{2}.$$

Так как

$$\sum_{i=0}^{s-2}[\frac{i}{k-1}] = f(s) - [\frac{s-1}{k-1}],$$

то

$$\frac{s^2}{2(k-1)} - \frac{3s}{2} \le \sum_{i=0}^{s-2}[\frac{i}{k-1}] \le \frac{s^2}{2(k-1)} + \frac{3s}{2},$$

что и требовалось доказать.

□

Применяя лемму, получаем, что

$$L(P(s)) \geq sk(n-s+1)+s-\frac{s(s-1)}{2}-\frac{s^2}{2(k-1)}-\frac{3s}{2} = sk(n-s+1)-\frac{ks^2}{2(k-1)}.$$

Полагая $P = P(s)$ при $s = [\frac{k-1}{2k-1}n]$, получаем, что

$$L(P) \geq [\frac{k-1}{2k-1}n]k(n-[\frac{k-1}{2k-1}n]+1)-\frac{k([\frac{k-1}{2k-1}n])^2}{2(k-1)} \geq$$

$$\geq (\frac{k-1}{2k-1}n-1)k(n-\frac{k-1}{2k-1}n+1)-\frac{k(\frac{k-1}{2k-1}n)^2}{2(k-1)} =$$

$$= \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2-\frac{1}{2k-1}n-1.$$

Данный пример доказывает нижние оценки на $L(n,1,k)$.

Теорема 5. *При $k > 1$ и $n \to \infty$*

$$L(n,1,k) \geq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2(1+o(1)).$$

Теорема 6. *При $n > 1$ и $k \to \infty$*

$$L(n,1,k) \geq \frac{n^2}{4}k(1+o(1)).$$

4.2. Доказательство верхней оценки L(n,1,k)

Сформулируем и докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3. *Пусть P — автомат с магазинной памятью из $\mathcal{M}'_0(n,1,k)$. Тогда существует автомат с магазинной памятью P' из $\mathcal{M}'_0(n,1,k)$, который в процессе функционирования не бывает с пустым магазином два такта подряд, и периоды выходных последовательностей автоматов P и P' отличаются не более чем на n.*

Доказательство. Пусть автомат P при очередном такте стирает последний символ из магазина, оказываясь в некотором состоянии q, и далее проходит еще несколько состояний, не делая записей в магазин. После чего попадает в состояние q_1, в котором пишет непустое слово 1^ℓ и переходит в состояние q_2. Тогда можно трансформировать автомат P так, чтобы из состояния q автомат сразу переходил в q_2 и писал при этом в магазин 1^ℓ. Делая такую трансформацию для всех аналогичных состояний, получаем автомат P', который удовлетворяет условием леммы, так как внутри одного периода автомат может быть с пустым магазином не более n раз. $\square$

4.2.1. Простая верхняя оценка

Теперь непосредственно приступим к доказательству верхней оценки на $L(n,1,k)$.

Лемма 4. *Пусть P — автомат с магазинной памятью из $\mathcal{M}'_0(n,1,k)$. Тогда*

$$L(P) \le n(h_{max}+1),$$

где $h_{max} = \max\limits_t |\gamma(t)|$ — максимальное количество символов, которое может быть записано в магазине.

Доказательство. Заметим, что из определения класса $\mathcal{M}'_0(n,1,k)$ следует, что h_{max} всегда существует, то есть $h_{max} < \infty$. Внутри одного периода автомат может находиться в состоянии q только с разными состояниями магазина от пустого до содержащего h_{max} символов. Суммируя по всем состояниям, получаем требуемую оценку. $\square$

Утверждение 1. *При $k > 1$*

$$L(n,1,k) \le (k-1)n^2 + 2n.$$

Доказательство. Так как среди n состояний должно быть хотя бы одно стирающее, то $n-1$ пишущее состояние не может записать больше $n(k-1)+1$, то есть $h_{max} \le n(k-1)+1$. Подставляя эту оценку в предыдущую лемму, получаем требуемое. $\square$

4.2.2. Случай пишущего автоматного цикла

Лемма 5. *Пусть P — автомат с магазинной памятью из $\mathcal{M}'_0(n,1,k)$. Если в P есть достижимый пишущий автоматный цикл, то период сгенерированной P последовательности равен длине этого цикла.*

Доказательство. Если в P есть достижимый пишущий цикл, то автомат не может его покинуть, так как магазин уже никогда не будет пустым в силу неотрицательности индекса. Значит, период будет равен длине цикла. $\square$

Замечание. В силу доказанной леммы далее не имеет смысл рассматривать автоматы с достижимыми пишущими циклами. Будем считать, что если в автомате есть достижимый цикл, то он стирающий.

4.2.3. Случай без автоматных циклов

В этом разделе будет дана оценка на максимальную длину периода выходной последовательсти для автомата без стирающих циклов.

Лемма 6. *Пусть P — автомат с магазинной памятью из $\mathcal{M}'_0(n,1,k)$. Если P не имеет автоматных циклов, то период сгенерированной P последовательности не превосходит $\frac{k-1}{k}n^2+2n$.*

Доказательство. Оценим h_{max}. Так как в P нет автоматных циклов, то h_{max} не может быть большим. Максимально возможное значение h_{max} можно получить следующем образом. Необходимо в автомате иметь максимально возможное число w пишущих по k символов состояний так, чтобы оставшихся $s=n-w$ состояний хватило, чтобы стереть то, что было записано. Все стирания должы быть сделаны в разных состояниях, так как стирающих циклов нет. Отсюда получаем следующее условие:

$$h_{max} \le (w+1)(k-1)+1 = s.$$

Решая, получаем, что

$$h_{max} \le s = \frac{k-1}{k}n+1.$$

Подставляя h_{max} в полученную выше оценку, получаем требуемое. □

Обозначим $L_0(n,k)=\frac{k-1}{2k}n^2+5n$.

Утверждение 2. *Пусть P — автомат с магазинной памятью из класса $\mathcal{M}'_0(n,1,k)$. Если P не имеет автоматных циклов или имеет только недостижимые пищущие автоматные циклы, то период сгенерированной P последовательности не превосходит $L_0(n,k)$.*

Доказательство. При функционировании автомата P найдется последовательность тактов от t_1 до t_2, когда из пустого магазина автомат заполняет магазин до уровня в h_{max} символов, то есть $\gamma(t_1)=\lambda$, $\gamma(t_2)=1^{h_{max}}$ и $\gamma(t)\ne\lambda$ при $t_1<t\le t_2$. Очевидно, что каждое состояние $q(t)$ при $t_1<t\le t_2$ не может встречаться в одном периоде больше, чем

$|\gamma(t)|+1$ раз в силу определения h_{max}. Пусть $h_{max}=1+h_0+h_1(k-1)$, где $0\leq h_0<k-1$. Нетрудно видеть, что в отрезке от t_1+1 до t_2 найдутся такие t_i, что будет выполнено $|\gamma(t_i)|\leq(k-1)i+1$ при $i=1,...,h_1$ и $q(t_i)\in W$. Учитывая это, получаем, что

$$L(P)\leq(h_{max}+1)(n-h_1)+\sum_{i=1}^{h_1}(2+i(k-1))=$$

$$=(h_{max}+1)n-\sum_{i=1}^{h_1}(h_{max}-2-i(k-1))=$$

$$=(h_{max}+1)n-\sum_{i=1}^{h_1}(h_0+(h_1-i)(k-1)-1)=$$

$$=(h_{max}+1)n+h_1-h_0h_1-\frac{(k-1)h_1(h_1-1)}{2}=$$

$$=(h_{max}+1)n+\frac{h_1(k+2-h_0-h_{max})}{2}\leq(h_{max}+1)n+\frac{h_{max}(k+2-h_{max})}{2(k-1)}.$$

Каждому состоянию q сопоставим число $h(q)$, равное максимальному числу символов в магазине, которое может быть при достижении этого состояния. Заметим, что оценку удалось улучшить за счет уточнения функции $h(q)$ для некоторых пишущих состоятий q пользуясь тем, что автомат за один такт может писать ограниченное количество символов. Теперь сделаем аналогичное уточнение при стирании магазина, то есть для стирающих состояний.

Покажем, что в P для любого натурального d такого, что $1\leq d<h_{max}$, найдется такое стирающее q, что $h(q)=d$. Рассмотрим последовательность тактов от t_2 до t_3, когда автомат стирает магазин от h_{max} до пустого, то есть $\gamma(t_2)=1^{h_{max}}$, $\gamma(t_3)=\lambda$ и $\gamma(t)\neq\lambda$ при $t_2<t<t_3$. В этом отрезке найдется такой номер t', что $q(t')=q_0\in S$ и $|\gamma(t')|=d$. Если $h(q_0)=d$, то заканчиваем процедуру поиска. Если $h(q_0)>d$, то это означает, что найдется момент времени t_4 такой, что $q(t_4)=q_0$ и $|\gamma(t_4)|>d$. Тогда пусть t_5 таково, что $\gamma(t_5)=\lambda$ и при $t_4<t<t_5$ $\gamma(t_5)\neq\lambda$. На этом новом отрезке выберем аналогичным образом t'' такое, что $q(t'')=q_1\in S$ и $|\gamma(t')|=d$ и так далее. Возможны два результата работы этой процедуры: мы найдем такое q_i, что $h(q_i)=d$ или последовательность $q_0,q_1,...,q_\ell$ зациклится. Если последовательность зациклилась, то это означает, что

в автомате есть стирающий автоматный цикл, что противоречит условию. Значит, данная процедура всегда приводит к нахождению требуемого состояния.

Таким образом, мы можем понизить верхнюю оценку еще на $\frac{h_{max}(h_{max}-1)}{2}$, то есть получаем, что выполнено:

$$L(P) \leq (h_{max}+1)n + \frac{h_{max}(k+2-h_{max})}{2(k-1)} - \frac{h_{max}(h_{max}-1)}{2}.$$

Максимизируя выражение по h_{max} при условии, что $0 \leq h_{max} \leq \frac{(k-1)n}{k} + 1$, получаем, что $L(P) \leq \frac{k-1}{2k}n^2 + 5n$, что и требовалось доказать.

$\square$

Пример 5.

Для $n \geq 3$ и $k \geq 2$ рассмотрим автономный автомат с магазинной памятью $P_0 = (Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, r_s, \lambda) \in \mathcal{M}_0(n, 1, k)$, где $s = n - 1 - [\frac{n-3}{k}]$, $x = s - 1 - (k-1)(n-s-1)$, $B = \{0, 1\}$, $Q = \{q_1, ..., q_{n-s}, r_1, r_2 ..., r_s\}$, $\Gamma = \{1\}$,

$$\psi(q, z) = \begin{cases} 1, \text{ если } q = r_2,\ z = \lambda, \\ 0, \text{ иначе}, \end{cases}$$

$$\varphi(q, z) = \begin{cases} q_{i+1}, \text{ если } q = q_i,\ i \neq n-s, \\ r_1, \text{ если } q = q_{n-s}, \\ r_{i+1}, \text{ если } q = r_i,\ i \neq s,\ z = 1, \\ q_{n-s}, \text{ если } q = r_s,\ z = \lambda, \\ q_1, \text{ если } q = r_{s-1},\ z = \lambda, \\ q_{n-s-[\frac{i-1}{k-1}]}, \text{ если } q = r_i,\ 1 < i < s-1,\ z = \lambda, \\ q, \text{ иначе}, \end{cases}$$

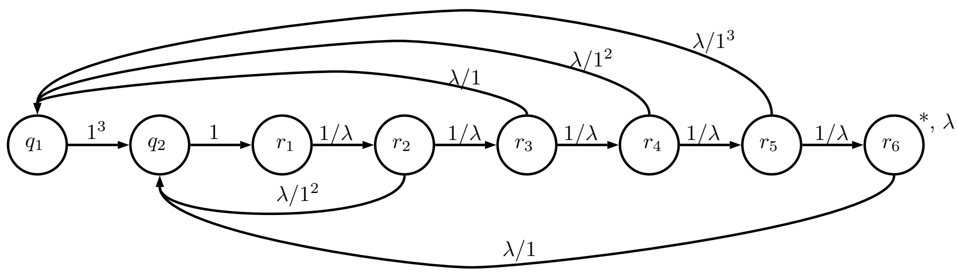

Рис. 4. Диаграмма автомата P_0 при $n = 8$, $k = 3$.

$$\eta(q,z) = \begin{cases} 1^k, \text{ если } q = q_i, \ i \neq n-s, \\ 1, \text{ если } q = q_{n-s}, \\ \lambda, \text{ если } q = r_i, \ z = 1, \\ 1, \text{ если } q = r_s, \ z = \lambda, \\ 1^x, \text{ если } q = r_{s-1}, \ z = \lambda, \\ 1^{k-1}, \text{ если } q = r_i, \ z = \lambda, \ i \mod (k-1) = 0, \\ 1^{i \mod (k-1)}, \text{ если } q = r_i, \ z = \lambda, \ i \mod (k-1) \neq 0, \\ \lambda, \text{ иначе.} \end{cases}$$

На рисунке 4 приведем диаграмму этого автомата для $n = 8$ и $k = 3$. Переходы автомата описываются следующим шаблоном z/η, то есть из данного состояния, при значении верхнего символа магазина z, автомат записывает на выходную ленту $\psi(q, z)$, а в магазине стирает последний символ и дописывает слово η. Следующее состояние указывает стрелка. Начальное состояние помечено "$*$" и через запятую указана начальная запись в магазине.

Опишем функционирование описанного выше автомата P_0 и поясним его канонические уравнения. Состояния автомата поделены на две группы: $\{q_1, ..., q_{n-s}\}$ — состояния, в которых происходит наполнение магазина, и состояния $\{r_1, ..., r_s\}$, в которых происходит опустошение магазина. Автомат начинает свою работу из состояния r_s с пустым магазином. Далее автомат переходит в первую группу состояний, где происходит запись в магазин, после заполнения автомат переходит во вторую группу состояний, а именно: в состояние q_1 с одним записанным символом в магазине. Далее происходит опустошение. После чего подобные итерации повторяются с той лишь разницей, что каждую последующую итерацию количество записанных в магазин символов увеличивается на 1 вплоть до значения $s-1$. После стирания $s-1$ символа автомат опять попадает в состояние r_s.

Аналогично предыдущему примеру получаем, что

$$L(P_0) = \frac{(s-1)s}{2} + (s-1)(n-s) + x - \sum_{i=0}^{s-2-x} [\frac{i}{k-1}].$$

Оценим $L(P_0)$, пользуясь леммой из предыдущего примера, и упростим выражение:

$$L(P_0) \geq \frac{(s-1)s}{2} + (s-1)(n-s) + x - \frac{(s-x)^2}{2(k-1)} - \frac{3(s-x)}{2} \geq sn - \frac{s^2k}{2(k-1)} - s.$$

Далее подставим оценки на s:

$$L(P_0) \geq n(n-2-\frac{n-3}{k}) - \frac{(n-1-\frac{n-3}{k})^2k}{2(k-1)} + (n-1-\frac{n-3}{k}) \geq \frac{k-1}{2k}n^2 - 3n - 2.$$

Замечание. Нижняя оценка, полученная в примере, асимптотически совпадает с доказанной верхней оценкой при $n \to \infty$.

4.2.4. Дополнительные определения

Перейдем к рассмотрению основного случая, когда в автомате с магазинной памятью есть стирающие автоматные циклы.

Пусть в автомате P из $\mathcal{M}'_0(n,1,k)$ есть хотя бы один автоматный цикл. Выберем любой и обозначим C. Тогда для $q \in C$ определим множество состояний $W(q) \subseteq Q \backslash C$, из которых можно попасть в стирающий цикл через q:

$W(q) = \{q' \in Q\backslash C \mid \exists t_1, t_2 : \ q(t_1) = q', \ q(t_2) = q, \forall t : \ t_1 \leq t < t_2, \ \gamma(t) \neq \lambda, \ q(t) \notin C\}$.

Заметим, что для различных $q_1 \in C$ и $q_2 \in C$ выполнено $W(q_1) \cap W(q_2) = \emptyset$. Для всех состояний из $W(q)$ будем говорить, что q является точкой входа в автоматный цикл.

Для стирающего цикла C определим множество состояний $W(C)$, которые попадают в автоматный цикл C:

$$W(C) = \bigcup_{q \in C} W(q).$$

Заметим, что для двух стирающих циклов C_1 и C_2 выполнено $W(C_1) \cap W(C_2) = \emptyset$.

Назовем окресностью стирающего цикла множество состояний $U(C) = C \cup W(C)$. Обозначим U_0 — множество состояний, которые не лежат ни в какой окресности стирающего цикла. Для автомата только со стирающими автоматными циклами $C_1, ..., C_d$ имеем следующее разложение:

$$Q = \bigsqcup_{i=1}^{d} U(C_i) \sqcup U_0.$$

Пусть P — автомат из $\mathcal{M'}_0(n,1,k)$ с периодом выхода τ. Пусть $q(t)$ — последовательность состояний автомата и $\gamma(t)$ — последовательность слов, записанных в магазине, заданы каноническими уравнениями. Так как эти последовательности периодические, рассмотрим их лишь на номерах от 0 до τ. Пусть $t_1, ..., t_{d+1}$ — множество номеров на этом отрезке, когда магазин пуст. Не ограничивая общности, будем считать, что $0 = t_1 < t_2 < ... < t_d < t_{d+1} = \tau$. Рассмотрим полуинтервал $(t_i, t_{i+1}]$, на котором функционирует автомат P. На этой последовательности тактов автомат порождает подпоследовательности состояний $\{q(t)\}_{t_i+1}^{t_{i+1}}$ и слов $\{\gamma(t)\}_{t_i+1}^{t_{i+1}}$, записанных в магазин. Эту пару подпоследовательностей назовем этапом функционирования автомата и будем обозначать I_i. Обозначим длину этапа $|I_i|$ — количество тактов работы автомата в этапе. Для P однозначно определено представление периода в виде упорядоченного множества этапов $(I_1, I_2, ..., I_d)$. Обозначим это отображение $I(P)$. Описание функционирование автомата как последовательности этапов важно, так как имеет довольно интересные свойства, описываемые в следующей лемме.

Лемма 7. *Пусть P — автомат из $\mathcal{M'}_0(n,1,k)$ и для него выполнено $I(P) = (I_1, ..., I_d)$. Тогда выполнены следующие утверждения:*

1) *Для любой перестановки σ на d элементах найдется автомат P_σ из $\mathcal{M'}_0(n,1,k)$ такой, что его период будет описываться последовательностью этапов $I(P_\sigma) = (I_{\sigma(1)}, ..., I_{\sigma(d)})$.*

2) *Для любого подмножества этапов $I_{j_1}, ..., I_{j_h}$ найдется автомат P' из $\mathcal{M'}_0(n,1,k)$ такой, что $I(P') = (I_{j_1}, ..., I_{j_h})$.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что оба автомата P_σ и P' получаются из автомата P изменением его поведения на пустом магазине. $\square$

4.2.5. Случай одного стирающего цикла

Пусть в автомате P из $\mathcal{M}'_0(n,1,k)$ есть ровно один стирающий цикл C длины ℓ со стирающим индексом $-s$. Обозначим $C_W = C \cap W$ — все пишущие состояния автоматного цикла, а $C_S = C \cap S$ — все его стирающие состояния. Пусть $C_{S_0} = \{q \in C_S |\ \exists h > \ell : (q, 1^h) \Rrightarrow (q, \lambda)\}$, а $C_{S_1} = C_S \backslash C_{S_0}$. Нетрудно видеть, что $|C_{S_0}| = s$.

Для каждого состояния q из стирающего цикла C определим функцию стирания $f_C(q,h) : C \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — минимальное количество тактов необходимое для достижение пустого магазина из состояния q с записанном в магазине словом длины h. Нетрудно видеть, что если ℓ — длина стрирающего цикла, а s — абсолютное значение стирающего индекса C, то

$$h + \lfloor\frac{h}{s}\rfloor(\ell - s) \leq f_C(q,h) \leq h + \lceil\frac{h}{s}\rceil(\ell - s) =: f_C^{max}(h).$$

Лемма 8. *В текущих обозначениях при $\ell \neq n$*

$$\sum_{i=0}^{s'-1} f_C^{max}(h_{max} - i) = \begin{cases} h_{max}l - \frac{s(s-1)}{2}, \ \textit{если } s \leq h_{max} - (k-1), \\ \frac{(h_{max}+k)^2}{2} + \frac{h_{max}+k}{2} + h_{max}(\ell - s), \ \textit{иначе}, \end{cases},$$

где $s' = \min(s, h_{max} - (k-1))$.

Доказательство. Если $s \leq h_{max} - (k-1)$, то

$$\sum_{i=0}^{s'-1} f_C^{max}(h_{max} - i) = \sum_{i=0}^{s-1} f_C^{max}(h_{max} - i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{s-1} \left(h_{max} - i + \lceil\frac{h_{max} - i}{s}\rceil(\ell - s)\right) =$$

$$= h_{max}s - \frac{s(s-1)}{2} + (\ell - s)\sum_{i=0}^{s-1}\lceil\frac{h_{max} - i}{s}\rceil =$$

$$= h_{max}s - \frac{s(s-1)}{2} + (\ell - s)\sum_{i=0}^{s-1}\frac{h_{max} - i}{s} + \frac{(l-s)(s-1)}{2} =$$

$$= h_{max}s - \frac{s(s-1)}{2} + h_{max}(\ell - s) = h_{max}\ell - \frac{s(s-1)}{2}.$$

Если $s > h_{max} - (k-1)$, то

$$\sum_{i=0}^{s'-1} f_C^{max}(h_{max}-i) = \sum_{i=0}^{h_{max}-k} f_C^{max}(h_{max}-i) =$$

$$= \sum_{i=k}^{h_{max}} f_C^{max}(i) = \sum_{i=k}^{h_{max}} \left(i + \lceil \frac{i}{s} \rceil (\ell - s) \right) =$$

$$= \frac{(h_{max}+k)^2}{2} + \frac{h_{max}+k}{2} + (\ell - s) \sum_{i=k}^{h_{max}} \lceil \frac{i}{s} \rceil =$$

$$= \frac{(h_{max}+k)^2}{2} + \frac{h_{max}+k}{2} + (\ell - s)\left(\sum_{i=k}^{h_{max}-k+1} \lceil \frac{i}{s} \rceil + \sum_{i=h_{max}-k+2}^{h_{max}} \lceil \frac{i}{s} \rceil \right) =$$

$$= \frac{(h_{max}+k)^2}{2} + \frac{h_{max}+k}{2} + (\ell - s)\left(\sum_{i=k}^{h_{max}-k+1} 1 + \sum_{i=h_{max}-k+2}^{h_{max}} 2 \right) =$$

$$= \frac{(h_{max}+k)^2}{2} + \frac{h_{max}+k}{2} + (\ell - s)h_{max},$$

что и требовалось доказать.

□

Лемма 9. *Пусть P — автомат из $\mathcal{M}'_0(n,1,k)$ и пусть P удовлетворяет следующим условиям:*

1) *в P есть единственный автоматный цикл C с отрицательным стирающем индексом;*

2) *вне этого цикла стирающих состояний нет, то есть $S \subseteq C$.*

Тогда найдется такой автомат из P' из $\mathcal{M}'_0(n,1,k)$, удовлетворяющий тем же условиям, такой, что все состояния вне стирающего цикла при непустом магазине пишут ровно k символов в магазин, при этом выполнено

$$L(P) \leq L(P') + n.$$

Доказательство. Рассмотрим непустое $W(q_*)$ для некоторого $q_* \in C$. Рассмотрим все этапы, которые начинаются с состояния из $W(q_*)$. Любой такой этап можно разделить на две части: это заполнение магазина, когда текущее состояние не из стирающего цикла, и стирание магазина, когда автомат вошел в стирающий цикл. Заметим, что длина второй части зависит только от количества символов записанных в магазин. Проведем следующую трансформацию автомата. Во всех состояниях q из $W(q_*)$ сделаем $\eta(q,1) = 1^k$, а также изменим переходы и запись в магазин по пустым состояниям стирающего цикла так, чтобы изменения коснулись только рассматриваемых этапов и для каждого рассматриваемого этапа количество символов, записанное в магазин, при первом попадании в стирающий цикл (то есть в q_*) не изменилось. Заметим, что при данной трансформации стирающая часть этапа будем иметь такую же длину, как и раньше. Может так оказаться, что количество тактов, которое автомат заполнял магазин уменьшилось. Если после трансформации среди состояний из $W(q_*)$ возникли недостижимые, то все такие состояния добавим в стирающий цикл как нейтральные сразу после q_*. Таким образом, каждый рассматриваемый этап может уменьшиться не более чем на 1.

Проводя подобные трансформации для всех непустых $W(q)$, построим требуемый автомат P'. Так как количество этапов не превосходит n, то будет верна оценка
$$L(P) \leq L(P') + n,$$
что и требовалось доказать.

□

Обозначим $L_1(n,k) = \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + (8k+32)n$.

Утверждение 3. *Пусть P — автомат из $\mathcal{M}'_0(n,1,k)$ и пусть P удовлетворяет следующим условиям:*

1) *в P есть единственный автоматный цикл C с отрицательным стирающем индексом;*

2) *вне этого цикла стирающих состояний нет, то есть $S \subseteq C$.*

Тогда
$$L(P) \leq L_1(n,k).$$

Доказательство. Последовательно применяя леммы 3 и 9, далее можно рассматривать автомат P' такой, что при пустом магазине автомат P' должен писать в магазин и для которого при $q \notin C$ выполнено $\eta(q,1) = 1^k$, при этом будет верно, что
$$L(P) \leq L(P') + 2n.$$

Так как начальное слово, записанное в магазине, пустое, то все функционировние автомата устроено следующим образом. Из стирающего цикла при пустом магазине автомат заполняет магазин одним из двух способов: либо он выходит из стирающего цикла и заполняет магазин до тех пор, пока не попадает в стирающий цикл снова, либо, не выходя, переходит в другое состояние стирающего цилка. В стирающем цикле автомат опустошает магазин и так далее повторяется до зацикливания, то есть пока автомат не окажется опять в начальном состоянии с пустым магазином.

Пусть ℓ — длина стирающего цикла C. Пусть $s = |C_{S_0}|$ и $r = |C_{S_1}|$.

Пусть $I(P') = (I_1, I_2, ..., I_{r+s})$ — упорядоченное множество этапов автомата P' таково, что последнее состояние первых s этапов из C_{S_0}. Оценим отдельно $\sum\limits_{i=1}^{s} |I_i|$ и $\sum\limits_{i=s+1}^{s+r} |I_i|$.

Начнем с $\sum\limits_{i=s+1}^{s+r} |I_i|$. Эти этапы характерны тем, что в них автомат не проходит по всем состояним стирающего цикла. И максимальное количество символов в магазине не более чем r. С другой стороны, можно считать, что автомат сразу находится в стирающем цикле на протяжении всего этапа. Отсюда получаем оценку

$$\sum_{i=s+1}^{s+r} |I_i| \le L_0(\ell - s, k) \le \frac{k-1}{2k}(\ell - s)^2 + 5(\ell - s).$$

Теперь оценим $\sum\limits_{i=1}^{s} |I_i|$. Заметим, для всех этапов из рассматриваемого подмножества, в которых автомат не покидает стирающий цикл, можно оценить сверху сумму их длин как $(k+1)n$. Рассмотрим остальные этапы. Для них отдельно оценим такты записи и такты стирания. Пусть $\tau_{\text{записи}}$ — количество тактов, которые начинаются либо вне стирающего цикла, либо из стирающего цикла, но с пустым магазином, а $\tau_{\text{стирания}}$ — все остальные такты работы автомата.

Рассмотрим случай, когда найдется $q_* \in C$ такое, что $W(q_*) = Q \backslash C$. Заметим, что автомат P' не сможет записать больше, чем $h_{max} = (n - \ell + 1)(k - 1) + 1$ символ в магазин. Учитывая, что внутри одного периода автомат не может оказаться в одном и том же состоянии с одинаковым содержимым магазина, получаем:

$$\tau_{\text{стирания}} \leq \sum_{i=0}^{s'-1} f_C^{max}(h_{max} - i),$$

где $s' = \min(s, h_{max} - (k-1))$ — количество оставшихся этапов.

Теперь оценим $\tau_{\text{записи}}$. При максимальном заполнении магазина автомат пройдет по всем пишущим состояниям. Из стирающего цикла автомат не может перейти в одно и то же состояние более $k-1$ раза, кроме, тех состояний, в которые можно попасть только из стирающего цикла. В такие состояния автомат можем попасть не более k раз. Отсюда получаем, что

$$\tau_{\text{записи}} \leq (n - \ell + 1)s' - \sum_{i=0}^{s'-2} [\frac{i}{k-1}].$$

Откуда получаем, что

$$\sum_{i=1}^{s} |I_i| \leq \sum_{i=0}^{s'-1} f_C^{max}(h_{max} - i) + (n - \ell + 1)s - \sum_{i=0}^{s'-2} [\frac{i}{k-1}] + (k+1)n.$$

Пусть теперь $W(q) \neq Q \backslash C$ для всех $q \in C$. Заметим, что если $s \leq (n-k)(k-1)+1$, то полученные оценки остаются в силе, так как, собирая состояния $Q \backslash C$ в одном $W(q)$ достигается большая длина этапов. Если же $s > (n-k)(k-1)+1$, то можно считать, что все непустые $W(q)$ для $q \in C$ содержат по одному состоянию, кроме одного, в котором лежат все остальные состояния. Этапы, которые начинаются с состояния из $W(q)$, где $|W(q)| = 1$ можно суммарно оценить сверху $2kn$, так как до входа в стирающий цикл не будет записано более $2k-1$ символов в магазин. Таким образом можно считать, что в случае, когда $W(q) \neq Q \backslash C$ для всех $q \in C$ оценка увеличится не более чем на $2kn$.

Суммируя обе оценки, получаем, что

$$L(P') \leq \sum_{i=0}^{s'-1} f_C^{max}(h_{max} - i) + (n - \ell + 1)s' - \sum_{i=0}^{s'-2} [\frac{i}{k-1}] + \frac{k-1}{2k}(\ell - s)^2 +$$

$$+5(\ell - s) + 2kn.$$

Следовательно,

$$L(P) \le \sum_{i=0}^{s'-1} f_C^{max}(h_{max}-i) + (n-\ell+1)s' - \sum_{i=0}^{s'-2}[\frac{i}{k-1}] +$$

$$+\frac{k-1}{2k}(\ell-s)^2 + 5(\ell-s) + 2kn + (k+1)n + 2n \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{s'-1} f_C^{max}(h_{max}-i) + (n-\ell+2)s' - \frac{s'^2}{2(k-1)} + \frac{k-1}{2k}(\ell-s)^2 +$$

$$+5(\ell-s) + \frac{s'}{2} + (3k+3)n,$$

где $h_{max} = (n-\ell+1)(k-1)+1$ и $s' = \min(s, h_{max}-(k-1))$.

При $s \le (n-\ell)(k-1)+1$, получаем:

$$L(P) \le ((n-\ell+1)(k-1)+1)\ell - \frac{s(s-1)}{2} + s(n-\ell+2) + \frac{s}{2} -$$

$$-\frac{s^2}{2(k-1)} + \frac{k-1}{2k}(\ell-s)^2 + 5(\ell-s) + (3k+3)n \le$$

$$\le \max_{\substack{1 \le s \le \ell \le n,\\ s \le (n-\ell)(k-1)+1}} \Bigg(((n-\ell+1)(k-1)+1)\ell - \frac{s(s-1)}{2} +$$

$$+s(n-\ell+2) - \frac{s^2}{2(k-1)} + \frac{k-1}{2k}(\ell-s)^2 + 5(\ell-s)\Bigg) + (3k+\frac{7}{2})n.$$

Максимизируя квадратичную функцию по s и ℓ получаем, что

$$L(P) \le \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn + (3k+3)n = \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + (8k+\frac{7}{2})n.$$

Значит, $L(P) \le L_1(n,k)$ в этом случае.

При $s > (n-\ell)(k-1)+1$ и $\ell \ne n$ получаем:

$$L(P) \le \frac{(h_{max}+k)^2}{2} + \frac{h_{max}+k}{2} + h_{max}(l-s) + s'(n-\ell+2) + \frac{s'}{2} -$$

$$-\frac{s'^2}{2(k-1)} + \frac{k-1}{2k}(\ell-s)^2 + 5(\ell-s) + (3k+3)n =$$

$$= \frac{k-2}{2(k-1)} h_{max} + h_{max}(n-s) + \frac{s}{2} + \frac{k-1}{2k}(\ell - s)^2 + k h_{max} +$$

$$+ \frac{7}{2} h_{max} + (k-1)(n-\ell) + 5(\ell - s) + \frac{k^2}{2} + \frac{1}{2} - 2(k-1) + (3k+3)n \leq$$

$$\leq n h_{max} - \frac{k-1}{k} \ell h_{max} + \frac{k-1}{2k} \ell^2 - \frac{2k-1}{2k(k-1)} h_{max}^2 +$$

$$+ k(2h_{max} + 2\ell - n) + 4\ell - \frac{5}{2} h_{max} + n + 3(k-1) + \frac{k^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{(k-1)^3}{2k} + (3k + \frac{7}{2})n \leq$$

$$\leq n h_{max} - \frac{k-1}{k} \ell h_{max} + \frac{k-1}{2k} \ell^2 - \frac{2k-1}{2k(k-1)} h_{max}^2 + 6kn + 9n + 5(k-1) + k^2 + \frac{1}{2}$$

Подставляя $h_{max} = (n - \ell + 1)(k-1) + 1$, получаем

$$L(P) \leq \frac{n^2}{2} - \frac{n^2}{2(k-1)} + \frac{n^2}{2k(k-1)} - \frac{1}{2(k-1)} + n -$$

$$-k(n - \ell + 1) - \frac{1}{2} + 6kn + 9n + 5(k-1) + k^2 + \frac{1}{2} \leq$$

$$\leq \frac{k-1}{2k} n^2 + 6kn + 10n + 5(k-1) + k^2 \leq \frac{k-1}{2k} n^2 + 7kn + 15n \leq L_1(n,k).$$

Остается лишь заметить, что в случае $\ell = n$, будет верна оценка

$$L(P) \leq L_0(n,k) + 2n + 2kn \leq L_1(n,k),$$

что и завершает доказательство.

$\square$

Утверждение 4. *Пусть P — автомат из $\mathcal{M}'_0(n,1,k)$ и пусть в P есть единственный автоматный цикл C с отрицательным стирающем индексом. Тогда*

$$L(P) \leq L_1(n,k).$$

Доказательство. Применяя лемму 3, далее можно рассматривать автомат P' такой, что при пустом магазине автомат P' должен писать в магазин при этом будет выполнено:

$$L(P) \leq L(P') + n.$$

Рассмотрим $I(P') = (I_1, I_2, ..., I_d)$ — упорядоченное множество этапов автомата P'. Разобьем этапы на две группы. В первую включим все этапы, предпоследнее состояние которых не лежит в стирающем цикле C, в во вторую все остальные. По лемме 7 найдутся такие автоматы P'_1 и P'_2 из $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$, что $I(P'_1)$ будет состоять из первой группы этапов, а $I(P'_2)$ — из второй, причем будет выполнено, что

$$L(P') = L(P'_1) + L(P'_2).$$

Пусть n_0 — количество состояний в $L(P'_1)$. Тогда можно имеет место оценка

$$L(P'_1) \leq L_0(n_0, k) \leq \frac{k-1}{2k} n_0^2 + 5n_0.$$

Теперь оценим $L(P'_2)$. В P'_2 после стирающих состояний вне стирающего цикла магазин не становится пустым. Это означает, что можно трансформировать запись в магазин, не изменив при этом длину периода. Следовательно, можно считать, что автомат удовлетворяет предыдущей лемме, то есть для него верна оценка

$$L(P'_2) \leq \sum_{i=0}^{s'-1} f_C^{max}(h_{max} - i) + (n - \ell + 2)s' + \frac{s'}{2} - \frac{s'^2}{2(k-1)} +$$

$$+\frac{k-1}{2k}(\ell - s)^2 + 5(\ell - s) + (3k+2)n,$$

где $h_{max} \leq (n - \ell - n_0 + 1)(k-1) + 1$ и $s' = \min(s, h_{max} - (k-1))$.

Суммируя обе оценки, имеем

$$L(P) \leq L(P'_1) + L(P'_2) + n \leq \frac{k-1}{2k} n_0^2 + 5n_0 + \sum_{i=0}^{s'-1} f_C^{max}(h_{max} - i) +$$

$$+(n - \ell + 2)s' + \frac{s'}{2} - \frac{s'^2}{2(k-1)} + \frac{k-1}{2k}(\ell - s)^2 + 5(\ell - s) + (3k+3)n,$$

где $h_{max} \leq (n - \ell - n_0 + 1)(k-1) + 1$ и $s' = \min(s, h_{max} - (k-1))$.

При $s \leq (n-\ell-n_0)(k-1)+1$, получаем:

$$L(P) \leq \left(\frac{k-1}{2k}n_0^2+5n_0+((n-\ell-n_0+1)(k-1)+1)\ell-\frac{s(s-1)}{2}+s(n-\ell+2)-\right.$$

$$\left.-\frac{s^2}{2(k-1)}+\frac{k-1}{2k}(\ell-s)^2+5(\ell-s)\right)+(3k+\frac{7}{2})n,$$

Максимизируя по n_0, ℓ и s, получаем,что

$$L(P) \leq L_1(n,k).$$

При $s > (n-\ell-n_0)(k-1)+1$ и $\ell \neq n$ получаем:

$$L(P) \leq \frac{k-1}{2k}n_0^2+5n_0+nh_{max}-\frac{k-1}{k}\ell h_{max}+\frac{k-1}{2k}\ell^2-\frac{2k-1}{2k(k-1)}h_{max}^2+$$

$$+3(k-1)+\frac{k^2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{(k-1)^3}{2k}+(3k+\frac{7}{2})n \leq$$

$$\leq (\frac{k-1}{2k}n_0^2+5n_0+n-\frac{k-1}{k}\ell)((n-\ell-n_0+1)(k-1)+1)+\frac{k-1}{2k}\ell^2-$$

$$-\frac{2k-1}{2k(k-1)}(n-\ell-n_0)(k-1)+(4k+\frac{7}{2})n+3k.$$

Максимизируя по n_0, ℓ , получаем,что

$$L(P) \leq L_1(n,k).$$

При $\ell = n$ получаем, что $n_0 = 0$, следовательно, будет верна оценка из предыдущего утверждения, что и завершает доказательство.

□

4.2.6. Общий случай

Теперь все готово для доказательства асимптотической верхней оценки для $L(n,1,k)$.

Теорема 7. *При* $k > 1$

$$L(n,1,k) \leq L_1(n,k).$$

Доказательство. Пусть P содержит d автоматных циклов. В случае $d = 0$ и $d = 1$ все доказано. Пусть $d \geq 1$. Заметим, что все циклы являтся стирающими, и обозначим их C_1,..., C_d. Имеет место следующее разбиение множества состояний:

$$Q = \bigsqcup_{i=0}^{d} Q_i,$$

где при $i > 0$ $Q_i = C_i \cup W(C_i)$ — множество состояний, и, а Q_0 — все оставшиеся состояния, то есть множество состояний, из которых автомат не попадает ни в один стирающий цикл. Заметим, что внутри каждого этапа I все состояния лежат в одном и том же Q_i. Следовательно, для каждого Q_i можно выделить свое подмножество этапов, для которого по лемме 7 будет существовать автомат P_i, реализующий его. Так как каждый этап автомата P воздет в $I(P_i)$, то будет выполнено, что

$$L(P) = \sum_{i=0}^{d} L(P_i).$$

По построению P_0 — автомат без стирающего цикла, а остальные P_i — автоматы с одним стирающим циклов. Следовательно, для каждого P_i будет выполнено $L(P_i) \leq L_1(|Q_i|, k)$. Значит,

$$L(P) \leq \sum_{i=0}^{d} L_1(|Q_i|, k) \leq L_1(\sum_{i=0}^{d} |Q_i|, k) = L_1(n, k),$$

что и требовалось доказать.

$\square$

4.2.7. Дополнения: решение экстремальных задач

Лемма 10. *Пусть*

$$g(n,k) = \max_{\substack{s,\ell \\ 1 \leq s \leq \ell \leq n, \\ s \leq (n-\ell)(k-1)+1}} \Bigg(((n-\ell+1)(k-1)+1)\ell - \frac{s(s-1)}{2} + $$
$$+ s(n-\ell+2) - \frac{s^2}{2(k-1)} + \frac{k-1}{2k}(\ell-s)^2 + 5(\ell-s) \Bigg).$$

Тогда $g(n,k) \leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn$.

Доказательство. Максимум квадратичной функции достигается либо в критической точке (где все частные производные равны нулю), либо на границе области. Обозначим максимизируемую функцию через f. Найдем критические точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial s} = n - 2\ell + \frac{\ell - s}{k} - \frac{s}{k-1} - 5/2 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial \ell} = 3\ell - n - 2s + k(n - 2\ell + 1) - \frac{(\ell - s)}{k} + 5 = 0 \end{cases}$$

Полученная система линейных уравнений не имеет решений, поэтому продолжим поиск решений на границе заданной области.

1. Пусть $s = 1$. При $s = 1$

$$f = 5\ell + n - \frac{1}{2k-2} + \frac{(k-1)(\ell-1)^2}{2k} + \ell(k-1)(n-\ell+1) - 3.$$

1.1. Найдем критические точки

$$\frac{\partial f}{\partial \ell} = 3\ell - n + k(n - 2\ell + 1) - \frac{\ell - 1}{k} + 3 = 0.$$

Откуда находим:

$$\ell = \frac{3k - kn + k^2 n + k^2 + 1}{2k^2 - 3k + 1}.$$

Подставляя в f получаем:

$$\frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + \frac{kn}{2} + \frac{11n}{4(2k-1)} + \frac{11n}{4} + \frac{k}{4} + \frac{12}{k-1} - \frac{121}{8(2k-1)} - \frac{5}{8} \leq$$

$$\leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$

1.2. Рассмотрим границу $\ell = 1$. Подставляя в f, получаем:

$$kn - \frac{1}{2(k-1} + 2 \leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$

1.3. Рассмотрим границу $\ell = n$. Подставляя в f, получаем:

$$5n + kn - \frac{1}{2k-2} + \frac{(k-1)(n-1)^2}{2k} - 3 \leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$

2. Пусть $s = (n-\ell)(k-1)+1$. При $s = (n-\ell)(k-1)+1$

$$f = \frac{5\ell}{2} + \frac{3n}{2} - \frac{1}{2(k-1)} + \frac{7k\ell}{2} - \frac{5kn}{2} - \frac{(n-1)^2}{2k} + \frac{n^2}{2} - \frac{5}{2}.$$

2.1. Найдем критические точки

$$\frac{\partial f}{\partial \ell} = \frac{7k}{2} + \frac{5}{2} = 0.$$

Критических точек нет, поэтому будем искать максимум на границе, а именно: $\ell = 1$ и $\ell = n$.

2.2. При $\ell = 1$ получаем

$$\frac{7k}{2} + \frac{3n}{2} - \frac{1}{2(k-1)} - \frac{5kn}{2} - \frac{(n-1)^2}{2k} + \frac{n^2}{2} \le \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$

2.3. При $\ell = n$ получаем

$$5n + kn - \frac{1}{2k-2} + \frac{(k-1)(n-1)^2}{2k} - 3 \le \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$

3. Пусть $s = \ell$. При $s = \ell$

$$f = \frac{\ell(2k - \ell - 2k\ell + 2kn + 5)}{2} - \frac{\ell^2}{2(k-1)}.$$

3.1. Найдем критические точки

$$\frac{\partial f}{\partial \ell} = k(n - 2\ell + 1) - \ell - \frac{\ell}{k-1} + 5/2 = 0.$$

Откуда находим:

$$\ell = \frac{(k-1)(2k + 2kn + 5)}{2k(2k-1)}.$$

Подставляя в f, получаем:

$$\frac{(k-1)(2k + 2kn + 5)^2}{8k(2k-1)} \le \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$

Рассмотрим граничные значения ℓ.

3.2. Случай $\ell = 1$ уже был рассмотрен в 1.2.

3.3. При $\ell = n$ получаем

$$\frac{n(2k - n + 5)}{2} - \frac{n^2}{2(k-1)} \le \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$

4. Теперь s не лежит на границе. Пусть $\ell = n$. При $\ell = n$

$$f = 5n - 3s + kn - \frac{s(s-1)}{2} - \frac{s^2}{2k-2} + \frac{(n-s)^2(k-1)}{2k}.$$

Найдем критические точки
$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{n-s}{k} - n - \frac{s}{k-1} - \frac{5}{2} = 0.$$
Откуда находим:
$$s = -\frac{(k-1)(5k-2n+2kn)}{2(2k-1)} < 0.$$
Следовательно, подставим граничное значение s, а именно: $s = 1$. Подставляя, получаем:
$$5n + kn - \frac{1}{2k-2} + (\frac{(k-1)(n-1)^2}{2k} - 3 \leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$
Во всех случаях получили верхнюю оценку
$$\frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn,$$
что и требовалось доказать.

□

Лемма 11. *Пусть*
$$g(n,k) = \max_{\substack{s,\ell,n_0 \\ 1 \leq s \leq \ell \leq n, \\ s \leq (n-\ell)(k-1)+1, \\ 0 \leq n_0 \leq n-\ell}} \left(\frac{k-1}{2k} n_0^2 + ((n-\ell-n_0+1)(k-1)+1)\ell - \right.$$
$$\left. - \frac{s(s-1)}{2} + s(n-\ell+2) - \frac{s^2}{2(k-1)} + \frac{k-1}{2k}(\ell-s)^2 + 5(\ell-s) + 5n_0 \right).$$
Тогда $g(n,k) \leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn$.

Доказательство. Максимум квадратичной функции достигается либо в критической точке (где все частные производные равны нулю), либо на границе области. Обозначим максимизируемую функцию через f. Найдем критические точки:

Найдем критические точки:
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial s} = n - 2\ell + \frac{\ell - s}{k} - \frac{s}{k-1} - \frac{5}{2} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial \ell} = \frac{(k-1)(2\ell-2s)}{2k} - (k-1)(\ell - n + n_0 - 1) - \ell(k-1) - s + 6 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial n_0} = \frac{n_0(k-1)}{k} - \ell(k-1) + 5 = 0 \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$\begin{cases} \ell = \frac{17k+5}{2k(k-1)}, \\ s = k(\frac{n}{2} - \frac{5}{4}) - \frac{n}{4} - \frac{k(n/4+35/8)-5/2}{k(2k-1)} - \frac{63}{8}, \\ n_0 = \frac{6}{k-1} + \frac{7}{2} \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$\frac{25k}{16} + \frac{5n}{8} + \frac{48}{k-1} - \frac{5kn}{4} - \frac{(2n-5)^2}{32(2k-1)} + \frac{kn^2}{4} - \frac{25}{8k} - \frac{n^2}{8} + \frac{731}{32} \leq$$

$$\leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$

Продолжим поиск решений на границе заданной области.

1. Случай, когда $n_0 = 0$, уже был полностью разобран.

2. Пусть теперь $n_0 = n - \ell$. Тогда в этом случае можно оценить

$$L(P) \leq (k+1)n + L_0(n-\ell, k) + L_0(\ell - s, k) + n \leq L_0(n, k) + (k+2)n \leq$$

$$\leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$

3. Пусть теперь n_0 лежит не на границе. 3.1. Пусть $s = 1$. При $s = 1$

$$f = 5\ell + n + 5n_0 - \frac{1}{2k-2} + \frac{(k-1)(\ell-1)^2}{2k} -$$

$$-\ell(k-1)(\ell - n + n_0 - 1) + \frac{n_0^2(k-1)}{2k} - 3.$$

3.1.1. Найдем критические точки

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \ell} = \frac{(\ell-1)(k-1)}{k} - \ell(k-1) - (k-1)(\ell - n + n_0 - 1) + 5 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial n_0} = \frac{n_0(k-1)}{k} - \ell(k-1) + 5 = 0 \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$\begin{cases} \ell = \frac{5}{k-1} + \frac{k(n+1)-6}{k^2+2k-1}, \\ n_0 = \frac{k(k+kn-6)}{k^2+2k-1} \end{cases}$$

Подставляя в f, получаем:

$$7n + \frac{12}{k-1} - \frac{(51k)/2 - 7n + 9kn + (3kn^2)/2 - n^2/2 + 23/2}{k^2+2k-1} + \frac{n^2}{2} + 3 \leq$$

$$\leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$

Продолжим поиск решений на границе заданной области.

3.1.2. Пусть $\ell = 1$. При $\ell = 1$

$$f = n + 5n_0 - \frac{1}{2k-2} + (n - n_0)(k-1) + \frac{n_0^2(k-1)}{2k} + 2$$

Найдем критические точки

$$\frac{\partial f}{\partial n_0} = \frac{n_0(k-1)}{k} - k + 6 = 0$$

Откуда находим:

$$n_0 = \frac{k(k-6)}{k-1}.$$

Подставляя в f, получаем:

$$k(n + 11/2) - 13/(k-1) - k^2/2 - 21/2 \leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$

3.1.3. Пусть $\ell = n$. Тогда $n_0 = 0$, случай был разобран.

3.2. Пусть $s = (n-\ell)(k-1)+1$. При $s = (n-\ell)(k-1)+1$

$$f = \frac{5\ell}{2} + \frac{3n}{2} + 5n_0 - \frac{1}{2(k-1)} + \frac{7k\ell}{2} - \frac{5kn}{2} +$$

$$+\ell n_0 - \frac{n^2 - 2n + n_0^2 + 1}{2k} + \frac{n^2}{2} + \frac{n_0^2}{2} - kln_0 - \frac{5}{2}.$$

3.2.1. Найдем критические точки

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \ell} = \frac{7k}{2} + n_0 - kn_0 + \frac{5}{2} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial n_0} = \frac{n_0(k-1)}{k} - \ell(k-1) + 5 = 0 \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$\begin{cases} \ell = \frac{17k+5}{2k(k-1)}, \\ n_0 = \frac{7k+5}{2(k-1)} \end{cases}$$

Подставляя в f, получаем:

$$\frac{3n}{2} + \frac{95}{2(k-1)} - \frac{5kn}{2} - \frac{n^2 - 2n + 29/4}{2k} + \frac{n^2}{2} + \frac{169}{8} \leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$

3.2.2. Пусть $\ell = 1$. Тогда и $s = 1$, случай был рассмотрен.

3.2.3. Пусть $\ell = n$. Тогда опять $s = 1$ и случай был рассмотрен.

3.3. Пусть $s = \ell$. При $s = \ell$

$$f = 5n_0 - \ell((k-1)(\ell - n + n_0 - 1) - 1) + \ell(n - \ell + 2) -$$
$$- \frac{\ell(\ell-1)}{2} - \frac{\ell^2}{2k-2} + \frac{n_0^2(k-1)}{2k}.$$

3.3.1 Найдем критические точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \ell} = n_0 - \ell - k(2\ell - n + n_0 - 1) - \frac{\ell}{k-1}/(k-1) + \frac{5}{2} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial n_0} = \frac{n_0(k-1)}{k} - \ell(k-1) + 5 = 0 \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$\begin{cases} \ell = \frac{(k-1)(12k+2kn+5)}{2k^3}, \\ n_0 = n - \frac{5}{k-1} - \frac{5}{2k^2} - \frac{2n+7}{2k} + 1 \end{cases}$$

Подставляя в f, получаем:

$$\frac{(7k + 2kn - 2k^2n - 2k^2 + 5)(7k + 2kn - 2k^2n - 22k^2 + 5)}{8k^3(k-1)} \leq$$
$$\leq \frac{k(k-1)}{4k-2} n^2 + 5kn.$$

3.3.2. Пусть $\ell = 1$. Тогда и $s = 1$, случай был рассмотрен.

3.3.3. Пусть $\ell = n$. Тогда $n_0 = 0$ и случай уже был разобран.

3.4. Пусть теперь s лежит не на границе.

3.4.1. Пусть $\ell = 1$. Тогда $s = 1$ и случай уже был разобран.

3.4.2. Пусть $\ell = n$. Тогда $n_0 = 0$ и случай уже был разобран.

Во всех случаях получили верхнюю оценку

$$\frac{k(k-1)}{4k-2} n^2 + 5kn.$$

□

Лемма 12. *Пусть*

$$g(n,k) = \max_{\substack{\ell, n_0 \\ \frac{k-1}{k}n + 1 \leq \ell \leq n, \\ 0 \leq n_0 \leq n - \ell}} \Bigg((n - \frac{k-1}{k}\ell)((n - \ell - n_0 + 1)(k-1) + 1) +$$

$$+\frac{k-1}{2k}\ell^2 - \frac{2k-1}{2k(k-1)}(n-\ell-n_0)(k-1) + \frac{k-1}{2k}n_0^2 + 5n_0\Big).$$

Тогда $g(n,k) \le \frac{k-1}{2k}n^2 + kn + 3n + 23$.

Доказательство. Максимум квадратичной функции достигается либо в критической точке (где все частные производные равны нулю), либо на границе области. Обозначим максимизируемую функцию через f. Найдем критические точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial n_0} = \ell - 2n + 4n_0 - k(\ell - n + 2n_0 - 2) + (n - 2n_0)/k + 4 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial \ell} = k + n_0 - kn_0 = 0 \end{cases}$$

Решая систему получаем, что

$$\begin{cases} \ell = n + \frac{6}{k-1} - \frac{n}{k}, \\ n_0 = \frac{1}{k-1} + 1 \end{cases}$$

Подставляя в f и упрощая, получаем:

$$\frac{k-1}{2k}n^2 + \frac{11}{(2(k-1))} + \frac{11}{2} \le \frac{k-1}{2k}n^2 + 11.$$

Продолжим поиск решений на границе заданной области.
1. Случай $n_0 = 0$ уже был рассмотрен.
2. Пусть теперь $n_0 = n - \ell$. При $n_0 = n - \ell$

$$f = 5n - 5\ell + kn - \ell(k-1) - \frac{k(2k-1)}{2(k-1)} + \frac{(k-1)\ell^2}{2k} + \frac{(k-1)(\ell-n)^2}{2k}.$$

Найдем критические точки:

$$\frac{\partial f}{\partial \ell} = 2\ell - k - n - \frac{2l - n}{k} - 4 = 0.$$

Решая уравнение, получаем:

$$\ell = k/2 + n/2 + 5/(2(k-1)) + 5/2.$$

Подставляя в f получаем:

$$3n - (13k)/4 - 27/(4(k-1)) + (kn)/2 - k^2/4 + n^2/4 - n^2/(4k) - 27/4 \le$$

$$\le n^2/4 + kn + 3n.$$

3. Пусть теперь n_0 не на границе.
3.1. Случай $\ell = n$ уже был рассмотрен, так как в этом случае $n_0 = 0$.
3.2. Пусть теперь $\ell = \frac{k-1}{k}n + 1$. Тогда

$$f = 5n_0 - \frac{1}{2(k-1)} + kn_0 - \frac{n^2}{2k} - \frac{n_0^2}{k} - kn_0^2 + \frac{n^2}{2} + 2n_0^2 - 1/2.$$

Найдем критические точки:

$$\frac{\partial f}{\partial n_0} = 4n_0 - \frac{2n_0}{k} - k(2n_0 - 1) + 5.$$

Решая уравнение, получаем:

$$n_0 = \frac{k^2 + 5k}{2k^2 - 4k + 2}.$$

Подставляя в f получаем:

$$\frac{k}{4} + \frac{23}{2(k-1)} + \frac{9}{(k-1)^2} + \frac{n^2}{2} - \frac{n^2}{2k} + \frac{5}{2} \leq \frac{k-1}{2k}n^2 + 23 + k/4.$$

Во всех случаях получили, что максимум ограничен:

$$\frac{k-1}{2k}n^2 + kn + 3n + 23.$$

□

4.3. Формулировка полученных результатов

Подведем итоги этого раздела. Были доказаны нижняя и верхняя оценки на $L(n, 1, k)$. Основным результатом является доказательство следующей теоремы.

Теорема 8. *При* $k > 1$

$$\frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 - \frac{1}{2k-1}n - 1 \leq L(n, 1, k) \leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + (8k + 32)n.$$

Из нее следует, что нижняя и верхняя оценки асимптотически совпадают при $n \to \infty$, а именно:

Теорема 9. *При* $k > 1$ *и* $n \to \infty$

$$L(n, 1, k) = \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2(1 + o(1)).$$

5. Периодические свойства автоматов со входом

5.1. Свойство сохранения периодических последовательностей

Пусть дан инициальный конечный автомат $V = (A, Q_V, B, \varphi_V, \psi_V, q_0)$, который задает ограниченно-детерминированную функцию $f_V : A^* \to B^*$, и инициальный автомат с магазинной памятью

$P = (B, Q_P, C, \Gamma, \varphi_P, \psi_P, \eta_P, r_0, \gamma_0)$, который задает детерминированное отображение $f_P : B^* \to C^*$. Тогда суперпозицией конечного автомата V и P будем называть отображение $f_{P \circ V} : A^* \to C^*$, где $f_{P \circ V}(\alpha) = f_P(f_V(\alpha))$.

Утверждение 5. *Пусть $V = (A, Q_V, B, \varphi_V, \psi_V, q_0)$ — инициальный конечный автомат,*

$P = (B, Q_P, C, \Gamma, \varphi_P, \psi_P, \eta_P, r_0, \gamma_0)$ — инициальный автомат с магазинной памятью. Тогда суперпозиция V и P $f_{P \circ V} : A^* \to C^*$ является детерминированной функцией, порожденной инициальным автоматом с магазинной памятью

$$P_V = (A, Q_V \times Q_P, C, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, (q_0, r_0), \gamma_0),$$

где

$$\varphi(a, (q_V, q_P), z) = (\varphi_V(a, q_V), \varphi_P(\psi_V(a, q_V), q_P, z)),$$

$$\psi(a, (q_V, q_P), z) = \psi_P(\psi_V(a, q_V), q_P, z),$$

$$\eta(a, (q_V, q_P), z) = \eta_P(\psi_V(a, q_V), q_P, z).$$

Доказательство. Необходимо рассмотреть системы канонических уравнений автоматов V и P и подставить первую во вторую. □

Известно, что автоматы с магазинной памятью переводят периодические последовательности в периодические [22]. Приведем свое доказательство этого факта в принятых обозначениях.

Теорема 10 ([22])**.** *Пусть P — автомат с магазинной памятью из $\mathcal{M}(A, B)$. Тогда P переводит периодические последовательности в периодические.*

Доказательство. Для любой периодической последовательности найдется конечный автономный автомат V, который ее генерирует. Рассмотрим суперпозицию V и P. По утверждению 5 суперпозицией является автономный автомат с магазинной памятью, который, как известно, генерирует периодическую последовательность, что и требовалось доказать. $\square$

Обозначим $L(P, \alpha)$ — период выходной последовательности при подаче последовательности α^∞ на вход автомату с магазинной памятью P.

5.2. Верхние оценки периода выходной последовательности

Теперь сформулирует и докажем оценки в случае неавтономного автомата с магазинной памятью.

Теорема 11. *Пусть $P = (A, Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0)$— автомат с магазинной памятью из $\mathcal{M}(n, m, k)$ при $k > 1$. Тогда для любого непустого слова α из алфавита A будет выполнено*

$$L(P, \alpha) \le \frac{|\alpha| n (k^{|\alpha| nm+1} - 1)}{k - 1}.$$

Доказательство. Пусть V — конечный автомат с $|\alpha|$ состояниями, генерирующий последовательность α^∞. Рассмотрим суперпозицию конечного автомата V и автомата с магазинной памятью P. В силу предыдушего утверждения их суперпозиция является автономным автоматом с магазинной памятью с $|\alpha||Q|$ состояниями. К полученному автомату применим теорему о длине периода выходной последовательности для автономного автомата с магазинной памятью, откуда и получаем оценку. $\square$

Теорема 12. *Пусть $P = (A, Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0)$— автомат с магазинной памятью из $\mathcal{M}(n, 1, k)$ при $k > 1$. Тогда для любого непустого слова α из алфавита A будет выполнено*

$$L(P, \alpha) \le \frac{k(k-1)}{4k-2} |\alpha|^2 n^2 + (8k + 32)|\alpha| n.$$

Доказательство. Доказательство дословно повторяется из предыдущей теоремы. $\square$

6. Нижние оценки периода выходной последовательности

Пример 6.

Пусть автомат с магазинной памятью $P_{\ell,1} = (A, Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, r_1, \lambda) \in \mathcal{M}(n, 1, k)$, где $0 < \ell < n$, $A = B = \{0, 1\}$, $Q = \{q_1, ..., q_{n-\ell}, r_1, ..., r_\ell\}$, $\Gamma = \{1\}$,

$$\psi(a, q, z) = \begin{cases} 1, \text{ если } q = r_1, \ z = \lambda, \ a = 1, \\ 0, \text{ иначе}, \end{cases}$$

$$\varphi(a, q, z) = \begin{cases} q, \text{ если } a = 0, \\ q_{i+1}, \text{ если } q = q_i, \ i \neq n - \ell, \ a = 1, \\ r_1, \text{ если } q = q_{n-\ell}, \ a = 1, \\ r_{i+1}, \text{ если } q = r_i, \ i \neq \ell, \ z = 1, \ a = 1, \\ r_1, \text{ если } q = r_\ell, \ z = 1, \ a = 1, \\ q_1, \text{ если } q = r_i, \ z = \lambda, \ a = 1, \\ q, \text{ иначе}, \end{cases}$$

$$\eta(a, q, z) = \begin{cases} 1^k, \text{ если } q = q_i, \\ z, \text{ если } q = r_i, \ a = 0, \\ 1, \text{ если } q = r_i, \ i \neq \ell, \ z = 1, \ a = 1, \\ \lambda, \text{ если } q = r_\ell, \ z = 1, \ a = 1, \\ 1^k, \text{ если } q = r_i, \ z = \lambda, \ a = 1, \\ \lambda, \text{ иначе}. \end{cases}$$

На рисунке 5 приведем диаграмму этого автомата. Переходы автомата описываются следующим шаблоном $a, z/\eta$, то есть из данного состояния, при подаче входного символа a и при значении верхнего символа магазина z, автомат записывает на выходную ленту $\psi(a, q, z)$, а в магазине стирает последний символ и дописывает слово η. Следующее состояние указывает стрелка. Начальное состояние помечено символом "$*$" и через запятую указана начальная запись в магазине.

Исследуем поведение автомата при подаче последовательности α^∞ на вход, где $\alpha = 0^{p-1}1$. Автомат начинает работу из состояния r_1 и находится в нем с пустым магазином до прихода первой единицы на вход. Далее автомат переходит в состояние q_1 и начинает заполнение магазина.

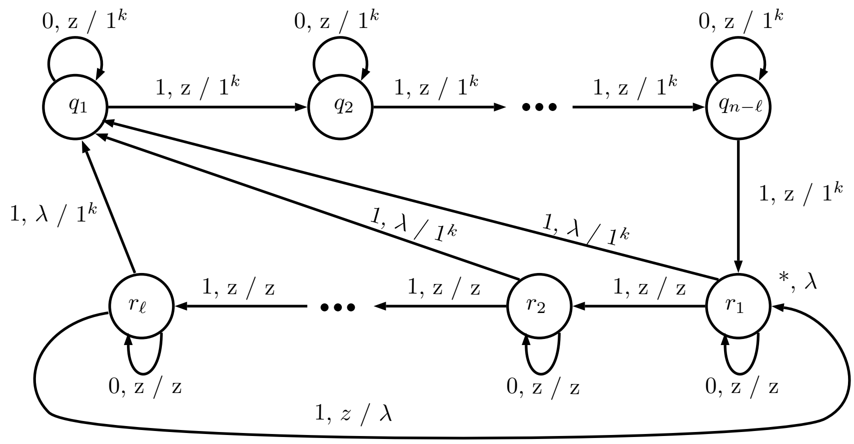

Рис. 5. Диаграмма автомата $P_{\ell,1}$.

Переход в следующее состояние осуществляется каждые $|\alpha|$ тактов при подаче единицы на вход. Таким образом автомат проходит по состояниям $q_1, ..., q_{n-\ell}$. После чего попадает в состояние r_1. При подаче нуля на вход магазин и состояние остаются неизменными, а при подаче единицы автомат переходит в следующее по циклу состояние. Так происходит до тех пор, пока автомат не достигнет состояния r_ℓ, где при подаче единицы на вход происходит стирание и переход в состояние r_1. По циклу $r_1, ..., r_\ell$ автомат ходит до опустошения магазина. Опустошается же магазин в состоянии r_1, что и будет означать зацикливание.

Теперь подсчитаем длину периода выходной последовательности.

$$L(P_{\ell,1}, \alpha) = (k + |\alpha|(n-\ell)(k-1))|\alpha|\ell + |\alpha|(n-\ell+1) =$$

$$= |\alpha|^2\ell(n-\ell)(k-1) + |\alpha|(n + (k-1)\ell + 1).$$

Рассмотренный пример доказывает следующую теорему.

Теорема 13. *При $n > 1$ и $k > 1$ найдется автомат с магазинной памятью P из $\mathcal{M}(n, 1, k)$ такой, что для входных последовательностей вида α^∞, где $\alpha = 0^{p-1}1$, $p \in \mathbb{N}$, период выходных последовательностей будет квадратично зависеть от периода входной.*

Пример 7.

Пусть автомат с магазинной памятью $P = (A, Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_2, \lambda) \in \mathcal{M}(n, m, k)$, где $A = B = \{0, 1\}$, $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Gamma = \{1, 2, ..., m\}$,

$$\psi(a, q, z) = \begin{cases} 1, \text{ если } q = q_2, \ z = \lambda, \ a = 1, \\ 0, \text{ иначе,} \end{cases}$$

$$\varphi(a, q, z) = \begin{cases} q_2, \text{ если } q = q_1, \ z = m, \ a = 1, \\ q_1, \text{ если } q = q_2, \ z \neq m, \ a = 1, \\ q, \text{ иначе,} \end{cases}$$

$$\eta(a, q, z) = \begin{cases} (z+1)^k, \text{ если } q = q_1, \ z \neq m, \ a = 1, \\ \lambda, \text{ если } q = q_1, \ z = m, \ a = 1, \\ z^k, \text{ если } q = q_1, \ a = 0, \\ z, \text{ если } q = q_2, \ a = 0, \\ (z+1)^k, \text{ если } q = q_2, \ z \neq m, \ a = 1, \\ \lambda, \text{ иначе.} \end{cases}$$

На рисунке 6 приведем диаграмму этого автомата. Переходы автомата описываются следующим шаблоном $a, z/\eta$, то есть из данного состояния, при подаче входного символа a и при значении верхнего символа магазина z, автомат записывает на выходную ленту $\psi(a, q, z)$, а в магазине стирает последний символ и дописывает слово η. Следующее состояние указывает стрелка. Начальное состояние помечено символом "$*$" и через запятую указана начальная запись в магазине.

Рассмотрим поведение автомата при подаче на вход последовательность α^∞, где $\alpha = 0^{p-1}1$. Рассмотрим, как будут меняться состояние автомата и магазина при подаче на вход слова α:

$(q_2, m) \Rightarrow^\alpha (q_2, \lambda)$;
$(q_2, z) \Rightarrow^\alpha (q_1, (z+1)^k), 0 \leq z < m$;
$(q_1, z) \Rightarrow^\alpha (q_1, z^{(k-1)(|\alpha|-1)}(z+1)^k), 0 < z < m$;
$(q_1, m) \Rightarrow^\alpha (q_2, m^{(k-1)(|\alpha|-1)})$.

Оказывается, что полученные уравнения можно рассматривать как уравнения автономного автомата с магазинной памятью, а, значит, мы можем воспользоваться соответствующей техникой для вычисления периода выходной последовательности.

Для оценки длины периода автономного автомата с магазинной памятью удобно пользоваться следующими функциями: $\omega(q, \gamma) : Q \times \Gamma^* \rightarrow$

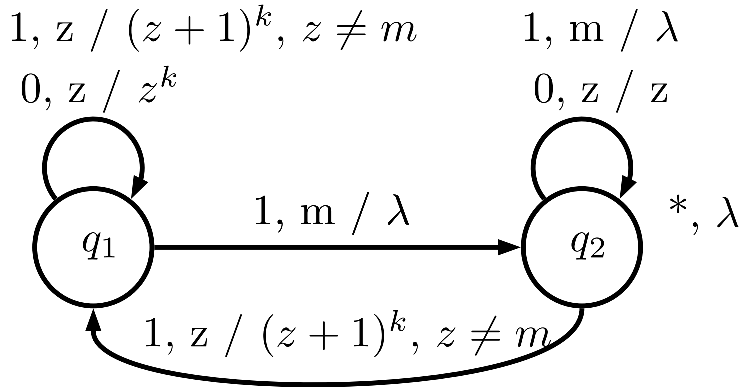

Рис. 6. Диаграмма автомата P.

$\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ и $\pi(q,\gamma) : Q \times \Gamma^* \to Q$, которые формально определим следующим образом. Пусть автомат находится в состоянии q, а в магазине лежит слово γ. Если существует такое минимальное положительное количество тактов τ работы автомата, что магазин становится пустым, а автомат переходит в состояние q', то положим, что $\omega(q,z) = \tau$, а $\pi(q,z) = q'$, иначе $\omega(q,z) = \infty$, а значение $\pi(q,z)$ не определено.

Заметим, что

$$\omega(q_2, m) = |\alpha|.$$

$$\omega(q_2, m-1) = |\alpha| + \omega(q_1, m^k) = 2|\alpha| + \omega(q_2, m^{(k-1)|\alpha|}) =$$
$$= 2|\alpha| + (k-1)|\alpha|\omega(q_2, m) = |\alpha| + ((k-1)|\alpha| + 1)\omega(q_2, m)$$

$$\omega(q_2, m-2) = |\alpha| + \omega(q_1, (m-1)^k) = 2|\alpha| + \omega(q_1, (m-1)^{(k-1)|\alpha|} m^k) =$$

$$= 3|\alpha| + \omega(q_2, (m-1)^{(k-1)|\alpha|} m^{(k-1)|\alpha|}) =$$
$$= 3|\alpha| + (k-1)|\alpha|\omega(q_2, m) + (k-1)|\alpha|\omega(q_2, m-1) =$$
$$= |\alpha| + ((k-1)|\alpha| + 1)\omega(q_2, m-1).$$

По индукции получаем, что для $i < 1 < m$ выполнено

$$\omega(q_2, i-1) = |\alpha| + ((k-1)|\alpha| + 1)\omega(q_2, i).$$

Период будет равен

$$\omega(q_2, \lambda) = (m+1)|\alpha| + \omega(q_2, 1^{(k-1)|\alpha|}2^{(k-1)|\alpha|}...m^{(k-1)|\alpha|}) =$$
$$= |\alpha| + ((k-1)|\alpha|+1)\omega(q_2, 1).$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \omega(q_2, m) = |\alpha|, \\ \omega(q_2, m-1) = |\alpha| + ((k-1)|\alpha|+1)\omega(q_2, m), \\ \omega(q_2, m-2) = |\alpha| + ((k-1)|\alpha|+1)\omega(q_2, m-1), \\ ... \\ \omega(q_2, i-1) = |\alpha| + ((k-1)|\alpha|+1)\omega(q_2, i), \\ ... \\ \omega(q_2, \lambda) = |\alpha| + ((k-1)|\alpha|+1)\omega(q_2, 1). \end{cases}$$

Решая систему, находим период выходной последовательности

$$\omega(q_2, \lambda) = ((k-1)|\alpha|+1)^m|\alpha| + \frac{((k-1)|\alpha|+1)^m - 1}{k-1},$$

то есть период выходной последовательности есть полином степени $m+1$ от периода входной.

Данный пример позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 14. *Для любого многочлена $q(x)$ найдется автомат с магазинной памятью P с двумя состояниями такой, что на последовательностях α^∞, где $\alpha = 0^{p-1}1$, $p \in \mathbb{N}$ период выходной последовательности будет больше, чем $q(p)$.*

Доказательство. Рассмотрим автомат из предыдущего примера и подберем достаточно большие m и k такие, чтобы было выполнено $q(x) < ((k-1)x+1)^m x + \frac{((k-1)x+1)^m-1}{k-1}$ при всех натуральных x. Данный автомат будет удовлетворять условиям теоремы, что и требовалось доказать. □

Пример 8.

Пусть автомат с магазинной памятью $P = (A, Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_1, \lambda) \in \mathcal{M}(n, 2, k)$, где $A = B = \{0, 1\}$, $Q = \{q_1, q_2, ..., q_n, r_2, r_3, ..., r_n\}$, $\Gamma = \{*, 1\}$,

$$\psi(a, q, z) = \begin{cases} 1, \text{ если } q = q_1, \ z = \lambda, \ a = 1, \\ 0, \text{ иначе}, \end{cases}$$

$$\varphi(a,q,z)=\begin{cases} q_{i+1},\ \text{если}\ q=q_i,\ i<n,\ z=1,\ a=1,\\ q_n,\ \text{если}\ q=q_n,\ z=1,\ a=1,\\ r_i,\ \text{если}\ q=q_i,\ i>1,\ z=*,\ a=0,\\ q_i,\ \text{если}\ q=r_i,\ i>1,\ z=1,\ a=1,\\ q_{i-1},\ \text{если}\ q=r_i,\ i>1,\ z=*,\ a=1,\\ q_1,\ \text{если}\ q=r_2,\ z=\lambda,\ a=1,\\ q,\text{иначе}, \end{cases}$$

$$\eta(a,q,z)=\begin{cases} 1^k,\ \text{если}\ q=q_i,\ i<n,\ z=1,\ a=0,\\ *1^{k-1},\ \text{если}\ q=q_i,\ i<n,\ z=\lambda,\ a=1,\\ *1^{k-1},\ \text{если}\ q=q_i,\ i<n,\ z=1,\ a=1,\\ 1,\ \text{если}\ q=q_n,\ z=1,\ a=0,\\ *1^{k-1},\ \text{если}\ q=r_i,\ z=1,\ a=1,\\ *,\ \text{если}\ q=r_i,\ z=*,\ a=1,\\ *,\ \text{если}\ q=q_1,\ z=*,\ a=0,\\ \lambda,\ \text{если}\ q=q_1,\ z=*,\ a=1,\\ \lambda,\ \text{иначе}. \end{cases}$$

На рисунке 7 приведем диаграмму этого автомата. Переходы автомата описываются следующим шаблоном $a, z/\eta$, то есть из данного состояния, при подаче входного символа a и при значении верхнего символа магазина z, автомат записывает на выходную ленту $\psi(a,q,z)$, а в магазине стирает последний символ и дописывает слово η. Следующее состояние указывает стрелка. Начальное состояние помечено символом "$*$" и через запятую указана начальная запись в магазине.

Рассмотрим поведение автомата при подаче на вход последовательность α^∞, где $\alpha = 0^{p-1}1$. Рассмотрим, как будут меняться состояние автомата и магазина при подаче на вход слова α:

$(q_1,\lambda) \Rightarrow^\alpha (q_1, *1^{k-1})$;
$(q_i,1) \Rightarrow^\alpha (q_{i+1}, 1^{(k-1)(p-1)} * 1^{k-1}),\ i<n$;
$(q_n,1) \Rightarrow^\alpha (q_n,\lambda)$;
$(q_i,1*) \Rightarrow^\alpha (q_i, *1^{k-1}),\ i>1$;
$(q_i,**) \Rightarrow^\alpha (q_{i-1}, *),\ i>1$;
$(q_1,*) \Rightarrow^\alpha (q_1,\lambda)$.

Выписанные выше уравнения не являются уравнениями для автономного автомата с магазинной памятью, так как в некоторых случаях

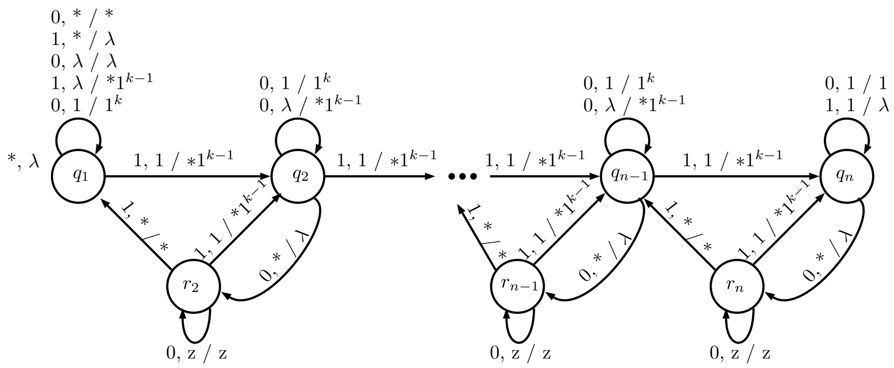

Рис. 7. Диаграмма автомата P.

имеет место зависимость от двух верхних символов магазина. Тем не менее, этих уравнений оказывется вполне достаточно, чтобы вычислить длину периода выходной последовательности.

Введем следующие обозначения:

$$\omega(q_n, *^i 1 *^{n-i}) = \omega_i + \omega(q_n, *^n),\ \ i = 1, ..., n.$$

Нетрудно видеть, что

$$\omega(q_n, *^n 1) = p + \omega(q_n, *^n 1),$$

то есть

$$\omega_n = p.$$

$$\omega(q_n, *^{n-1} 1 *) = p + \omega(q_n, *^n 1^{k-1}) = p + (k-1)p + \omega(q_n, *^n) = kp + \omega(q_n, *^n).$$

Откуда получаем, что

$$\omega_{n-1} = kp.$$

Обозначим $d = (k-1)p - 1$.

$$\omega(q_n, *^{n-2} 1 * *) = p + \omega(q_{n-1}, *^{n-2} 1^(k-1)) =$$

$$= 2p + \omega(q_{n-1}, *^{n-1} 1^k) = 3p + \omega(q_{n-1}, *^{n-1} 1^d * 1^{k-1} =$$

$$= 2p + kp + \omega(q_n, *^{n-1} 1^d *) = 2p + (d+1)kp + \omega(q_n, *^n).$$

Откуда получаем, что

$$\omega_{n-2} = 2p + (d+1)\omega_{n-1}.$$

По индукции получаем, что

$$\omega_i = 2p + (d+1)\omega_{i+1}$$

для $i = 1, ..., n-2$.

Обозначим $\omega_0 = 2p + (d+1)\omega_1$. Получили систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \omega_{n-1} = kp, \\ \omega_{n-2} = 2p + (d+1)\omega_{n-1}, \\ ... \\ \omega_i = 2p + (d+1)\omega_{i+1}, \\ ... \\ \omega_0 = 2p + (d+1)\omega_1, \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$\omega_0 = 2p\frac{(d+1)^{n-1}-1}{d} + (d+1)^{n-1}kp = 2p\frac{((k-1)p)^{n-1}-1}{(k-1)p-1} + ((k-1)p)^{n-1}kp.$$

Нетрудно видеть, что для длины периода выполнено:
$L(P,\alpha) = \omega(q_1, \lambda) = p + \omega(q_1, *1^{k-1}) = 2p + \omega(q_2, *1^d * 1^{k-1}) = ... =$
$= np + \omega(q_n, (*1^d)^{n-1} * 1^{k-1}) = np + (k-1)n + \omega(q_n, (*1^d)^{n-1}*) =$
$= (n-1)p + kp + \omega(q_n, (*1^d)^{n-1}*) = (n-1)p + \omega_{n-1} + \omega(q_n, (*1^d)^{n-1}*) =$
$= (n-1)p - 2p + 2p + \omega_{n-1} + d\omega_{n-1} + \omega(q_n, (*1^d)^{n-1}*) =$
$= (n-1)p - 2p + \omega_{n-2} + \omega(q_n, (*1^d)^{n-2}*^2) =$
$= (n-1)p - 4p + \omega_{n-3} + \omega(q_n, (*1^d)^{n-3}*^3) = ... =$
$= (n-1)p - 2(n-2)p + \omega_1 + \omega(q_n, (*1^d)*^{n-1}) =$
$= (n-1)p - 2(n-1)p + \omega_0 + \omega(q_n, *^n) = \omega_0 - (n-1)p + \omega(q_n, *^n) =$
$= \omega_0 + p.$

Продолжая, получаем:

$$L(P,\alpha) = \omega_0 + p = p + 2p\frac{((k-1)p)^{n-1}-1}{(k-1)p-1} + ((k-1)p)^{n-1}kp.$$

При $k = 2$ получаем, что длина периода полиномиально зависит от длины входного периода и равна:

$$2p^n + p + 2\frac{p^n - p}{p - 1}.$$

Данный пример позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 15. *Для любого многочлена $q(x)$ найдется автомат с магазинной памятью P из $\mathcal{M}(n, 2, 2)$ такой, что на последовательностях α^∞, где $\alpha = 0^{p-1}1$, $p \in \mathbb{N}_0$, а $\mathbb{N}_0$ — бесконечное подмножество натуральных чисел, период выходной последовательности будет больше, чем $q(p)$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть автомат из предыдущего примера с достаточно большим числом состояний. $\square$

7. Заключение

В данной работе рассматривалась задача описания автоматов с магазинной как преобразователей последовательностей. Было известно, что, так же как и конечные автоматы, автоматы с магазинной памятью переводят периодические последовательности в периодические. Вокруг этого факта и выстроена работа, а именно: приведено описание зависимости периода выходной последовательности от характеристик автомата и периода входной последовательности. Оказалось, что наличие потенциально бесконечной памяти в виде магазина принципиально усложняет эту задачу.

Большая часть работы посвящена описанию автономного автомата с магазинной памятью. Была приведена экспоненциальная от характеристик автомата верхняя оценка на период выходной последовательности для автономного случая. В случае, когда в алфавите магазина есть хотя бы два символа, удалось построить пример, который показывает, что принципиально оценку понизить нельзя. Однако в случае, когда алфавит магазина содержит ровно один символ, ситуация резко упрощается. В этом случае удалось доказать верхнюю квадратичную от числа состояний оценку. Был приведен пример, в котором полученная верхняя оценка асимптотически достигается.

Оценки, полученные для автономного случая, удалось применить для получения оценок для случая автомата со входом. Оказалось, что даже в простейшем случае, когда в алфавите магазина всего один символ, автомат может преобразовывать период квадратичным образом, то есть период выходной последовательности квадратично зависит от периода входной. В этом заключается принципиальное отличие класса автоматов с магазинной памятью от класса конечных автоматов. Более того, был построен пример автомата всего с двумя состояниями, который способен преобразовывавать период входной последовательности квадратично. В общем же случае, когда в алфавите магазина разрешено использовать более одного символа, автомат способен преобразовывать периодическую последовательность полиномиально.

Помимо уже описанных результатов отдельным пунктом хотелось бы отметить, что в процессе доказательства утверждений было разработано некоторое количество алгоритмов, которые позволяют по уравнениям автомата эффективно получать длину периода выходной последовательности.

Подход к изучению периодических свойств — это первый шаг к построению теории фукнциональных систем на основе автоматов с магазинной памятью. Описание периодических свойств позволяет по-новому взглянуть на автомат с магазинной памятью. Автор верит, что предложенные им подходы могут быть плодотворно применены к решению задач, связанных с автоматами с магазинной памятью.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю — доктору физико-математических наук, профессору Дмитрию Николаевичу Бабину за постановку задачи, постоянное внимание к работе и всестороннюю поддержку, профессору Гасанову Эльяру Эльдаровичу и Калачеву Глебу Вячеславовичу за плодотворное обсуждение работы, а также заведующему кафедрой академику Валерию Борисовичу Кудрявцеву и всему коллективу кафедры математической теории интеллектуальных систем за доброжелательную и творческую атмосферу.

Список литературы

[1] А. Ахо, Дж. Ульман Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции, 1, Мир, 1978.

[2] Бабин Д.Н. О суперпозициях о.д.-функций ограниченного веса, Логико-алгебраические конструкции, Тверь, 1984,21-27.

[3] Бабин Д.Н., Разрешимый случай задачи о полноте автоматных функций, Дискретная математика, том 4, выпуск 4, 1992, 41-56, Наука, Москва.

[4] Бабин Д.Н., О классификации автоматных базисов Поста по разрешимости свойств полноты и А-полноты, ДАН, том 367, выпуск 4, 1999, 439-441.

[5] Бабин Д.Н., О полноте двухместных о.д.-функций относительно суперпозиции, Дискретная математика, том 1, выпуск 4, 1989, 86-91.

[6] Bar-Hillel Y., Perles M., Shamir E., On formal properties of simple phrase structure grammars. Z. Phonctik, Sprachwissensch. Kommunikationsforsch. 14, 1961, 143-172.

[7] C. Beeri, An improvement on Valiant's decision procedure for equivalence of deterministic finite-turn pushdown automata, Theoret. Comput. Sci. 3 (1976) 305-320.

[8] Буевич В.А. Об алгоритмической неразрешимости распознавания А-полноты для ограниченно-детерминированных функций, Математические заметки, выпуск 6, 1972, 687-697.

[9] Буевич В.А. Условия А-полноты для автоматов, М., изд. МГУ, 1986.

[10] Гинзбург С. (Ginsburg S.), The mathematical theory of context-free languages, McGraw-Hill, New York. (Русский перевод: Гинзбург С., Математическая теория контекстно-свободных языков, изд-во "Мир М., 1970).

[11] Гинзбург С., Грейбах С. (Ginsburg S.,Greibach S.), Deterministic context free languages, Information and Control, Volume 9, Issue 6, 1966, 620–648.

[12] Dassow J., Ein modifizierter Vollstandigkeitsbegriff in einer Algebra von Automatenabbildungen, Dissertation Doktor B, Rostock, Universitet,1978.

[13] S. Bohm, S. Goller, P. Jancar, Equivalence of deterministic one-counter automata is NL-complete, in: Proc. of STOC, ACM, 2013, pp. 131–140.

[14] S. Bohm, S. Goller, P. Jancar, Bisimulation equivalence and regularity for real-time one-counter automata, Journal of Computer and System Sciences Volume 80, Issue 4, June 2014, pp. 720–743.

[15] Гинсбург С., Роуз (Ginsburg S., Rose G.F.), Some recursively unsolvable problems in ALGOL-like languages, J. Assoc. Computing Machinety, 10, 1963, 175-195.

[16] M.A. Harrison, I.M. Havel, A. Yehudai, On equivalence of grammars through transformation trees, Theoret. Comput. Sci. 9 (1979), 173-205.

[17] Иванов И. Е. Нижняя оценка на максимальную длину периода выходной последовательности автономного автомата с магазинной памятью. Интеллектуальные системы, том 19, вып. 3, 2015, 175-193.

[18] Иванов И. Е. Улучшение нижней оценки на максимальную длину периода выходной последовательности автономного автомата с магазинной памятью Интеллектуальные системы, том 20, вып. 4, 2016, 166-183.

[19] Иванов И. Е. Оценка длины периода выходной последовательности для автономного автомата с магазинной памятью с однобуквенным магазином. Интеллектуальные системы, том 21, вып. 1, 2017, 112-148.

[20] P. Jancar, Bisimulation is decidable for one-counter processes, Proc. ICALP 97, Springer, Berlin, 1997, pp. 549-559.

[21] Клини (Kleene S.C.), Representation of events in nerve nets, в сб. Automata Studies под ред. Shannon C.E., McCarthy J., Princeton University Press, Princeton, N.J. (Русский перевод: Клини С.К., Представление событий в нервных сетях, в сб. "Автоматы ИЛ, М., 1956, 15-67.)

[22] Wolfgang Coy, Automata in Labyrinths, FCT, 1977, 65-71.

[23] A.J. Korenjac, J.E. Hopcroft, Simple deterministic languages, Proc. 7th Annu. IEEE Switching and Automata Theory Conf., 1966, pp. 36-46.

[24] Кратко М.И. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов, ДАН СССР, 1964, том 155, выпуск 1, 35-37.

[25] Кудрявцев В.Б. Теорема полноты для одного класса автоматов без обратных связей. Проблемы кибернетики, 1962 год №8, 91-115.

[26] Кудрявцев В.Б. О мощностях множеств предполных классов некоторых функциональных систем, связанных с автоматами, ДАН СССР том 151, выпуск 3, 1963, 493-496.

[27] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.:Наука, 1985.

[28] Летичевский А.А. Условия полноты для конечных автоматов, Вычислительная математика и математическая физика, №4, 1961, 702-710.

[29] Летуновский А.А. Цикловые индексы автомата. Дискретная математика, том 25, выпуск 4, 24-29.

[30] Мак-Калок, Питтс (McCullough W.S., Pitts E.), A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity, Bull. Math. Biophys., 5, 1943, 115-133. (Русский перевод: Маккалок У.С. Питтс Э., Логическое исчисление идей, относящихся к нервной активности, в сб. "Автоматы ИЛ, М., 1956, 362-384)

[31] McNaughton R. Testing and generating infinite sequence by a finite automation. - Information and Control, v.9, 5, 1966, 521-530.

[32] Мур (Moore E.F.) Gedanken experiments on sequential machines в сб. Automata Studies под ред. Shannon C.E., McCarthy J., Princeton University Press, Princeton, N.J. (Русский перевод: Мур Э.Ф., Умозрительные эксперименты с последовательностными машинами, в сб. "Автоматы ИЛ, М., 1956, 179-210.)

[33] Dominique Perrin, Jean-ŕEric Pin (2004): Infinite words. Pure and Applied Mathematics 141, Elsevier.

[34] Рабин, Скотт (Rabin M.O., Scott D.) Finite automata and their decition problems, IMB J. Res. Devel., 3, 1959, 114-125. (Русский перевод: Рабин М.О., Скотт. Д., Конечные автоматы и задачи их разрешения, Кибернетический сборник, вып 4, ИЛ, М., 1962, 56-91.)

[35] Тьюринг (Turing A. M.), On computable numbers, with an application to the Entscheidungs problem, Proc. London Math. Soc., ser. 2, 42, 1936, 230-265; Corrections, там же, 43, 544-546.

[36] Хомский (Chomsky N.), Three models for the description of language. IRE Transactions on Information Theory, 2:3, 1956, 113–124. (Русский перевод: Хомский Н. Три модели для описания языка, Кибернетический сборник, вып. 2, ИЛ, М., 1961, 237-266.)

[37] Хомский (Chomsky N.), Context-free grammars and pushdown storage, Quarlerly Progress Report, № 65, Research Laboratory of Electronics, Massachusetts Institute of Technology, Cambrig, Mass, 1962.

[38] Шютценберже (Schutzenberger M. P.), On contex-free languages and pushdown automata, Information and Control, 6:3, 1963, 246-264.

[39] Эви (Evey R.J.), Applications of pushdown-store machines, Proc. AFIPS Fall Joint Computer Conference, 24, 1963, 215-227.

[40] Эттингер (Oettinger A.), Automatic syntatic analysis and the pushdown store, в сб. Structure of Language and its Mathematical Concepts, Proc. 12th Symposium on Applied Mathematics, 1961, 104-129.

[41] M. Oyamaguchi, The equivalence problem for real-time d.p.d.a's, J. Assoc. Comput. Mach. 34 (1987), 731-760.

[42] M. Oyamaguchi, Y. Inagaki, N. Honda, The equivalence problem for real-time strict deterministic languages, Inform. and Control 45 (1980), 90-115.

[43] Post E. Two-Valued 1.erative Systems of Mathematical Logic. Princeton Univ. Press, Princeton, 1941.

[44] V.Yu. Romanovskii, Equivalence problem for real-time strict deterministic pd-automata, Kibernetika (5) (1980) 49-59 (English translation in Cybernet. Systems Anal. (1981), 689-700.

[45] V.Yu. Romanovskii, Equivalence problem for real-time deterministic pushdown automata, Kibernetika (2) (1986), 13-23 (English translation in Cybernet. Systems Anal. (1986), 162-175).

[46] G. Senizergues, The equivalence problem for deterministic pushdown automata is decidable, Proc. ICALP 97, Lecture Notes in Computer Science, vol. 1256, Springer, Berlin, 1997, pp. 671-681.

[47] R. E. Stearns, A Regularity Test for Pushdown Machines, INFORMATION AND CONTROL 11, 323-340 (1967).

[48] C. Stirling, Decidability of bisimulation equivalence for normed pushdown processes, Proc. CONCUR 96, Lecture Notes in Computer Science, vol. 1119, Springer, Berlin, 1996, pp. 217-232.

[49] Строгалов А.С., Метрические свойства о.д.-функций, Межвузовский сборник трудов, N 56, МЭИ, 1985, стр. 80-84.

[50] Rozenberg, Grzegorz, Salomaa, Arto (Eds.), Handbook of Formal Languages, Volume 3 Beyond Words, Ludwig Staiget, chapter 6, 339-382, Springer, 1997.

[51] L.G. Valiant, Decision procedures for families of deterministic pushdown automata, Ph.D. Thesis, University of Warwick, 1973.

[52] L.G. Valiant, M.S. Paterson, Deterministic one-counter automata, J. Comput. System Sci. 10 (1975) 340-350.

[53] Хазбун И.В., Об условиях полноты и выразимости в точной алгебре автоматов, Логико-алгебраические конструкции, Тверь 1984, стр. 35-41.

алгебре автоматов

[54] Часовских А.А., О полноте в классе линейных автоматов, Математическме вопросы кибернетики, 1995, N3, стр. 140-166.

[55] Яблонский С.В. Функциональные построения в k-значной логике, Труды математического института им. В.А. Стеклова, АН СССР, 1958, Т.51, стр. 5-142.

About automaton functions for pushdown automaton
Ivanov I.E

Realtime pushdown transducer saves the set of periodic sequences. Earlier the author found upper and lower bounds for max period of output for transducer without input as a function from parameters of transducer. There are upper and lower bounds for max period of output in general case in current paper. The max period of transducer output has been studied as function from period of input sequence.

Keywords: realtime pushdown transducer, deterministic function, periodic sequences.