О предикатной эквивалентности формул алгебры логики

Э.Э. Гасанов, А.А. Шакиров

Для описания геометрических фигур можно использовать формулы алгебры логики в стандартном базисе: дизъюнкция, конъюнкция и отрицание, в которых символы переменных заменены на предикаты, описывающие базисные фигуры. В работе исследуется отношение $\mathcal{P}$-равенства формул алгебры логики, введенное в [1], которое подразумевает равенство формул в случае равенства описываемых фигур. Устанавливается, что при надлежащем подборе множества базисных фигур $\mathcal{P}$ отношения $\mathcal{P}$-равенства и обычного равенства формул являются эквивалентными. Оценивается сложность описания базиса $\mathcal{P}$, при котором эта эквивалентность может быть достигнута.

1 Введение

В компьютерной математике важную роль играют формальные языки, с помощью которых можно описывать объекты, подлежащие изучению. Такие языки могут использоваться, например, для описания геометрических фигур. Мы рассмотрим этот подход для описания геометрических объектов. Суть его состоит в следующем. Задано некоторое множество $\mathcal{P}$ базисных исходных фигур p, из которых с помощью теоретико-множественных операций $\bigcap, \bigcup, \overline{}$ получается множество P, вообще говоря, новых геометрических объектов (фигур).

В работе рассматриваются фигуры, задаваемые на плоскости. В этом случае базисные фигуры можно описывать двухместными предикатами, область истинности которых образует такую фигуру на плоскости. Тогда задание комбинаций теоретико-множественных операций над такими фигурами интерпретируется как формула логики предикатов, построенная из указанных предикатов и логических связок $\wedge, \vee, \neg$, соответствующих операциям $\bigcap, \bigcup, \overline{}$, что приводит к формальному языку Φ.

Каждая формула логики предикатов описывает некоторую геометрическую фигуру. Пусть заданы формулы $\mathcal{A}(X_1, \ldots, X_n)$, $\mathcal{B}(X_1, \ldots, X_n)$ из Φ и подстановка

$$\pi = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{array} \right).$$

Множество всех m-подстановок обозначим через Π^m. Пусть $M \subseteq \Pi^m$. Если при любой подстановке $\pi \in M$ предикатов из $\mathcal{P}$ вместо переменных $(X_1, \dots, X_n)$ в формулы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ получаемые формулы, называемые $\mathcal{P}$-формулами, описывают совпадающие фигуры, то будем говорить, что формулы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ являются $(M, \mathcal{P})$-*равными.*

Это отношение равенства разбивает множество Φ на классы эквивалентности, где каждый класс содержит только $(M, \mathcal{P})$-равные формулы. Обозначим это разбиение через $\mathcal{D}_{M,\mathcal{P}}$.

Отметим, что обычное равенство формул разбивает множество Φ на классы эквивалентности, где каждый класс содержит только равные формулы. Обозначим это разбиение через $\mathcal{D}$.

Здесь рассматривается вопрос о нахождении такого множества базисных фигур $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_m\}$, чтобы порождаемое им разбиение $\mathcal{D}_{M,\mathcal{P}}$ совпадало с разбиением $\mathcal{D}$.

Используемые ниже терминология и факты берутся из [2],[3].

Авторы выражают благодарность В.Б.Кудрявцеву за постановку задачи и А.С.Строгалову за внимание и помощь в работе.

2 Основные понятия и результаты

Пусть R и N — множества действительных и натуральных чисел, соответственно; $E_2 = \{0, 1\}$.

R^2 — двумерное евклидово пространство и B^n — единичный $n-$мерный куб, т.е. B^n состоит из всех векторов $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, где при $i = 1, 2, \dots, n$ имеет место $\alpha_i \in E_2$, для которых справедлива евклидова метрика.

Пусть $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$ и $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n, \dots\}$ — алфавиты переменных принимающих значения из R, и из E_2, соответственно. Далее для простоты вместо u_n и w_n будем использовать знаки x, y, и X, Y, соответственно, возможно, с индексами.

Пусть $X_1 \wedge X_2, X_1 \vee X_2, \neg X$ суть булевы функции, называемые, соответственно, *конъюнкцией, дизъюнкцией и отрицанием* и B — множество этих функций.

Обычным образом введем понятие формулы над B.

Для $\sigma \in E_2$ обозначим через X^σ булевскую функцию такую, что $\neg X$, если $\sigma = 0$, и X, если $\sigma = 1$.

Для упрощения записи в некоторых формулах будут опускаться скобки, как это принято в алгебре логики.

Переменная $X_i (1 \le i \le n)$ функции $F(X_1, \dots, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \dots, X_n)$ называется *существенной*, если можно указать такие наборы

$\widetilde{\alpha^n} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta^n} = (\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, 1, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_n)$, соседние по $i-$той координате, что $F(\widetilde{\alpha^n}) \neq F(\widetilde{\beta^n})$. В противном случае переменная X_i называется *фиктивной.*

Две функции $F(X_1, \ldots, X_n)$ и $G(Y_1, \ldots, Y_m)$ из P_2 называются *равными*, если множества их существенных переменных совпадают и на любых двух наборах $\widetilde{\alpha^n}$ и $\widetilde{\beta^m}$, различающихся, может быть, только значениями несущественных переменных, выполнено

$$F(\widetilde{\alpha^n}) = G(\widetilde{\beta^m}).$$

Пусть Φ_B — множество всех формул над B и $\Phi_B(X_1, \ldots, X_n)$ (или просто $\Phi_B(n)$) — множество всех формул над B, реализующих функции, существенно зависящие от переменных $X_1, \ldots, X_n$.

Формулы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ из Φ_B называются *равными*, если они реализуют равные функции. Это отношение равенства разбивает Φ_B на классы эквивалентности $\mathcal{D}$, которые содержат точно все формулы, которые реализуют равные функции.

Если $\mathcal{A}$ формула из Φ_B, то через $\mathcal{A}_{\text{сднф}}$ обозначим совершенную дизъюнктивную нормальную форму, равную $\mathcal{A}$.

Открытое множество в R^2 будем называть также *областью* или *фигурой.* Пустое множество в R^2 будем называть пустой фигурой.

Рассмотрим множество базисных фигур в R^2 $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$. Каждой фигуре G_i сопоставим предикат $p_i(x_1, x_2)$, областью истинности которого является G_i, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Пусть $\mathcal{P} = \{p_1(x_1, x_2), p_2(x_1, x_2), \ldots, p_m(x_1, x_2)\}$ и $\mathcal{A}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in \Phi_B(n)$. Подставим в $\mathcal{A}$ вместо каждой переменной X_i предикат p_j из $\mathcal{P}$. Данную операцию назовем *полной* подстановкой (или просто подстановкой), и полученное выражение $\mathcal{A}(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ назовем *$\mathcal{P}$-формулой.*

Поскольку описания фигуры G как в виде открытого подмножество плоскости, так и в виде предиката p, область истинности которого есть это подмножество G, являются тавтологичными, то мы далее будем использовать предикат p для обозначения фигуры G и будем говорить "фигура p"несмотря на то, что p — предикат, описывающий фигуру G.

Свяжем с каждой $\mathcal{P}$-формулой $\mathcal{A}(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ некую фигуру

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}(p_1, p_2, \ldots, p_m)} \subseteq R^2$$

так, как это было сделано в [1], и будем говорить, что $\mathcal{P}$-формула $\mathcal{A}(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ задает (или описывает) фигуру $\mathcal{F}_{\mathcal{A}(p_1, p_2, \ldots, p_m)}$.

Фигуры $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ называются *равными* (пишем $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$), если они совпадают в R^2 как множества.

$\mathcal{P}$-формулы $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ и $\mathcal{B}(\mathcal{P})$ назовем *$\mathcal{P}$-равными* (пишем $\mathcal{A}(\mathcal{P}) \overset{\mathcal{P}}{=} \mathcal{B}(\mathcal{P})$), если они задают равные фигуры.

Пусть M — некоторое подмножество множества всех m-подстановок Π^m.

Формулы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются $(M, \mathcal{P})$-*равными,* (пишем $\mathcal{A} \overset{M,\mathcal{P}}{=} \mathcal{B}$), если при любой соответственно одинаковой подстановке $\pi \in M$ в них предикатов из $\mathcal{P}$ вместо переменных получаемые $\mathcal{P}$-формулы являются $\mathcal{P}$-равными.

Отношение $(M, \mathcal{P})$-равенства на множестве $\Phi_B(n)$ разбивает это множество на классы эквивалентности $\mathcal{D}_{M,\mathcal{P}}$, которые содержат точно все такие формулы, которые являются $(M, \mathcal{P})$-равными.

Будем говорить, что множество базисных фигур $\mathcal{P}$ обладает M-свойством, если отношения равенства булевских формул и $(M, \mathcal{P})$-равенства эквивалентны, т. е. разбиения $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_{M,\mathcal{P}}$ совпадают, или, что то же самое, для любых двух формул $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \Phi_B(n)$ верно $\mathcal{A} \overset{M,\mathcal{P}}{=} \mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Множество всех граничных точек фигуры p назовем *границей* ∂p фигуры p.

Отрезком назовем часть прямой, заключенной между двумя различными точками этой прямой, при этом эти точки называются концами отрезка. Если x_1, x_2 концы отрезка, то отрезок обозначим через $[x_1, x_2]$.

Последовательность отрезков в R^2

$$[x_1, x_2][x_2, x_3] \dots [x_{i-1}, x_i]$$

назовем *ломаной,* и *замкнутой ломаной,* если $x_1 = x_i$.

Не имеющую самопересечений замкнутую ломаную, состоящую из n отрезков, назовем $n-$*угольником,* а отрезки этой ломаной — сторонами $n-$угольника.

Область в R^2, граница которой является $n-$угольником, называется $n-$*угольной областью.* Заметим, что для любого невырожденного $n-$угольника существует две $n-$угольные области, границей которых он является (внешняя и внутренняя).

Если p некоторая фигура, то функцию

$$h(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p \not\equiv 0 \\ 0, & \text{если } p \equiv 0 \end{cases}$$

назовем *предикатом пустоты* множества p.

Пусть p — некоторая фигура. Через p^1 обозначим фигуру p, а через p^0 — дополнение к фигуре p, т.е. фигуру $\overline{p}$.

Пусть

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix} -$$

m-подстановка из Π^m и $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_m\}$ — множество базисных фигур. Тогда булевскую функцию

$$\Omega_\pi^{\mathcal{P}}(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = h(p_{i_1}^{\alpha_1} \cap p_{i_2}^{\alpha_2} \cap \dots \cap p_{i_m}^{\alpha_m})$$

назовем *определяющей функцией* множества базисных фигур $\mathcal{P}$ относительно подстановки π.

Пусть $M = \{\pi_1, \ldots, \pi_k\} \subseteq \Pi^m$ и $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ — множество базисных фигур, тогда булевскую функцию

$$\chi_M^{\mathcal{P}} = \Omega_{\pi_1}^{\mathcal{P}} \vee \Omega_{\pi_2}^{\mathcal{P}} \vee \cdots \vee \Omega_{\pi_k}^{\mathcal{P}}$$

назовем *определяющей функцией* множества базисных фигур $\mathcal{P}$ относительно множества подстановок M.

Теорема 1 *Пусть $M \subseteq \Pi^m$, тогда множество базисных фигур $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ обладает M-свойством тогда и только тогда, когда*

$$\chi_M^{\mathcal{P}} \equiv 1.$$

Теорема 2 *Для любого n из N если $M \subseteq \Pi^n$ и $|M| = 1$, то существует такое множество базисных фигур $\mathcal{P}_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, обладающее M-свойством, что для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ фигура p_i является m_i−угольной областью, где*

$$m_i = \begin{cases} 4, & \text{если } i = 1, 2, 3 \\ 2^{i-1} - m_{i-1}, & \text{если } i > 3. \end{cases} \tag{1}$$

Теорема 3 *Для любого m из N существует такое число n в N, что если $M \subseteq \Pi^n$ и $|M| = 1$, то никакое множество базисных фигур $\mathcal{P}_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, где при $i = 1, 2, \ldots, n$ каждая область p_i является k_i−угольной и $k_i \leq m$, не может обладать M-свойством.*

Обозначим через ε следующую подстановку

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ 1 & 2 & \ldots & m \end{pmatrix}.$$

Теорема 4 *Для любого n из N и произвольного множества базисных фигур $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ справедливо $\chi_{\Pi^n}^{\mathcal{P}} \equiv 1$ тогда и только тогда, когда на каждом слое куба B^n существует хотя бы один набор $\widetilde{\alpha}$ такой, что $\Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\widetilde{\alpha}) = 1$.*

Теорема 5 *Для любого n из N и произвольного множества базисных фигур $\mathcal{P}_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, такого, что $p_n \subset p_{n-1} \subset \cdots \subset p_1$, справедливо, что $\mathcal{P}_n$ обладает Π^n-свойством.*

3 Критерий M-свойства

Пусть $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ — некоторое множество базисных фигур и $\widetilde{\alpha}=$ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ из B^m, тогда пересечение

$$p^{\widetilde{\alpha}} = p_1^{\alpha_1} \cap p_2^{\alpha_2} \cap \cdots \cap p_m^{\alpha_m}$$

будем называть *элементарной областью* (э. о.) (или *элементарной фигурой*), с кодом $\widetilde{\alpha}$.

Приведем доказательство теоремы 1.

Необходимость. Пусть множество базисных фигур $\mathcal{P}$ обладает M-свойством. Докажем, что $\chi_M^{\mathcal{P}} \equiv 1$.

Предположим, что существует такой набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in B^m$, что имеет место $\chi_M^{\mathcal{P}}(\widetilde{\alpha}) = 0$. Это означает, что для любого $\pi \in M$ справедливо $\Omega_\pi^{\mathcal{P}}(\widetilde{\alpha}) = 0$, т. е. при любой подстановке $\pi \in M$ предикатов из $\mathcal{P}$ вместо переменных элементарной конъюнкции (э. к.) $X_1^{\alpha_1} \wedge X_2^{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge X_m^{\alpha_m}$ получающаяся формула задает пустую фигуру.

Теперь, если взять формулы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ из $\Phi_B(m)$ такие, что $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$ и формулы $\mathcal{A}_{\text{сднф}}, \mathcal{B}_{\text{сднф}}$ отличаются именно по э. к. $X_1^{\alpha_1} \wedge X_2^{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge X_m^{\alpha_m}$, то приходим к равенству $\mathcal{A} \stackrel{M,\mathcal{P}}{=} \mathcal{B}$, что означает, что множество $\mathcal{P}$ не обладает M-свойством. Но это противоречит условию теоремы, что и доказывает необходимость.

Достаточность. Пусть $\chi_M^{\mathcal{P}} \equiv 1$. Докажем тогда, что множество базисных фигур $\mathcal{P}$ обладает M-свойством.

Предположим, что множество $\mathcal{P}$ не обладает M-свойством. Тогда существуют такие формулы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ из $\Phi_B(m)$, что $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$ и $\mathcal{A} \stackrel{M,\mathcal{P}}{=} \mathcal{B}$.

Пусть формулы $\mathcal{A}_{\text{сднф}}, \mathcal{B}_{\text{сднф}}$ отличаются по э. к.

$$K = X_1^{\alpha_1} \wedge X_2^{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge X_m^{\alpha_m}.$$

По предположению получим, что э. к. K при любой подстановке $\pi \in M$ предикатов из $\mathcal{P}$ вместо переменных K это формула задает пустую фигуру. Это означает, что для любого $\pi \in M$ $\Omega_\pi^{\mathcal{P}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = 0$, откуда $\chi_M^{\mathcal{P}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) =$ 0. Но это противоречит условию, что и доказывает достаточность.

Тем самым теорема 1 доказана.

4 Случай одноэлементного множества подстановок

В этом разделе мы докажем теоремы 2 и 3.

Доказательство теоремы 2

Говорим, что две многоугольные области p', p'' являются *соседними,* если их пересечение пусто, а пересечение их границ содержит невырожденную ломаную.

Пусть $\Im_n = (\mathcal{V}, \mathcal{R})$ некоторый *граф,* где $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ множество вершин, а $\mathcal{R}-$множество ребер. Если $\mathcal{V}$ конечное множество, то граф $\Im_n$ называется *конечным.* Про ребро (v_i, v_j) будем говорить, что оно соединяет вершины v_i и v_j.

Последовательность ребер $\{(v_{i_1}, v_{i_2}), (v_{i_2}, v_{i_3}), \ldots, (v_{i_{s-1}}, v_{i_s})\}$ графа $\Im_n$ называется *путем,* соединяющим вершины v_{i_1} и v_{i_s}. А если $v_{i_1} = v_{i_s}$, то путь называется *циклом.*

Путь называется *гамильтоновым,* если он проходит через каждую вершину графа $\Im_n$ в точности по одному разу. Если в гамильтоновом пути первая вершина совпадает с последней вершиной, то путь назовем *гамильтоновым циклом.*

Если $\{(v_{i_1}, v_{i_2}), (v_{i_2}, v_{i_3}), \ldots, (v_{i_{n-1}}, v_{i_n})\}$ гамильтонов путь, то договоримся обозначать его последовательностью вершин, через которые он проходит, т. е. через $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_{n-1}}, v_{i_n}$.

Наборы $\widetilde{\alpha}= (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta}= (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ из B^n назовем *соседними,* если отличаются ровно по одной координате.

Единичный куб B^n, принято изображать в виде графа, в котором множество вершин совпадает с множеством B^n, и всякие две вершины соединяются ребром, если они соседние. Этот граф также будем обозначать через B^n.

Далее для простоты в записи набора $\widetilde{\alpha}= (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \in B^m$ будем опускать круглые скобки и запятые и обозначать $\widetilde{\alpha}= \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m$.

Пусть $\widetilde{\alpha}= \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m \in B^m$ и $\widetilde{\beta}= \beta_1\beta_2\ldots\beta_k \in B^k$, тогда набор $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\beta_1\beta_2\ldots\beta_k \in B^{m+k}$, называемый *конкатенацией* наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$, обозначаем через $\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}$.

Известно, что в единичном кубе B^n существует гамильтонов путь. Приведем пример некоторого гамильтонового пути в B^n, который определим индукцией по n.

1) Базис индукции. Пусть $n = 2$. Путь 00, 01, 11, 10 является гамильтоновым путем в B^2.

2) Индуктивный переход. Пусть в кубе B^{n-1} мы построили гамильтонов путь, который обозначим

$$\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2, \widetilde{\gamma}_3, \widetilde{\gamma}_4, \ldots \widetilde{\gamma}_{2^{n-1}-1}, \widetilde{\gamma}_{2^{n-1}}.$$

Легко видеть, что путь

$$\widetilde{\gamma}_1 0, \widetilde{\gamma}_1 1, \widetilde{\gamma}_2 1, \widetilde{\gamma}_2 0, \widetilde{\gamma}_3 0, \ldots \widetilde{\gamma}_{2^{n-1}-1} 0, \widetilde{\gamma}_{2^{n-1}-1} 1, \widetilde{\gamma}_{2^{n-1}} 1, \widetilde{\gamma}_{2^{n-1}} 0$$

является гамильтоновым в кубе B^n.

Описанный гамильтонов путь назовем *опорным.* Этот путь мы также будем называть *опорным гамильтоновым циклом,* считая, что за последним набором опять следует первый.

Лемма 1 *Для любого n из N существует такое множество базисных фигур $\mathcal{P}_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, что для любого $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ из B^n, э.о.*

$$p^{\widetilde{\alpha}} = p_1^{\alpha_1} \cap p_2^{\alpha_2} \cap \cdots \cap p_n^{\alpha_n}$$

непустая, и каждая фигура p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ является при $i = 1, 2, \ldots, n$, m_i-угольной областью, где m_i удовлетворяет соотношению (1).

Доказательство леммы. Будем считать, что у нас на плоскости задана ортогональная система координат. Для произвольного $n \geq 2$ обозначим через

$$\widetilde{\gamma}_0, \widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2, \ldots \widetilde{\gamma}_{2^n-1} \tag{2}$$

опорный гамильтонов цикл в B^n

По индукции докажем следующее утверждение. Для любого $n \geq 2$ существует такой базис $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, что

1. Для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ область p_i является m_i-угольной областью, где m_i удовлетворяет соотношению (1), и стороны многоугольников p_i параллельным осям координат.

2. Для любого $\widetilde{\alpha} \in B^n$ э. о. $p^{\widetilde{\alpha}}$ — непустая, односвязная многоугольная область, стороны границ которой параллельны осям координат.

3. Для любого $i \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ $p^{\widetilde{\gamma}_i}$ и $p^{\widetilde{\gamma}_j}$ (где $j = (i+1)(mod\, 2^n)$) являются соседними областями.

4. Если мысленно ввести линию, переходящую от $p^{\widetilde{\gamma}_0}$ к $p^{\widetilde{\gamma}_1}$, затем к $p^{\widetilde{\gamma}_2}$ и так далее вдоль опорного гамильтонового цикла, и в конце вернуться из $p^{\widetilde{\gamma}_{2^n-1}}$ к $p^{\widetilde{\gamma}_0}$, то получится движение против часовой стрелки, при этом внутренность фигуры очерченной этой мысленной линией будет оставаться слева.

5. Существует множество отрезков

   $$[x_1^0, x_2^0], [x_1^1, x_2^1], \ldots, [x_1^{2^n-1}, x_2^{2^n-1}],$$

   которые мы назовем *опорными,* таких, что для любого
   $i \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ отрезок $[x_1^i, x_2^i]$ принадлежит общей границе соседних областей $p^{\widetilde{\gamma}_i}$ и $p^{\widetilde{\gamma}_j}$, где $j = (i+1)(mod\, 2^n)$; при этом отрезки $[x_1^i, x_2^i]$ и $[x_1^j, x_2^j]$,

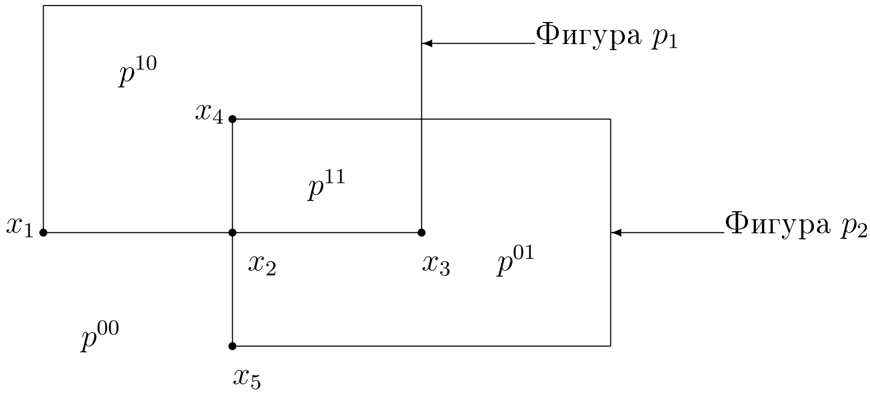

Рис. 1

- либо перпендикулярны друг другу и их концы касаются, т. е. ($x_1^i = x_1^j$) или ($x_1^i = x_2^j$) или ($x_2^i = x_1^j$) или ($x_2^i = x_2^j$),
- либо $[x_1^i, x_2^i]$ и $[x_1^j, x_2^j]$ взаимно параллельны и имеют одинаковую длину и расположены точно напротив друг друга,

и прямоугольник, имеющий в качестве сторон отрезки $[x_1^i, x_2^i]$ и $[x_1^j, x_2^j]$ целиком лежит внутри одной э. о.

6. Количество таких чисел $i \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$, что пара опорных отрезков $[x_1^i, x_2^i]$ и $[x_1^j, x_2^j]$, где $j = (i+1)(mod\, 2^n)$, перпендикулярна друг другу, равно m_{n+1}.

1). Базис индукции.

Пусть $n = 2$. Пусть p_1 и p_2 — фигуры, изображенные на рисунке 1. Легко видеть, что условия 1 и 2 утверждения индукции выполняются.

Интересующий нас гамильтонов цикл имеет вид: 00,01,11,10. С учетом этого легко проверяется и пункты 3 – 6, где в качестве опорных отрезков можно взять следующие отрезки $[x_1, x_2]$,$[x_2, x_3]$,$[x_2, x_4]$,$[x_2, x_5]$.

2) Индуктивный переход.

Пусть $n = k$, и базисное множество $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ удовлетворяет условиям утверждения индукции для $n = k$.

Пусть заданы э. о.

$$p^{\widetilde{\alpha}_0}, p^{\widetilde{\alpha}_1}, \ldots, p^{\widetilde{\alpha}_{2^k-1}}, \qquad (3)$$

построенные с помощью базисных фигур $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$.

Построим фигуру p_{k+1} так, чтобы базис $\{p_1, p_2, \ldots, p_{k+1}\}$ удовлетворял условиям утверждения индукции для $n = k + 1$.

Пусть опорный гамильтонов цикл при $n = k$ имеет вид (2).

Построение фигуры p_{k+1}. По предположению индукции существует множество опорных отрезков

$$[x_1^0, x_2^0], [x_1^1, x_2^1], \ldots, [x_1^{2^k-1}, x_2^{2^k-1}]. \tag{4}$$

Отмечаем середины каждого опорного отрезка и через эти точки проводим перпендикулярные прямые. Количество таких прямых равно 2^k. Если среди опорных отрезков имеются параллельные отрезки $[x_1^i, x_2^i]$ и $[x_1^j, x_2^j]$, где $j = (i+1)(mod\, 2^k)$, то две прямые, которые проходят через середины этих параллельных отрезков, совпадают. В таких случаях вместо двух прямых рассматривается одна прямая. Прямые пересекаются между собой в некоторых точках. В качестве сторон p_{k+1}—ой фигуры берутся такие отрезки прямых, которые проходят через отмеченные точки, и их концами являются точки пересечения двух прямых, проведенных через точки лежащие в соседних опорных отрезках.

Легко видеть, что число углов фигуры p_{k+1} равно количеству таких чисел $i \in \{0, 1, \ldots, 2^{k-1} - 1\}$, что пара опорных отрезков $[x_1^i, x_2^i]$ и $[x_1^j, x_2^j]$, где $j = (i+1)(mod\, 2^k)$, перпендикулярна друг другу. Откуда согласно пункту 6 утверждения индукции число углов фигуры p_{k+1} равно m_{k+1}.

По предположению индукции, все стороны границы p_k-ой фигуры параллельны к осям координат. Тогда по построению p_{k+1}-ой фигуры видно, что стороны границы p_{k+1}-ой фигуры расположены перпендикулярно к сторонам границы фигуры p_k. Это означает, что стороны границы фигуры p_{k+1} также параллельны к осям координат, что окончательно доказывает пункт 1 утверждения индукции при $n = k+1$.

Покажем теперь, что для любого $\widetilde{\alpha} \in B^{k+1}$ э. о. $p^{\widetilde{\alpha}}$, полученная с помощью базисных фигур $\{p_1, p_2, \ldots, p_{k+1}\}$ является непустой односвязной многоугольной областью, стороны границы которой параллельны осям координат.

Пусть $\widetilde{\gamma}_i \in B^k$ и $p^{\widetilde{\gamma}_i}$ — э. о. из (3), где $i \in \{0, 1, \ldots, 2^{k-1} - 1\}$. По предположению индукции, граница $\partial p^{\widetilde{\gamma}_i}$, области $p^{\widetilde{\gamma}_i}$, имеет два опорных отрезка и они расположены либо перпендикулярно, тогда один из концов отрезков совпадает, либо взаимно параллельны, тогда они имеет одинаковую длину и расположены точно на против друг от друга.

Когда граница фигуры p_{k+1} проходит через область $p^{\widetilde{\gamma}_i}$, то $p^{\widetilde{\gamma}_i}$ разбивается на две области $p^{\widetilde{\gamma}_i 0}$ и $p^{\widetilde{\gamma}_i 1}$ (см. рис 2а и 2б), где стрелка указывает направление движения вдоль границы фигуры p_{k+1} против часовой стрелки.

Указание направления движения важно поскольку по предположению индукции при движении от одной э. о. к другой вдоль гамильтонового цикла (2) внутренность фигуры p_{k+1} остается слева, тем самым слева от направления движения будут образовываться э. о. $p^{\widetilde{\gamma}_i 1}$, а справа $p^{\widetilde{\gamma}_i 0}$ $(i \in \{0, 1, \ldots, 2^k - 1\})$.

По предположению индукции область $p^{\widetilde{\gamma}_i}$ односвязная. Граница $\partial p^{\widetilde{\gamma}_i}$, есть некоторый многоугольник, стороны которого параллельны осям координат.

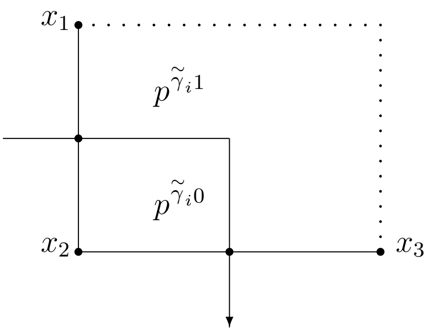

Рис. 2а

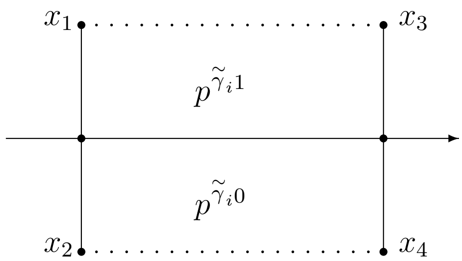

Рис. 2б

Участок границы фигуры p_{k+1}, который проходит через область $p^{\widetilde{\gamma}_i}$, пересекает только две стороны границы $\partial p^{\widetilde{\gamma}_i}$. Поэтому непустая односвязная многоугольная область $p^{\widetilde{\gamma}_i}$, этим участком границы фигуры p_{k+1}, разбивается на две непустые односвязные многоугольные области $p^{\widetilde{\gamma}_i 0}$ и $p^{\widetilde{\gamma}_i 1}$, стороны границы которых также параллельны осям координат. Тем самым пункт 2 утверждения индукции при $n = k + 1$ доказан.

Опорный гамильтонов путь в B^{k+1}, построенный из гамильтонового пути (2) имеет вид

$$\widetilde{\gamma}_0 0, \widetilde{\gamma}_0 1, \widetilde{\gamma}_1 1, \widetilde{\gamma}_1 0, \widetilde{\gamma}_2 0, \widetilde{\gamma}_2 1, \ldots \widetilde{\gamma}_{2^k-1} 1, \widetilde{\gamma}_{2^k-1} 0. \tag{5}$$

Рассмотрим два произвольных последовательных набора из (5) (считаем, что за последним набором следует первый).

Возможны следующие ситуации.

а) $\widetilde{\gamma}_i 0$, $\widetilde{\gamma}_i 1$ или $\widetilde{\gamma}_i 1, \widetilde{\gamma}_i 0$ ($i \in \{0, 1, \ldots, 2^k - 1\}$). В обоих этих случаях области $p^{\widetilde{\gamma}_i 0}$ и $p^{\widetilde{\gamma}_i 1}$ получены из области $p^{\widetilde{\gamma}_i}$ разбиением на две части участком границы фигуры p_{k+1}, и этот участок является общим участком границ областей $p^{\widetilde{\gamma}_i 0}$ и $p^{\widetilde{\gamma}_i 1}$, следовательно $p^{\widetilde{\gamma}_i 0}$ и $p^{\widetilde{\gamma}_i 1}$ соседние области.

б) $\widetilde{\gamma}_i 0$, $\widetilde{\gamma}_j 0$ или $\widetilde{\gamma}_i 1, \widetilde{\gamma}_j 1$ ($i \in \{0, 1, \ldots, 2^k - 1\}$ $k = (j+1)(mod\, 2^k)$). В обоих этих случаях области $p^{\widetilde{\gamma}_i}$ и $p^{\widetilde{\gamma}_j}$ соседние и их границы, согласно предположению индукции, имеют общий опорный отрезок $[x_1^i, x_2^i]$. Участок границы фигуры p_{k+1}, проходящий через этот отрезок, делит его пополам, оставляя при этом слева от себя (при движении из $\widetilde{\gamma}_i$ в $\widetilde{\gamma}_j$) области $p^{\widetilde{\gamma}_i 1}$ и $p^{\widetilde{\gamma}_j 1}$ и справа области $p^{\widetilde{\gamma}_i 0}$ и $p^{\widetilde{\gamma}_j 0}$, тем самым половина отрезка $[x_1^i, x_2^i]$, которая остается внутри фигуры p_{k+1}, является общим участком границ фигур $p^{\widetilde{\gamma}_i 1}$ и $p^{\widetilde{\gamma}_j 1}$, а вторая половина отрезка — фигур $p^{\widetilde{\gamma}_i 0}$ и $p^{\widetilde{\gamma}_j 0}$. Тем самым $p^{\widetilde{\gamma}_i 1}$ и $p^{\widetilde{\gamma}_j 1}$ — соседние э. о. и $p^{\widetilde{\gamma}_i 0}$ и $p^{\widetilde{\gamma}_j 0}$ — также соседние.

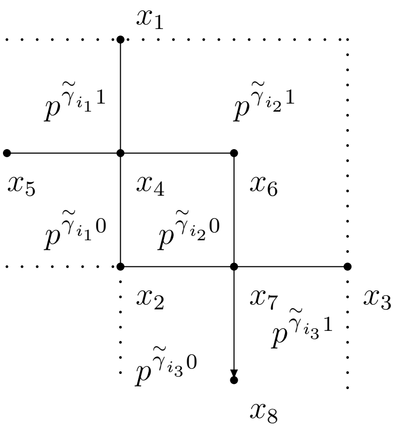

Рис. 3а

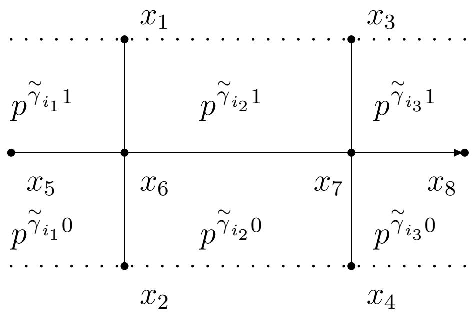

Рис. 3б

Тем самым мы доказали пункт 3 утверждения индукции для $n = k + 1$.

Докажем пункт 4 утверждения индукции. Проведем мысленную линию, проходящие через э. о. с кодами из B^{k+1} в той последовательности, которая определяется гамильтоновым циклом (5). Поскольку эта линия проходит также через э. о. с кодами из B^k в той последовательности, которая определяется гамильтоновым циклом (2), то согласно предположению индукции движение вдоль этой линии, соответствует движению против часовой стрелки, что и доказывает пункт 4 утверждения индукции для $n = k + 1$.

Теперь покажем существование опорных отрезков для случая $n = k + 1$.

Как мы уже отмечали, любые два соседних опорных отрезка могут быть расположены либо взаимно параллельно, либо перпендикулярно. Пусть для произвольной тройки областей $p^{\widetilde{\gamma}_{i_1}}$,$p^{\widetilde{\gamma}_{i_2}}$, и $p^{\widetilde{\gamma}_{i_3}}$ ($i_1 \in \{0, 2^k - 1\}$, $i_2 = (i_1 + 1) mod\, 2^k$, $i_3 = (i_2 + 1) mod\, 2^k$, $\widetilde{\gamma}_{i_1}$,$\widetilde{\gamma}_{i_2}$, $\widetilde{\gamma}_{i_3}$ — последовательные наборы из гамильтонового цикла (2)) пара опорных отрезков расположена либо взаимно параллельно, либо перпендикулярно.

После проведения фигуры p_{k+1} области $p^{\widetilde{\gamma}_{i_1}}$,$p^{\widetilde{\gamma}_{i_2}}$, и $p^{\widetilde{\gamma}_{i_3}}$ делятся на две части и будут выглядеть как на рисунке 3а и 3б.

Здесь каждая из точек x_5 и x_8 либо угол многоугольной области p_{k+1} (на подобии точки x_6 с рисунка 3а), либо точка пересечения прямой с опорным отрезком, предшествующим опорному отрезку $[x_1, x_2]$ (на подобии точки x_6 с рисунка 3б).

В случае 3а при $n = k + 1$ опорными отрезками будут

- $[x_4, x_5]$, $[x_1, x_4]$, $[x_4, x_6]$ и $[x_2, x_7]$, если в гамильтоновым цикле (5) набор $\widetilde{\gamma}_i 1$ идет вслед за $\widetilde{\gamma}_i 0$,
- $[x_4, x_5]$, $[x_2, x_4]$, $[x_6, x_7]$ и $[x_3, x_7]$ в противном случае.

В случае 3б при $n = k + 1$ опорными отрезками будут

- $[x_5, x_6]$, $[x_1, x_6]$, $[x_6, x_7]$ и $[x_4, x_7]$, если в гамильтоновым цикле (5) набор $\widetilde{\gamma}_i 1$ идет вслед за $\widetilde{\gamma}_i 0$,
- $[x_5, x_6]$, $[x_2, x_6]$, $[x_6, x_7]$ и $[x_3, x_7]$ в противном случае.

Тем самым на месте двух опорных отрезков для случая $n = k$ мы получаем четыре опорных отрезка для случая $n = k + 1$. Легко видеть, что на рассматриваемом фрагменте эти отрезки удовлетворяют всем требованиям к опорным отрезкам.

В силу произвольности выбора индекса i_1, пробегая этим индексом вдоль всего цикла (5) получим систему опорных отрезков удовлетворяющих всем требованиям пункта 5 утверждения индукции для $n = k + 1$.

Чтобы доказать пункт 6 утверждения леммы вспомним, что пара параллельных соседних опорных отрезков возникает только в случае, изображенном на рис. 3а, т. е. каждая пара перпендикулярных соседних опорных отрезков для $n = k$ порождает одну пару параллельных соседних опорных отрезков для $n = k+1$. Следовательно в случае $n = k+1$ число пар перпендикулярных соседних опорных отрезков будет равно

$$2^{k+1} - m_{k+1} = m_{k+2},$$

что доказывает пункт 6 утверждения индукции при $n = k + 1$ и тем самым полностью доказывает утверждение индукции.

Остается заметить, что утверждение леммы 1 является следствием пунктов 1 и 2 доказанного утверждения. Тем самым лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $M = \{\pi\}$ и n — произвольное число из N. Возьмем множество базисных фигур $\mathcal{P}$, описанное в лемме 1. Тогда

$$\chi_M^{\mathcal{P}}(\widetilde{\alpha}) = \Omega_\pi^{\mathcal{P}}(\widetilde{\alpha}) = h(p^{\widetilde{\alpha}}).$$

Так как для любого $\widetilde{\alpha} \in B^n$ э.о. $p^{\widetilde{\alpha}}$ согласно лемме 1 не пуста, то $\chi_M^{\mathcal{P}}(\widetilde{\alpha}) = 1$ при любом $\widetilde{\alpha} \in B^n$. Откуда согласно теореме 1 следует справедливость теоремы 2.

На рисунке 4 приведены первые восемь базисных фигур $\{p_1, p_2, \ldots, p_8\}$ (где фигура p_8 нарисована более жирной линией, чем остальные), построенных по алгоритму, описанному в лемме 1. Отметим только, что для увеличения заполненности рисунка пропорции фигур p_1 и p_2 слегка деформированы, точнее фигура p_3 проходит не через середины опорных отрезков для случая $n = 2$.

Доказательство теоремы 3

Предположим, что на плоскости расположено k $m-$угольных фигур. Они задаются $k \cdot m$ отрезками. Построим $(k+1)$-ю $m-$угольную область и посмотрим, насколько может увеличиться при этом количество э. о. Один отрезок

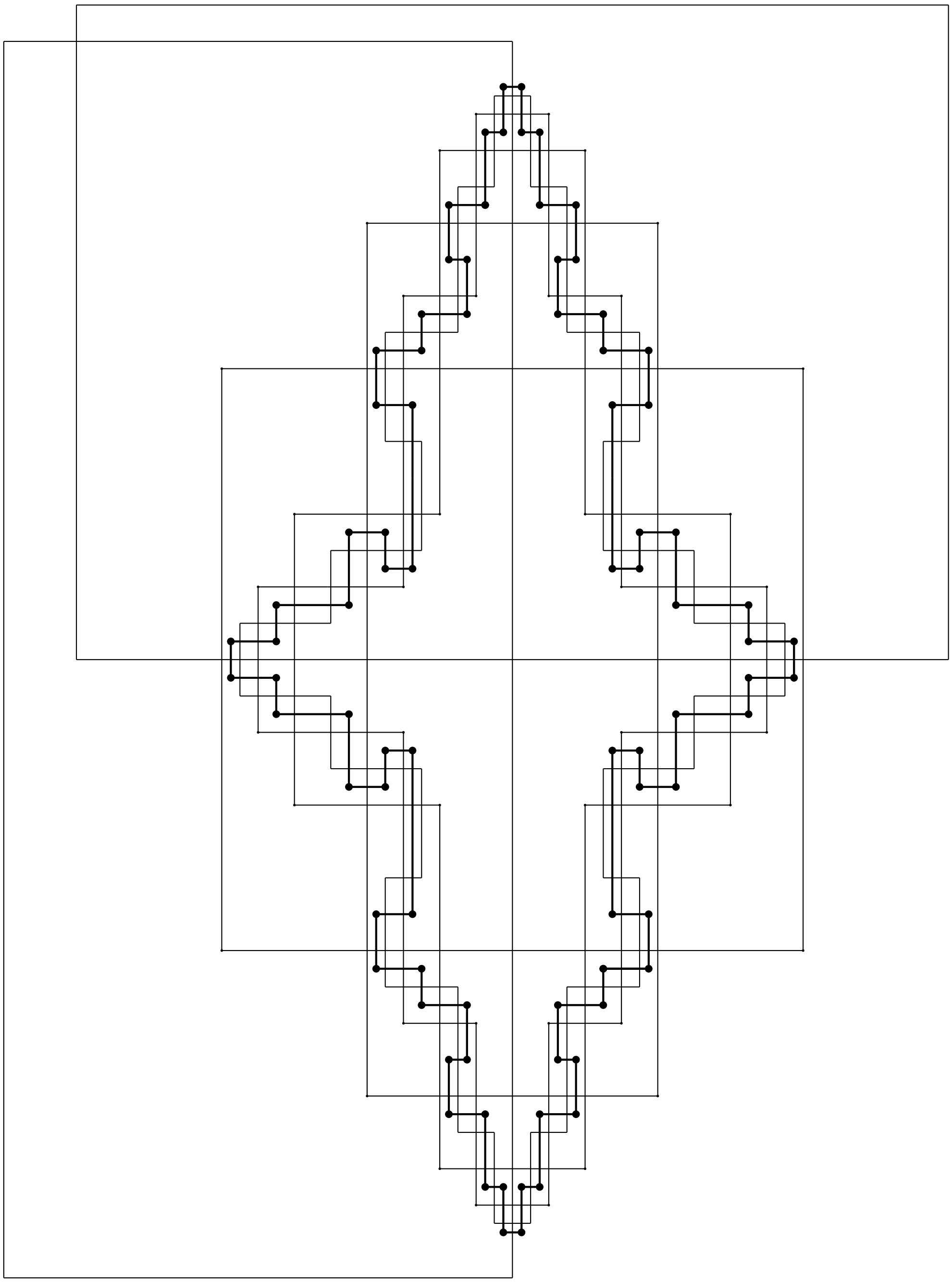

Рис. 4

$(k+1)$-ой $m-$угольной фигуры пересекает максимум $(k \cdot m)$ отрезков, а таких отрезков имеется m штук. В итоге точек пересечения будет не более, чем $(k \cdot m^2)$ и, значит $(k+1)$-я $m-$угольная фигура увеличивает число э. о. не более, чем на $(k \cdot m^2)$. Отсюда вытекает, что после проведения n $m-$угольных фигур плоскость будет разбита на не более, чем

$$2 + 1 \cdot m^2 + 2 \cdot m^2 + \cdots + (n-1) \cdot m^2$$

частей. В итоге, число частей, на которое n $m-$угольных областей могут разбить плоскость, не превышает $2 + \frac{m^2(n^2-n)}{2}$.

Поскольку, для любого $m \in N$ существует такое число $n \in N$, что выполняется следующее неравенство

$$2^n > 2 + \frac{m^2(n^2-n)}{2},$$

то для любого $m \in N$ с помощью n штук $m-$угольных фигур невозможно разбить плоскость на 2^n непустых э. о.

Следовательно, некоторые э. о. будут пустыми. Откуда сразу следует, что для любого базового множества $\mathcal{P}_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, в котором каждая фигура не более, чем $m-$угольная область, определяющая функция $\chi_M^{\mathcal{P}_n} \not\equiv 1$. Откуда как следствие теоремы 1 имеем утверждение теоремы 3.

Теорема 3 доказана.

5 Случай полного множества подстановок

В этом разделе мы докажем теоремы 4 и 5.

Доказательство теоремы 4. *Необходимость.* Пусть $\chi_{\Pi^n}^{\mathcal{P}} \equiv 1$. Предположим, что существует такой слой $B_i^n \subseteq B^n$, что для любого набора $\widetilde{\alpha}$ из B_i^n верно $\Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\widetilde{\alpha}) = 0$.

Возьмем произвольную подстановку

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$$

из Π^n и произвольный набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B_i^n$.

Рассмотрим такой набор $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in B_i^n$, что $\beta_{j_i} = \alpha_i$, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$\Omega_\pi^{\mathcal{P}}(\widetilde{\alpha}) = h(p_{j_1}^{\alpha_1} \cap \cdots \cap p_{j_n}^{\alpha_n}) = h(p_{j_1}^{\beta_{j_1}} \cap \cdots \cap p_{j_n}^{\beta_{j_n}}) = \Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\widetilde{\beta}) = 0.$$

Откуда следует, что для любого набора $\widetilde{\alpha}$ из B_i^n $\chi_{\Pi^n}^{\mathcal{P}}(\widetilde{\alpha}) = 0$, что противоречит условию. Необходимость доказана.

Достаточность. Возьмем произвольный слой i, где $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и произвольный набор $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in B_i^n$. Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B_i^n$ такой набор, что $\Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$.

Возьмем такую подстановку

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix},$$

что $\beta_i = \alpha_{j_i}$, где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Тогда $\Omega_\pi^{\mathcal{P}}(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \Omega_\pi^{\mathcal{P}}(\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_n}) = h(p_{j_1}^{\alpha_{j_1}} \cap \cdots \cap p_{j_n}^{\alpha_{j_n}}) = h(p_1^{\alpha_{j_1}} \cap \cdots \cap p_n^{\alpha_{j_n}}) = \Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$. Откуда в силу произвольности слоя i и набора $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ имеем $\chi_{\Pi^n}^{\mathcal{P}} \equiv 1$.

Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. Пусть $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Обозначим

$$\widetilde{\alpha}_i = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{i}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-i}).$$

Легко видеть, что $\widetilde{\alpha}_i \in B_i^n$ и э.о. $p^{\widetilde{\alpha}_i}$ не пуста. Откуда следует, что $\Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}_n}(\widetilde{\alpha}_i) = 1$ и согласно теореме 4 $\mathcal{P}_n$ обладает Π^n-свойством.

Теорема 5 доказана.

Список литературы

[1] А.А. Шакиров, К логическому описанию геометрических фигур. *Фундаментальная и прикладная математика* (в печати).

[2] С.В. Яблонский, Г.П. Гаврилов, В.Б. Кудрявцев. Функции алгебры логики и классы Поста. - Москва, Наука, 1966.

[3] Д. Гильберт, В. Аккерман. Основы теоретической логики. - Москва, 1947.