Структурные и перечислительные свойства кубов Фибоначчи

Эмануэль Мунарини, Норма Загаглиа Салви

Куб Фибоначчи представляет новую технологию межсоединений в мультикомпьютерных системах. Он является вложенным в единичный n-мерный куб двудольным графом. В работе доказано, что он может рассматриваться как полурешетка частного вида и определены его структурные свойства и характеристики такие как доли, центр, радиус и вершинное число независимости. Получено перечислительное свойство в виде нового соотношения для чисел Фибоначчи.

1 Введение

Понятие *куба Фибоначчи* было введено в работе [1] и в обобщенной форме в работе [2] как новая топология межсоединений в мультикомпьютерных системах. Куб Фибоначчи является двудольным графом, который как подграф может быть вложен в единичный n-мерный куб. Он обладает интересными топологическими и перечислительными свойствами, подобными свойствам гиперкуба [3], но характерными именно для куба Фибоначчи. Напомним, что числа Фибоначчи образуют последовательность положительных целых чисел F_n, где $F_0 = 1$, $F_1 = 2$ и каждое следующее число удовлетворяет рекуррентному соотношению $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Известно, что всякое натуральное число единственным образом можно представить в виде суммы чисел Фибоначчи (по теореме Зекендорфа). Пусть i есть положительное целое такое, что $i \leq F_{n-1} - 1$. Обозначим $F(i) := [b_{n-1}, \dots, b_1, b_0]$ *строку Фибоначчи порядка* n для числа i, где

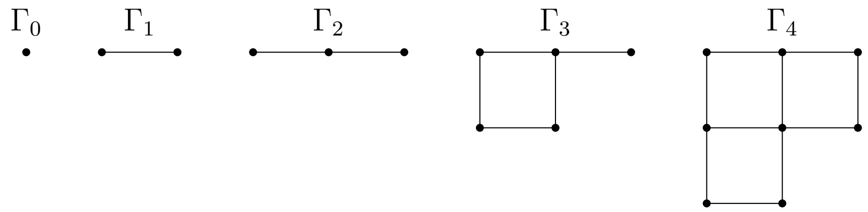
$$i = \sum_{j=0}^{n-1} b_j F_j$$

и b_j равно 0 или 1, для $0 \le j \le n-1$, при условии, что $b_j b_{j+1} = 0$. Например, число $i = F_4 - 1 = 7$, можно представить в виде строки Фибоначчи 1010. Будем обозначать $\alpha\beta$ строку, получающуюся конкатенацией строк α и β. В обобщенном виде, если S есть множество строк, то $\alpha S = \{\alpha\beta : \beta \in S\}$.

Последовательности нулей α_i в строке $\alpha_1 1 \alpha_2 1 \ldots 1 \alpha_r$, называются *максимальными.* Пусть C_n есть множество строк Фибоначчи порядка n, то есть множество двоичных строк, не содержащих двух соседних единиц. Мы имеем $C_{n+2} = 0C_{n+1} \cup 10C_n$ и $|C_n| = F_n$ для каждого $n \in \mathbf{N}$. Напомним, что расстоянием Хемминга между двумя двоичными строками α и β называется число $H(\alpha, \beta)$ позиций, в которых они различаются.

Определение 1 . Кубом Фибоначчи Γ_n *порядка* n называется граф (V, E), где $V = \{0, 1, \ldots, F_n - 1\}$ и $(i, j) \in E$, если $H(F(i), F(j)) = 1$.

В работе [1] доказано, что граф Γ_{n+2} может быть разложен на два не пересекающихся и соединенных точно F_n ребрами подграфа Γ_{n+1} и Γ_n. На Рис.1,*а,б,в,г,д* показаны кубы Фибоначчи для начальных значений $n = 1, 2, 3, 4, 5$



а) *б)* *в)* *г)* *д)*

Рис. 1

В настоящей работе предлагается новый способ представления кубов Фибоначчи и описываются некоторые их структурные свойства и характеристики, такие как доли, центр, радиус и число независимости графа Γ_n. Получены также некоторые перечислительные свойства, из которых следуют новая формула для чисел Фибоначчи, и простое выражение для числа независимости графа Γ_n. Мы полагаем, что представление о рассматриваемых свойствах может быть использовано при проектировании вычислительных систем, устойчивых к неисправностям. Определение центра графа Γ_n полезно при организации операций рассылки информации из одного узла вычислительной сети всем остальным или операции накопления информации от всех узлов в одном из них. Пересылка из центра любому другому узлу как и обратная пересылка могут быть осуществлены максимум за $\lceil\frac{n}{2}\rceil$ шагов. По аналогичным соображениям полезно знание вершинного числа независимости.

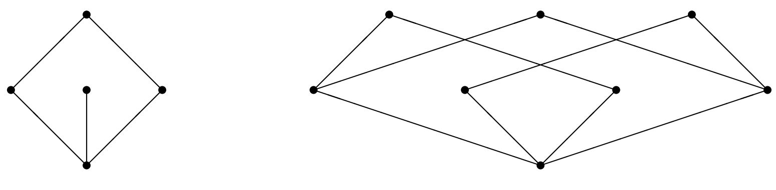
2 Структурные свойства

2.1 Полурешетки Фибоначчи

На множестве C_n двоичных строк длины n , не содержащих соседних единиц, определим отношение частичного порядка, полагая для каждых $\alpha = [a_1, \ldots, a_n]$ и $\beta = [b_1, \ldots, b_n]$ в C_n ,

$$\alpha \leq \beta \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_i \leq b_i\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Упорядоченное множество $\mathcal{F}_n = \langle C_n, \leq \rangle$ является нижней полурешеткой, то есть замкнуто относительно операции инфимума $\alpha \wedge \beta = [\min(a_1, b_1), \ldots, \min(a_n, b_n)]$ и ее *нижняя универсальная граница* $\widehat{0} = 00\cdots0$. Если супремум $\alpha \vee \beta$ существует, то $\alpha \vee \beta = [\max(a_1, b_1), \ldots, \max(a_n, b_n)]$. Ясно, что для строки β , содержащей k единиц, имеется точно k атомов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ таких, что $\beta = \alpha_1 \vee \ldots \vee \vee \alpha_k$. Таким образом, упорядоченное множество $\mathcal{F}_n$ является атомарной полурешеткой. Обозначим V_k множество строк, содержащих k единиц. Максимальное число единиц в сроках из C_n определяется как $\lceil\frac{n}{2}\rceil$; соответствующая строка образуется конкатенацией максимальное число раз строки 10 с добавленением 1 при нечетном n . Таким образом, $V_k = \emptyset$ для всех $k > \lceil\frac{n}{2}\rceil$. На диаграмме Хассе полурешетки $\mathcal{F}_n$ две строки соединяются ребром, если одна из нх покрывает другую, то есть если расстояние Хемминга между ними равно 1. Так граф, заданный диаграммой Хассе полурешетки $\mathcal{F}_n$ изоморфен графу Γ_n. Например, для $n = 3, 4$ получаем диаграммы, представленные на Рис. 2 *,а,б*.



$\mathcal{F}_3$ $\mathcal{F}_4$

а) *б)*

Рис. 2

Очевидно, что никакие две строки с одинаковой четностью единиц на диаграмме Хассе не соединяются. Отсюда следует, что множества E_n, O_n строк с четным и нечетным числом единиц соответственно образуют доли двудольного графа Γ_n. Заметим, что перестановка вершин графа Γ_n, заключающаяся в замене каждой строки α инверсной (отличающейся обратным порядком размещения двоичных символов) является инволюцией. Следовательно, декомпозиция графа Γ_{n+2} на Γ_{n+1} и Γ_n не единственна. В качестве примера приведем граф $\Gamma_4 = \Gamma_3 \widehat{+} \Gamma_2$, где Γ_3 и Γ_2 образуются вершинами, в которых первый бит есть 0 или 1 соответственно. С другой стороны, Γ_3 и Γ_2 могут быть образованы вершинами, имеющими последний бит 0 или 1 соответственно.

2.2 Некоторые структурные свойства кубов Фибоначчи

В работе [4] *эксцентриситет* вершины v связного графа G определен как число

$$e(v) := \max_{u \in V(G)} d(u, v).$$

Радиус графа G при этом определяется как

$$\mathrm{rad}(G) := \min_{v \in V(G)} e(v).$$

Вершина v является *центральной вершиной* если $e(v) = \mathrm{rad}(G)$. *Центр* $Z(G)$ графа G образуется множеством всех его центральных вершин.

Утверждение 1 . $\mathrm{rad}(\Gamma_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Доказательство . Замети прежде всего, что $e(\widehat{0}) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Максимально удалены от вершины $\widehat{0}$ вершины с максимальным числом единиц, получаемые конкатенацией строки 10 максимальное число раз с добавлением 1 при нечетном n.

Пусть теперь v является строкой, имеющей $k > 0$ единиц. Мы докажем, что $e(v) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Строка v^*, наиболее удаленная от v, может быть получена заменой в ней всех нулей единицами и последующим удалением минимального числа единиц так, чтобы получилась строка Фибоначчи. Если h является максимальной последовательностью нулей в строке v, то в строке v^* этой последовательности соответствует $\left\lceil \frac{h}{2} \right\rceil$ единиц. Тогда расстояние $d(v, v^*) = k + \sum \left\lceil \frac{h}{2} \right\rceil$, где суммирование осуществляется по всем максимальным последовательностям нулей в строке v. Поскольку

$$\sum \left\lceil \frac{h}{2} \right\rceil \geq \left\lceil \sum \frac{h}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n-k}{2} \right\rceil ,$$

мы получаем

$$d(v, v^*) \geq k + \left\lceil \frac{n-k}{2} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil .$$

□

Пусть U_n обозначает множество строк, имеющих только одну 1 и максимальную последовательность нулей четной длины. Так , например, мы имеем $00100 \in U_5$ но $01000 \notin U_5$.

Утверждение 2 . *Для каждого* $n \in \mathbf{N}$, *имеет место*

$$Z(\Gamma_n) = \begin{cases} \{\widehat{0}\} & \textit{для четных } n \\ \{\widehat{0}\} \cup U_n & \textit{для нечетных } n \end{cases}$$

Доказательство . Из доказательства утверждения 1, $\widehat{0} \in Z(G)$. Пусть v является центральной вершиной, имеющей k единиц. Обозначим h_1 длину последовательности нулей перед первой единицей, h_2 длину последовательности нулей между первой и второй единицами и так далее до h_{k+1} . Пусть v^* – строка, рассмотренная в доказательстве предыдущего утверждения. Тогда каждая максимальная последовательность нулей длины h_i в v соответствует в v^* подстроке с $\lceil \frac{h_i}{2} \rceil$ единиц. Следовательно $d(v, v^*) = k + \sum \lceil \frac{h_i}{2} \rceil$. Необходимо различить два случая.

1) Все h_i четны. Тогда $\lceil \frac{h_i}{2} \rceil = \frac{h_i}{2}$ и

$$d(v, v^*) = k + \sum \frac{h_i}{2} = k + \frac{n-k}{2} = \frac{n+k}{2} .$$

Это значение совпадает с $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ только при $k = 1$ и нечетном n .

2) Имеется по крайней мере одна максимальная последовательность нулей нечетной длины h_i . Тогда

$$d(v, v^*) \geq k + \frac{1}{2} \left(\sum h_i + 1 \right) = k + \frac{n-k+1}{2} = \frac{n+k+1}{2} .$$

Это значение не равно $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ ни при каких значениях k и n .

$\square$

Назовем вершину графа Γ_n симметричной, если она соответствует симметричной строке.

Утверждение 3 . *Число симметричных строк в* Γ_n *равно* $F_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-(-1)^n}$ *для каждого* $n \geq 2$.

Доказательство . Если $n = 2m + 2$, то симметричная строка Фибоначчи α длины n имеет вид $\pi 00\overline{\pi}$, где π произвольная строка Фибоначчи длины m и $\overline{\pi}$ – строка, полученная инверсией строки π. Имеется ровно F_m таких строк.

Если $n = 2m + 3$, то симметричная строка Фибоначчи α длины n имеет либо форму $\pi 0\overline{\pi}$, где π – произвольная строка длины $m+1$, или форму $\pi 010\overline{\pi}$, где π является произвольной строкой Фибоначчи длины m. Таким образом имеется ровно $F_m + F_{m+1} = F_{m+2}$ таких строк. Эти наблюдения влекут справедливость утверждения. $\square$

Обозначим e_n и o_n число строк в множествах E_n, O_n соответственно. Напомним, что *числом независимости* $\beta(G)$ графа G называется максимальная мощность независимого множества вершин графа G.

Теорема 1 . $\beta(\Gamma_n) = \max(e_n, o_n)$.

Доказательство . Не ограничивая общности, можно допустить, что $e_n \geq o_n$. Докажем, что e_n является максимальным числом независимых вершин графа Γ_n. Допустим противное, что имеется подмножество A множества E_n которое можно заменить подмножеством B множества O_n, таким, что $|B| > |A|$ и вершины множества B и $E_n \setminus A$ являются независимыми. Отсюда следует, что вершины множества B смежны только вершинам множества A. В работе [1] доказано, что Γ_n всегда содержит цикл C , который включает либо все вершины множества Γ_n , либо все вершины, кроме одной. Замети, что поскольку граф Γ_n двудольный, в цикле C вершины множеств E_n и O_n чередуются. Пусть C является гамильтоновым циклом и $v_1, v_2, \ldots, v_s$ – вершины множества B перечисленные в порядке, определяемом циклом C. Обозначим $w_1, w_2, \ldots, w_s$ вершины множества A , предшествующие вершинам v_i и w_{s+1} вершину, следующую за вершиной v_s в C. Вершины w_j должны быть различными, тогда $|A| > |B|$, что противоречит допущению. В случае, когда C содержит все вершины, кроме одной, мы можем допустить, что C содержит только $s-1$ вершин множества B. По тем же соображениям A содержит не менее s вершин; следовательно, $|A| \geq |B|$, противоречие. $\square$

3 Перечислительные свойства

В работах [5] и [6] доказаны многие перечислительные свойства чисел Фибоначчи. Одно из них состоит в том, что

$$|V_n| = \sum_{k\geq 0} \binom{n-k+1}{k}.$$

При этом

$$e_n = \sum_{k\geq 0} \binom{n-2k+1}{2k} \qquad o_n = \sum_{k\geq 0} \binom{n-2k}{2k+1}.$$

Утверждение 4 . *Числа e_n и o_n удовлетворяют следующей системе рекуррентных отношений*

$$\begin{cases} e_{n+2} = e_{n+1} + o_n \\ o_{n+2} = o_{n+1} + e_n \end{cases} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$e_0 = 1, \quad e_1 = 1, \quad o_0 = 0, \quad o_1 = 1.$$

Доказательство . Мы знаем, что подполурешетка полурешетки $\mathcal{F}_{n+2}$, соответствующая всем строкам, в которых первым символом является 0 , изоморфна полурешетке $\mathcal{F}_{n+1}$, в то же время подполурешетка, соответствующая строкам с первым символом 1, изоморфна полурешетке $\mathcal{F}_n$. В этой декомпозиции строка $10\cdots 0$ является минимумом подполурешетки, изоморфной полурешетке $\mathcal{F}_n$, так что ее элементы имеют четность, противоположную четности соответствующих элементов полурешетки $\mathcal{F}_{n+2}$, откуда следует доказываемое утверждение. $\square$

Первое уравнение системы (1) влечет следующее тождество

$$\sum_{k\geq 0} \binom{n-2k+1}{2k} = \sum_{k\geq 0} \binom{n-2k}{2k} + \sum_{k\geq 0} \binom{n-2k-2}{2k+1}.$$

По теореме 1, интересно определить, какое из двух чисел e_n, o_n больше другого. Пусть h_n – их разность, а именно $h_n = e_n - o_n$. Из (1) имеем

$$h_{n+2} = e_{n+1} - o_{n+1} - (e_n - o_n)$$

или

$$h_{n+2} = h_{n+1} - h_n \,.$$

Первые значения этой последовательности следующие

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
e_n	1	1	1	2	4	7	11	17	27	44	72	117
o_n	0	1	2	3	4	6	10	17	28	45	72	116
h_n	1	0	−1	−1	0	1	1	0	−1	−1	0	1

и легко видеть, что

$$h_{n+3} = -h_n$$

и что

$$H(x) = \sum_{n\geq 0} h_n \, x^n = \frac{1-x}{1-x+x^2} \,.$$

Из системы (1) мы получаем уравнения

$$e_{n+2} = e_{n+1} + e_n - h_n$$

$$o_{n+2} = o_{n+1} + o_n + h_n$$

и производящие функции

$$\sum_{n\geq 0} e_n \, x^n = \frac{1-x+x^4}{(1-x+x^2)(1-x-x^2)}$$

$$\sum_{n\geq 0} o_n \, x^n = \frac{x}{(1-x+x^2)(1-x-x^2)} \,.$$

Окончательно, с учетом отношения

$$\begin{cases} e_n + o_n = F_n \\ e_n - o_n = h_n \end{cases}$$

мы имеем

$$e_n = \frac{F_n + h_n}{2} \,, \qquad o_n = \frac{F_n - h_n}{2}$$

или

$$F_n = 2\sum_{k\geq 0}\binom{n-2k+1}{2k} - h_n = 2\sum_{k\geq 0}\binom{n-2k}{2k+1} + h_n\,,$$

новое отношение для чисел Фибоначчи.

Список литературы

[1] W. - J. Hsu, *Fibonacci Cubes – A New Interconnection Topology*, IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems, 4, 1993, 3 - 12.

[2] J. Liu, W. - J. Hsu, M. J. Chung, *Generalized Fibonacci Cubes Are Mostly Hamiltonian*, Journal of Graph Theory, 18, 1994, 817 - 829.

[3] Y. Yaad, M. H. Schultz, *Topological properties of the hypercubes*, IEEE Trans. Comput., vol. 37, no. 7, 1988, 867 - 872.

[4] G. Chartrand, L. Lesniak, *Graphs and Digraphs.* Wadsworth and Brooks, 1986.

[5] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics.* Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.

[6] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Volume 1: Fundamental Algorithms. Addison-Wesley, Reading, MA, 1973.