Случайные покрытия и системы функциональных уравнений

В.Н. Сачков

1 Введение

Пусть Z - конечное множество из m элементов и функции $f_1, f_2, \ldots, f_k$ определены отображениями

$$f_i : X \to Z, \quad 1 \leq i \leq k, \tag{1}$$

где $X = X^{(t)} = Z \times Z \times Z$ - декартово призведение с t сомножителями.

Рассмотрим систему функциональных уравнений

$$\begin{gathered} f_1(z_1, \ldots, z_n) = a_1 \\ . \quad . \quad . \quad . \\ f_k(z_1, \ldots, z_n) = a_t, \end{gathered} \tag{2}$$

где $a_1, \ldots, a_n \in Z$ заданы, а $z_1, \ldots z_n \in Z$ неизвестные, подлежащие определению. Системы такого вида применяются в различных прикладных задачах, например, при разработке иетодов тестирования технических устройств.

Обозначим через $Y_i \subseteq X$ множество решений i-го уравнения системы (2) и определим множества X_i равенствами

$$X_i \bigcup Y_i, \quad X_i \bigcap Y_i = \phi, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Совокупность решений системы (2) представляет собой множество $X \setminus (X_1 \bigcup \cdots \bigcup X_k)$, состоящее из элементов множества X, не покрытых множествами $X_1 \bigcup, \cdots \bigcup X_k$. Тогда система (2) несовместна тогда и только тогда, когда $X = (X_1 \bigcup \cdots \bigcup X_k)$, т.е. $X_1, \ldots, X_k$ являются являются блоками покрытия с повторениями множества X. Если каждое уравнение системы (2) не является тождеством при любых значениях аргументов функций и любая пара уравнений имеет несовпадающие множества решений, то имеем дело с обычным покрытием $X = (X_1 \bigcup \cdots \bigcup X_k)$ различными блоками $X_1, \ldots, X_k$. Такой подход к изучению систем функциональных уравнений с использованием покрытий множеств блоками был впервые предложен автором в статье [1] и получил развитие в последующих работах.

Так, если число решений i-го уравнения системы (2) ограничено, а именно, $\mid Y_i \mid = \mid X \mid -\alpha_i, \quad 1 \leq i \leq k$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ - заданные величины, то рассматриваются покрытия с повторениями, у которых блоки удовлетворяют условию $\mid X_i \mid = \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq k$.

В статье [1] были введены также новые понятия.

Несовместная система вида (2) называется квазисовместной, если она становится совместной при удалении любого одного уравнения. Такой системе соответствуют минимальные покрытия, в которых после удаления любого блока оставшиеся блоки не образуют покрытия.

Обобщением понятия квазисовместности является понятие t-квазисовместности системы. Несовместная система вида (2) t-квазисовместна, если после удаления любых t уравнений система становится совместной.

Такой системе соответствует t-минимальное покрытие, в котором после удаления любых t блоков оставшиеся блоки не образуют покрытия.

Задание вероятностного распределения на системе функций (1) индуцирует вероятностное распределение на соответствующем классе подмножеств множества X, являющихся блоками покрытия. В этом случае случайная величина ξ, представляющая собой число решений системы случайных уравнений вида (2), совпадает с числом непокрытых элементов множества X случайным множеством $X_1 \bigcup \cdots \bigcup X_k$. Обзор соответствующих результатов, касающихся точных и предельных распределений ξ будет изложен ниже.

К числу приводимых ниже новых результатов следует отнести изучение случайной величины, называемой индексом покрытия. Если уравнения системы (2) получаются последовательно с помощью случайного процесса до тех пор, пока полученная система не становится впервые несовместной, то этому процессу соответствует случайный выбор подмножеств $X_1, \ldots, X_{\chi_n}$ из множества X до тех пор, пока впервые множество $X_1 \bigcup \cdots \bigcup X_{\chi_n}$ не станет покрытием множества X. В этом случае χ_n представляет собой случайную величину, называемую индексом покрытия.

Ниже приводятся результаты исследований точных и предельных распределений индекса покрытия при различных вариантах задания распределений на блоках покрытий.

2 Покрытия. Минимальные покрытия

Семейство непустых подмножеств $X_1, X_2, \dots, X_k$ n-множества называется покрытием, если $X = X_1 \bigcup X_2 \bigcup \cdots \bigcup X_k$. При этом $X_1, X_2, \dots, X_k$ называются блоками покрытия, а само покрытие - k-блочным.

Покрытие n-множества $X = X_1 \bigcup X_2 \bigcup \cdots \bigcup X_k$ называется минимальным, если для любого $i, 1 \le i \le k$ существует такой элемент $x \in X$, что $x \in X_i$, но $x \notin X_j, \quad j \ne i$. Такой элемент x называется однократно покрытым.

В статье ([2]) была приведена формула для числа минимальных k-блочных покрытий n-множества с j однократно покрытыми элементами.

$$L_n(k,j) = \binom{n}{j} \sigma(j,k) \left(2^k - k - 1\right)^{n-j}, \tag{3}$$

где $\sigma(j,k)$ - числа Стирлинга второго рода.

В книге [3] получена формула для числа минимальных k - блочных покрытий n-множества

$$L_n(k) = \frac{1}{k!} \sum_{s=0}^{k} (-1) \binom{k}{s} \binom{k}{2 - s - 1}^n. \tag{4}$$

Кроме того, показано, что при $n, k \to \infty$ так, что $\frac{n}{2^k - 1} - \ln k \to \gamma$, имеет место асимптотика

$$L_n(k) = \frac{(2^k - 1)^n}{k!} e^{-e^{-\gamma}} (1 + \circ(1)) \tag{5}$$

В той же книге приведены формулы для числа k-блочных и общего числа покрытий n-множества

$$D_{nk} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{2^{n-j} - 1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots, 2^n - 1 \tag{6}$$

$$D_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} 2^{2^{n-j}} - 1, \quad n = 1, 2, \dots \tag{7}$$

Формула (7) имеется также в книге [4].

В книге [5] приводится формула для числа покрытий n-множества, содержащих β_j блоков величины $j, j = 1.2. \dots, n$

$$D_n(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{j \ge 1} \binom{\binom{k}{j}}{\beta_j} \tag{8}$$

В работе [6] приведены формулы для числа обычных и минимальных покрытий с повторениями n-множества X не обязательно различными блоками $X_1, X_2, \dots, X_k$ для четырех случаев в зависимости от того, помечены или не помечены элементы множества X и упорядочены или не упорядочены блоки $X_1, X_2, \dots, X_k$. Если с соответствующими индексами T - число k-блочных покрытий, то эти формулы имеют вид:

а) X помечено, $X_1, \dots, X_k$ упорядочены

$$T_{0l}(n,k) = \left(2^k - 1\right)^n \tag{9}$$

$$M_{0l}(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (2^k - i - 1)^k \tag{10}$$

.

б) X не помечено, $X_1, \dots, X_k$ упорядочены

$$T_{0u} = \binom{2^k + n - 2}{n} \tag{11}$$

$$M_{0u} = \binom{2^k + n - k - 2}{n - k} \tag{12}$$

в) X помечено, $X_1, \dots, X_k$ не упорядочены

$$T_{dl}(n,k) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \binom{2^j + k - 1}{k} \tag{13}$$

$$M_{dl}(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (2^k - i - 1)^n \tag{14}$$

г) X не помечено, $X_1, \dots, X_k$ не упорядочены

$$T_{du}(n,k) = u_{nk} - u_{n-1,k} \tag{15}$$

где

$$u_{nk} = \sum_{\substack{\sum_i \alpha_i = n \\ \sum_j \beta_j = k}} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{\alpha_i} \alpha_i!} \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{j^{\beta_j} \beta_j!} \prod_{(i,j)} 2^{(\alpha_i, \beta_j)},$$

причем (α_i, β_j) - наибольший общий делитель α_i и β_j.

Отметим совпадение формулы (14) с формулой (4).

3 Случайные покрытия

Для случайной величины ξ_n, равной числу блоков в случайном равновероятном покрытии n-множества в статье [7] доказаны следующие теоремы

Теорема 1 *При $n \to \infty$ для всех x с условием, что $x2^{-n/6} \to 0$ и $2^{n-1} - \frac{1}{2} + x2^{\frac{n}{2}-1}$ - натуральное число, имеет место равенство*

$$P\left\{\xi_n - 2^{n-1} + \frac{1}{2} = x2^{\frac{1}{2}-1}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi 2^{n-1}}} e^{-\frac{x^2}{2}}(1 + \circ(1)).$$

Теорема 2 *При $n \to \infty$ для всех α и β таких, что $\alpha 2^{-n/6} \to 0, \beta 2^{-n/6} \to 0$ имеет место соотношение*

$$P\left\{\alpha(2^{\frac{n}{2}} - 1)\right\} \leq \xi_n - 2^{n-1} + \frac{1}{2} \leq \beta(2^{\frac{n}{2}} - 1) \sim \Phi(\beta) - \Phi(\alpha),$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Основное внимание в статье [7] уделено минимальным покрытиям. Показано, что для L_n - числа минимальных покрытий n-множества при $n \to \infty$ имеют место асимптотические формулы:

а) если n - четное, то

$$L_n = \frac{2^{(\frac{n}{2}+1)^2 - \frac{1}{4}}}{\sqrt{2\pi n}}[2C_1 + \circ(1)],$$

б) если n - четное, то

$$L_n = \frac{2^{(\frac{n}{2}+1)^2 - \frac{1}{4}}}{\sqrt{2\pi n}}[2C_1 + \circ(1)],$$

где постоянные C_0 и C_1 определяются сходящимися рядами

$$C_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j^2}}, \quad C_1 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j(j+1)}}$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 3 *Если $\tilde{\xi}_n$ - число блоков в случайном минимальном покрытии n-множества, то при $n \to \infty$*

а) для n четного

$$P(\tilde{\xi}_n - \frac{n}{2} = \pm j) \to \frac{2^{-j^2}}{1+2C_0}, quad j = 0, 1, \ldots;$$

б) для n нечетного

$$P(\tilde{\xi}_n - \frac{n \pm 1}{2} = \pm j) \to \frac{2^{-j(j+1)}}{1+2C_1}, quad j = 0, 1, \ldots.$$

При $n \to \infty$ для среднего значения $\tilde{\xi}_n$ имеет место соотношение

$$M\tilde{\xi}_n \sim \frac{n}{2},$$

при этом дисперсия $D\tilde{\xi}_n$ всегда ограничена.

Для однократно покрытых элементов установлена следующая теорема.

Теорема 4 *При $n \to \infty$ предельное распределение случайной величины $\tilde{\eta}_n$, равной числу однократно покрытых элементов случайного минимального покрытия n-множества, совпадает с предельным распределением $\tilde{\xi}_n$.*

Из теорем (3) и (4) следует, что для больших n минимальное покрытие, грубо говоря, имеет число блоков, близкое к $\frac{n}{2}$ и в каждом блоке имеется один однократно покрытый элемент.

В статье [7] дан также алгоритм построения минимального k-блочного покрытия n-множества на r блоков, $r \geq k$.

В статье [1] было введено понятие t-минимального покрытия и установлена его связь с введенным там же понятием t-квазисовместной системы уравнений вида (2).

Покрытие множества $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ блоками $X_1, X_2, \ldots, X_k$ называется t-минимальным, если $X = X_1 \bigcup X_2 \bigcup \cdots \bigcup X_k$ и для любого t-сочетания $1 \leq i_1 < \cdots < i_t \leq k$ существует такое $x \in X$, что

$$x \in X_{i_1}, \ldots, x \in X_{i_t}; \quad x \notin X_{j_1}, \ldots, x \notin X_{j_{k-t}},$$

где

$$\{i_1, \ldots, i_t\} \bigcup \{j_1, \ldots, j_{k-t}\} = \{1, 2, \ldots, k\}; \{i_1, \ldots, i_t\} \bigcap \{j_1, \ldots, j_{k-t}\} = \emptyset$$

Элемент x в этом случае называется t-кратно покрытым. Ясно, что при $t = 1$ понятие t-минимального покрытия совпадает с понятием минимального покрытия.

Несовместная система вида (2) называется t-квазисовместной, если для любых t уравнений системы существует вектор $(z_1^0, \ldots, z_n^0) \in X$ такой, что

1) $(z_1^0, \ldots, z_n^0)$ не является решением этих t уравнений;

2) $(z_1^0, \ldots, z_n^0)$ является решением системы из остальных $k - t$ уравнений.

При $t = 1$ t-квазисовместная система уравнений называется квазисовместной.

Для $k = n = 3$ пример квазисовместной системы линейных уравнений над полем Галуа $GF(2)$ выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ x + \qquad + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Ранг системы равен 2, ранг расширенной матрицы равен 3 и система несовместна. Каждая подсистема из двух уравнений имеет по два решения.

Лемма 1 *Если* $Y_i = \{(Z_1, \ldots, Z_n) : f_i(Z_1, \ldots, Z_n) = a_i\}$, $X_i \bigcup Y_i = X, X_i \bigcap Y_i = \emptyset$, $\quad 1 \leq i \leq k$, *то решение системы 2 образует множество* $X \backslash (X_1 \bigcup \cdots \bigcup X_k)$. *Система 2 несовместна тогда и только тогда, когда* $X = X_1 \bigcup \cdots \bigcup X_k$, *т.е.* $X_1, X_2, \ldots, X_k$ *- блоки покрытия* X.

Лемма 2 *Система уравнений (2) t-квазисовместна тогда и только тогда, когда* $X_1, X_2, \ldots, X_k$ *являются блоками t-минимального покрытия множества* X.

В частности, система (2) квазисовместна тогда и только тогда, когда покрытие множества X блоками $X_1, X_2, \ldots, X_k$ является минимальным.

Для $L_n^{(t)}(k, j)$ - числа t-минимальных k-блочных покрытий n-множества с j t-кратно покрытыми элементами - и $L_n^{(t)}(k)$ - числа k-блочных t-минимальных покрытий n-множества - получены следующие формулы

$$L_n^{(t)}(k, j) = \binom{n}{j} \sigma(j, \binom{k}{t})(2^k - \binom{k}{t} - 1)^{n-j}, \quad \binom{k}{t} \leq j \leq n,$$

$$L_n^{(t)}(k) = \frac{1}{\binom{k}{t}!}\sum_{s=0}^{\binom{k}{t}}(-1)^s\binom{\binom{k}{t}}{s}(2^k-s-1)^n.$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 5 *Пусть* $\gamma_{nk}(t) = \frac{n}{2^k-1} - \ln\binom{k}{t}$, $\quad k = k(n), \quad t = t(n)$ *и при* $n \to \infty$ *существует предел* $\gamma_{nk}(t) \to \gamma$. *Тогда при* $n \to \infty$ *имеют место соотношения*

$$\frac{\binom{k}{t}!}{2^k-1)^n}L_n^{(t)}(k) \to \begin{cases} e^{-e^{-\gamma}}, & -\infty < \gamma < \infty \\ 1, & \gamma = \infty \\ 0, & \gamma = -\infty \end{cases}$$

При $t = 1$ из теоремы (5) следует асимптотика для числа минимальных k-блочных покрытий n-множества [3]

Теорема 6 *При* $1 < t < \infty$ *для* $L_n^{(t)}$ *- числа* t*-минимальных покрытий* n*-множества при* $n \to \infty$ *имеет место асимптотика*

$$L_n^{(t)} = \binom{n}{\binom{\kappa}{t}}2^{\kappa\{n-\binom{\kappa}{t}\}}(1+\circ(1)),$$

где $\kappa = [k]$ *и* k *- максимальный положительный корень уравнения*

$$\binom{k}{t} = \frac{n}{1+t}$$

Теорема 7 *Если на множестве* t*-минимальных покрытий* n*-множества задано равномерное вероятностное распределение и* $\xi_n^{(t)}$ *- число блоков в случайном* t*-минимальном покрытии, то при* $1 < t < \infty$ *и* $n \to \infty$

$$P(\xi_n^{(t)} = \kappa) \to 1,$$

т.е. предельное распределение является вырожденным.

Отметим, что в соответствии с теоремой 3 при $t = 1$ предельное распределение не является вырожденным.

4 Ограниченные покрытия

Для ограниченных покрытий сформулируем ряд новых результатов и сделаем ссылки на некоторые результаты, вытекающие из исследований эквивалентных схем.

Семейство $X_1, X_2, \ldots, X_k$ подмножеств n-множества X имеет спецификацию $\left[1^{\beta_1} 2^{\beta_2} \ldots n^{\beta_n}\right], \beta_i \geq 0$, если в этом семействе β_j подмножеств имеют величину j, $\quad 1 \leq j \leq n$. Формула для числа покрытий n-множества блоками спецификации $\left[1^{\beta_1} 2^{\beta_2} \ldots n^{\beta_n}\right]$ имеет вид

$$E(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \prod_{j=1}^{n-\nu} \binom{\binom{n-\nu}{j}}{\beta_j} \tag{16}$$

Если на семействе подмножеств спецификации $\left[1^{\beta_1} 2^{\beta_2} \ldots n^{\beta_n}\right]$ задано равномерное вероятностное распределение и $\eta(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ - число непокрытых элементов X случайными блоками $X_1, X_2, \ldots, X_k$ из такого семейства, то биномиальные моменты $\eta(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ имеют вид

$$B_\nu(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \binom{n}{\nu} \prod_{j=1}^{n-\nu} \binom{\binom{n-\nu}{j}}{\beta_j} \prod_{i=1}^{n} \binom{\binom{n}{i}}{\beta_i}^{-1}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{17}$$

В соответствии с этим точное распределение $\eta(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ имеет вид [3]

$$P(\eta(\beta_1, \ldots, \beta_n) = r) = \sum_{\nu=r}^{n-1} (-1)^{\nu-r} \binom{\nu}{r} B_\nu(\beta_1, \ldots, \beta_r), \quad r = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{18}$$

С использованием формулы (17) можно доказать следующую теорему

Теорема 8 *Пусть* $\gamma_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j\beta_j - \ln n$. *Тогда при* $n \to \infty$

а) если $\gamma_n \to \infty$

$$P(\eta(\beta_1, \ldots, \beta_n) = 0) \to 1$$

б) если $\gamma_n \to \gamma, \quad 0 < \gamma < \infty$ *и*

$$\beta_j = \circ\left(\binom{n}{j}\right), \quad 1 \leq j \leq d < \infty; \quad \beta_{\alpha+1} = \cdots = \beta_n = 0,$$

то

$$P(\eta(\beta_1, \ldots, \beta_n) = r) \to \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda = e^{-\gamma}$.

Из теоремы (8) в качестве следствий вытекают асимптотики

а) $E(\beta_1,\ldots,\beta_n)=\prod_{j=1}^{n-1}\binom{\binom{n}{j}}{\beta_j}(1+\circ(1))$,

б) $E(\beta_1,\ldots,\beta_n)=e^{-e^{-\gamma}}\prod_{j=1}^{n-1}\binom{\binom{n}{j}}{\beta_j}(1+\circ(1))$,

справедливые при условиях, сформулированных в соответствующих пунктах а) и б) теоремы (8).

Рассмотрим теперь ограниченные покрытия с повторениями.

Покрытие с повторением n-множества X блоками $X_1,X_2,\ldots,X_k$ называется ограниченным, если $\mid X_i \mid=\alpha_i, \quad 1\le i\le k$.

Если $\eta_n^{(\alpha)}, \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)$ - число непокрытых элементов X подмножествами $X_1,X_2,\ldots,X_k, \quad \mid X_i \mid=\alpha_i, 1\le i\le k$, то точное распределение $\eta_n^{(\alpha)}$ имеет вид

$$P\left(\eta_n^{(\alpha)}=r\right)=\sum_{k=r}^{n}(-1)^{\nu-r}\binom{\nu}{r}B_{\nu n}^{(\alpha)}, \quad r=0,1,\ldots,n,$$

где $B_{\nu n}^{(\alpha)}$ - биномиальные моменты $\nu_n^{(\alpha)}$, вычисляемые по формуле

$$B_{\nu n}^{(\alpha)}=\begin{cases}\binom{n}{\nu}\prod_{i=1}^{k}\frac{(n-\alpha_i)_\nu}{,} & 0\le\nu\le n-\bar{\alpha}\\ 0, & \nu>n-\bar{\alpha}\end{cases}$$

причем $\bar{\alpha}=\max_{1\le i\le k}\alpha_i$

Случайную величину $\nu_n^{(\alpha)}$ можно интерпретировать как число пустых ячеек при бросании частиц комплектами величин $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ в n ячеек.

Предельное пуассоновское и нормальное распределение при $n\to\infty$ в такой интерпретации было получено в статье [8].

Можно привести и несколько иные условия для предельного пуассоновского распределения $\nu_n^{(\alpha)}$.

Теорема 9 *Если* $k=k(n), \quad \alpha_i=\alpha_i(n), \quad \frac{\alpha_i}{n}\le\delta<1, quad1\le i\le k$ *и при* $n\to\infty$ *выполнено условие*

$$n\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{\alpha_i}{n}\right)\to\lambda, \quad 0\le\lambda\ leq\infty,$$

то

$P\left(\eta_n^{(\alpha)=0}\right)\to 1$ *при* $\lambda=0$,

$P\left(\eta_n^{(\alpha)}=r\right)\to\frac{\lambda^r}{r!}e^{-\lambda}$ *при* $0<\lambda<\infty$, $r=0,1,\ldots$

Теорема 10 *Если* $k=k(n), \quad \alpha=\alpha(n), \quad 1\le i\le k$ *и при* $n\to\infty$ *выполнены условия*

$$\frac{\alpha_1\ln n}{n}\to 0, \quad 1\le i\le k,$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i - \ln n \to \gamma, \quad 0 < \gamma < \infty,$$

то

$$P\left(\eta_n^{(\alpha)} = r\right) \to \frac{\lambda^r}{r!}e^{-\lambda}, \quad \lambda = e^{-\gamma} \qquad r = 0, 1, \ldots$$

Для ограниченных минимальных покрытий формулы становятся значительно более сложными. Так, если $L_n(j;\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ - число минимальных k-блочных покрытий n-множества X блоками $X_1, X_2, \ldots, X_k$ такими, что $\mid X_i \mid = \alpha_i, \quad 1 \le i \le k$, и с j однократно покрытыми элементами, то

$$L_n(j_1;\alpha_1,\ldots,\alpha_k) = \frac{1}{k!}\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_k=j\\ 0\le j_i\le\alpha_i}} \frac{(n)_j}{j_1!\ldots j_k!} M_{n-j}(\alpha_1 - j_1,\ldots,\alpha_k - j_k),$$

где $M_n(j;\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ - число 0,1-матриц $k \times m$ со строчными суммами $\beta_1,\ldots,\beta_k$ и столбцами, содержащими не менее двух единиц. Имеет место формула

$$M_m(\beta_1,\ldots,\beta_k) = \sum_{s=0}^{m}(-1)^s\binom{m}{s}\sum_{\substack{\gamma_1+\cdots+\gamma_k=s\\ 0\le\gamma_i\le\beta_i}}\frac{s!}{\gamma_1!\ldots\gamma_k!}\times N_m(\beta_1-\gamma_1,\ldots,\beta_k-\gamma_k),$$

где $N_m(\beta_1,\ldots,\beta_k)$ - число 0,1-матриц $k \times m$ со строчными суммами $\beta_1,\ldots,\beta_k$ без нулевых столбцов и вычисляется по формуле

$$N_m(\beta_1,\ldots,\beta_k) = \sum_{\nu=0}^{m}(-1)^\nu\binom{m}{\nu}\prod_{i=1}^{k}\binom{m-\nu}{\beta_i}$$

Асимптотики для $M_m(\beta_1,\ldots,\beta_k)$ и $L_n(j;\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ определяются следующими теоремами.

Теорема 11 *Если при $m \to \infty$ выполнены условия*

а) $\frac{k}{m} \to 0$, $\beta_i = \beta_i(m) \to \infty$, $\frac{\beta_i \ln m}{m} \to 0$, $1 \le i \le k$;

б) $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\beta_i - \ln m - \ln\ln m \to \gamma$, $0 < \gamma < \infty$,

то имеет место асимптотическая формула

$$M_n(\beta_1,\ldots,\beta_k) = e^{-e^{-\gamma}}\prod_{i=1}^{k}\binom{m}{\beta_i}(1 + \circ(1)).$$

Теорема 12 *Если при $n \to \infty$ выполнены условия для $\alpha_i = \alpha_i(n)$, $1 \le i \le k$:*

а) $\frac{j}{\sqrt{\alpha_i}} \to 0$, $\frac{\alpha_i \ln n}{n} \to 0$, $1 \le i \le k$;

б) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i - \ln n - \ln \ln n \to \gamma$, $0 < \gamma < \infty$,

то имеет место асимптотика

$$L_n(j; \alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \frac{1}{k!} e^{-e^{-\gamma}} \binom{n}{j} \prod_{i=1}^{k} \binom{n-j}{\alpha_i} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{n-j-\alpha_i} \right)^j (1 + \circ(1)).$$

Если $\tilde{L}_n(j; \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ - число минимальных покрытий n-множества X блоками $X_1, X_2, \ldots, X_k$ такими, что $\mid X_i \le \alpha_i$, $1 \le i \le k$ и j - число однократно покрытых элементов, то

$$\tilde{L}_n(j; \alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{j_1 + \cdots + j_k = j \\ 0 \le j_i \le \alpha_i}} \frac{(n)_j}{j_1! \ldots j_k!} \tilde{M}_{n-j}(\alpha_1 - j_1, \ldots, \alpha_k - j_k),$$

где $\tilde{M}_n(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ - число 0,1-матриц $k \times m$ со строчными суммами, не превосходящими, соответственно, $\beta_1, \ldots, \beta_k$ и столбцами, содержащими не менее двух единиц. Имеем формулу

$$\tilde{M}_m(\beta_1, \ldots, \beta_k) = \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \binom{m}{s} \sum_{\substack{\gamma_1 + \cdots + \gamma_k = s \\ 0 \le \gamma_i \le \beta_i}} \frac{s!}{\gamma_1! \ldots \gamma_s!} \times \tilde{N}_{m-s}(\beta_1 - \gamma_1, \ldots, \beta_k - \gamma_k),$$

где $\tilde{N}_m(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ - число 0,1-матриц $k \times m$ со строчными суммами, не превосходящими $\beta_1, \ldots, \beta_k$, соответственно, и без нулевых столбцов и вычисляется по формуле

$$\tilde{N}_m(\beta_1, \ldots, \beta_k) = \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^{\nu} \binom{m}{\nu} \prod_{i=1}^{k} \sum_{\mu=0}^{\beta_i} \binom{n-\nu}{\mu}.$$

В частности, при $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = n$, $\beta_1 = \cdots = \beta_k = m$ имеем

$$N_{km} = \tilde{N}_m(m, \ldots, m) = (2^k - 1)^m$$

$$M_{km} = \tilde{M}_m(m, \ldots, m) = (2^k - k - 1)^m$$

$$L_n(k_{ij}) = L_n(j; n, \ldots, n) = \binom{n}{j} \sigma(j, k) (2^k - n - 1)^{n-j}.$$

Последняя формула совпадает с формулой (3).

5 Индекс покрытия

Введем теперь новое понятие индекса покрытия.

Пусть на некотором классе подмножеств n-множества X задано вероятностное распределение и $X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots$ - последовательность подмножеств, полученная в результате случайных испытаний. Минимальное натуральное число χ_n такое, что $X_1, X_2, \ldots, X_{\chi_n}$ являются блоками покрытия множества X, т.е. $X = X_1 \bigcup X_2 \bigcup \cdots \bigcup X_{\chi_n}$, называется индексом покрытия.

Ниже будут рассмотрены несколько случаев задания вероятностных распределений на булеане 2^X множества X с целью отыскания распределения случайной величины χ_n.

Случай 1-ый. На булеане 2^X задано равномерное вероятностное распределение. В этом случае для индекса покрытия имеем следующие выражения для точного распределения

$$P(\chi_n = k) = (1-\frac{1}{2^k})^n - (1-\frac{1}{2^{k-1}})^n = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\binom{n}{j}\frac{2^j-1}{2^{kj}}, \quad k = 1, 2 \ldots . \tag{19}$$

Отсюда следует выражение для функции распределения

$$P(\chi_n \le x) = \left(1 - \frac{1}{2^{[x]}}\right)^n, \quad x \ge 0, \tag{20}$$

где $[x]$ - целая часть от x.

Производящая функция для χ_n имеет вид:

$$P_n(t) = t\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\binom{n}{j}\frac{2^j-1}{2^j-t}. \tag{21}$$

Отсюда следуют формулы для биномиальных моментов

$$B_{0n} = 1$$

$$B_{\nu n} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\binom{n}{j}\frac{2^j}{(2^j-1)^\nu} = \sum_{s=0}^{\infty}\binom{\nu+s-1}{s}\left[1-\left(1-\frac{1}{2^{\nu+s-1}}\right)^n\right],$$
$$\nu = 1, 2, \ldots . \tag{22}$$

Для среднего значения имеем формулу

$$M\chi_n = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\binom{n}{j}\frac{2^j}{2^j-1} = \sum_{s=0}^{\infty}\left(1-(1-\frac{1}{2^s})^n\right), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{23}$$

При $n \to \infty$ отсюда следует асимптотика для среднего значения

$$M\chi_n = \lg_2 n + C_1 - C_2 + \circ(1), \tag{24}$$

где постоянные C_1 и C_2 определяются сходящимися рядами

$$C_1 = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-2j}, \quad C_2 = \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 - e^{-2^{-j}}\right). \tag{25}$$

Предельное распределение случайной величины χ_n определяется следующей теоремой.

Теорема 13 *При $n \to \infty$ для любых $y \geq 0$ и всех $y < 0$ таких, что $\mid y \mid = \circ(\lg_2 \sqrt{n})$ bvttv*

$$P(\chi_n \leq [\lg_2 n] + y) = e^{-2^{-[y]+\delta_n}}(1 + \circ(1)), \tag{26}$$

где $\delta_n = \{\lg_2 n\}$ - дробная часть от $\lg_2 n$.

Из теоремы (13) следует, что предельное распределение χ_n зависит от последовательности значений, которые принимает n при неограниченном возрастании. Если $n = 2^m, \quad m = 1, 2, ...$, то существует единственное предельное распределение для χ_n при $m \to \infty$.

Следствие 1. При $n = 2^m$ и $m \to \infty$ для любых $y \geq 0$ и всех $y < 0$ таких, что $\mid y \mid = \circ(\lg_2 \sqrt{n})$, имеем

$$P(\chi_n \leq m + y) \to e^{-2^{-[y]}} \tag{27}$$

Из теоремы (13) следует также и асимптотика локального распределения χ_n.

Следствие 2. При $n \to \infty$ для всех натуральных значений $j \geq 0$ и любых $j < 0$ таких, что $\mid j \mid = \circ(\lg_2 \sqrt{n})$. Имеем

$$P(\chi_n = [\lg_2 n] + j) = e^{-2^{-j+\delta_n}} \left(1 - e^{-2^{-j+\delta_n}}\right)(1 + \circ(1)), \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{28}$$

где δ_n -дробная часть $\lg_2 n$.

В частности, если $n = 2^m$, то при $m \to \infty$

$$P(\chi_n = m + j) \to e^{-2^{-j}} \left(1 - e^{-2^{-j}}\right), \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{29}$$

Случай 2-й. На всех непустых элементах булеана 2^X задано оавномерное вероятностное распределение и $\tilde{\chi}_n$ - соответствующий индекс покрытия. Имеет место следующее соотношение

$$P(\tilde{\chi}_n = k) = \sum_{m=1}^{n} \frac{2^{n-m}}{2^n - 1} P(\eta_{n,k-1} = m), \tag{30}$$

где η_{nk} - случайная величина, равная числу нулевых столбцов в матрице инцидентности случайных блоков, имеющей размеры $k \times n$. Из вида распределения η_{nk}

$$P(\eta_{nk} = m) = \sum_{j=m}^{n} (-1)^{j-m} \binom{j}{m} \binom{n}{j} \left(\frac{2^{n-j} - 1}{2^n - 1} \right)^k \tag{31}$$

и соотношение (30) следует выражение для точного распределения $\tilde{\chi}_n$:

$$P(\tilde{\chi}_n = k) = \frac{1}{(2^n - 1)^k} \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s \binom{k-1}{s} \left[(2^{k-s} - 1)^n - (2^{k-s} - 1) \right], \quad k = 1, 2, \ldots \tag{32}$$

Теорема 14 *При $n \to \infty$ равномерно для всех $k = 1, 2, \ldots$ выполнено равенство*

$$P(\tilde{\chi}_n = k) = P(\chi_n = k)(1 + \circ(1)). \tag{33}$$

Из теоремы (14) следует, что предельные распределения $\tilde{\chi}_n$ и χ_n совпадают и, следовательно, предельные распределения $\tilde{\chi}_n$ определяются равенствами (26) и (28). Среднее для $\tilde{\chi}_n$ и среднее для χ_n при $n \to \infty$ имеют одну и ту же асимптотику, определяемую формулой (24).

Случай 3-й. Заданной числовой последовательности $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, где $\alpha_i = \alpha_i(n)$, $0 < \alpha_i < n, \quad i = 1, 2, \ldots$, ставится в соответствие последовательность случайных подмножеств $X_1, X_2, \ldots$ множества X такая, что X_i есть подмножество, выбранное случайно и равновероятно из совокупности подмножеств величины $\alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots$. Обозначим через $\chi_n^{(\alpha)}$ соответствующий индекс покрытия. Имеет место следующее соотношение

$$P\left(\chi_n^{(\alpha)} = k\right) = \sum_{r=1}^{\alpha_k} \frac{(\alpha_k)_r}{(n)_r} P\left(\xi_{n,k-1}^{(\alpha)} = r\right), \tag{34}$$

где $\xi_{nk}^{(\alpha)}$ - число элементов n-множества X не покрытых случайным множеством $X_1 \bigcup X_2, \bigcup \cdots \bigcup X_k$, где $\mid X_i \mid = \alpha_i$, $1 \le i \le k$.

В соответствие с выражением для точного распределения $\xi_{nk}^{(\alpha)}$

$$P\left(\xi_{nk}^{(\alpha)} = k\right) = \sum_{\nu=r}^{n} (-1)^{\nu-r} \binom{\nu}{r} \binom{n}{\nu} \prod_{i=1}^{k} \frac{(n-\alpha_i)_\nu}{(n)_\nu}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n \tag{35}$$

имеем точное распределение для $\chi_n^{(\alpha)}$:

$$P\left(\chi_n^{(\alpha)}=k\right)=\sum_{r=1}^{\alpha_k}\binom{\alpha_k}{r}\sum_{\nu=0}^{n-r}(-1)^{\nu}\binom{n-r}{\nu}\prod_{i=1}^{k-1}\frac{(n-\alpha_i)_{\nu+r}}{(n)_{\nu+r}},\quad k=2,3,\ldots \tag{36}$$

В силу условия $\mid\alpha_i\mid<n, i=1,2,\ldots,$ имеем $P\left(\chi_n^{(\alpha)}=1\right)=0.$

Теорема 15 *Пусть $k=k(n)$, $\alpha_i=\alpha_i(n)$, $\quad i=1,2,\ldots,$ и при $n\to\infty$ существуют пределы*

1) $\frac{\alpha_i(n)}{n}\to\delta_i,\quad 0<\delta_i<1,\quad 1\leq i\leq k;$

2)

$$n\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{\alpha_i}{n}\right)\to\lambda,\quad 0<\lambda<\infty. \tag{37}$$

Тогда для всех натуральных значений $\kappa=\kappa(n)$, удовлетворяющих равенству

$$n\prod_{i=1}^{\kappa}\left(1-\frac{\alpha_i}{n}\right)=\lambda(1+\circ(1)) \tag{38}$$

для любого $j=0,1,\ldots$ имеет место асимптотическое представление

$$P\left(\chi_n^{(\alpha)}=\kappa+1\pm j\right)=e^{-\lambda_\pm}\left(e^{\lambda_\pm\delta_{\kappa\pm j+1}}-1\right)(1+\circ(1)),\quad j=0,1,\ldots, \tag{39}$$

где

$$\lambda_+=\lambda\prod_{i=\kappa+1}^{\kappa+j}(1+\delta_i),\quad \lambda_-=\lambda\prod_{i=\kappa-j}^{\kappa-1}(1-\delta_i)^{-1}$$

и знаки $+$ и $-$ выбираются одновременно в обеих частях равенства 39.

В частности, при $n=2^m$, $\alpha_i=\frac{n}{2}$, $\quad i=1,2,\ldots,$ имеем $\kappa=\lg_2 n=m$, $\quad\lambda=1$, $\lambda_+=\frac{1}{2^j}$, $\lambda_-=2^j$ и при $m\to\infty$

$$P\left(\chi_n^{(\alpha)}=m\pm j+1\right)=\left(e^{-\frac{1}{2^{\pm j+1}}}-e^{-\frac{1}{2^{\pm j}}}\right)(1+\circ(1)),\quad j=0,1,\ldots$$

Отметим, что этот результат совпадает со следствием 2 из теоремы (13) для случая 1-го.

Список литературы

[1] В.Н. Сачков. Асимптотическоеповедение числа t-минимальных покрытий. Дискретная математика **5** (1993) N 1.

[2] T. Hearne, C. Wagner, Minimal covers finite sets. Discrete Mathematics (1973) no. 5, 247-251.

[3] В.Н. Сачков. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. - Москва, Наука, 1982.

[4] L. Comptet. Advanced Combinatorics. D. Reidel Publ. Comp., 1974.

[5] J.P. Goulden, D.M. Jackson, Combinatorial Enumeration. - New York, Willey, 1983.

[6] R.J. Clarke. Covering a set by subsets. Discrete Math., (1990) **81**, 147-152.

[7] В.Н. Сачков. Случайные минимальные покрытия множеств. Дискретная математика **4** (1992) N 3, 64-74.

[8] В.А. Ватутин, В.П. Михайлов. Предельные теоремы для числа пустых ячеек в равновероятной схеме размещения частиц комплектами. Теория вероятностей и ее применения. **XXYII** (1982) N 46 684-692.