

# Структура фрагментов однозначно представляющих автомат

И.С. Грунский

Исследуется структура фрагмента, позволяющего однозначно распознать автомат из класса всех автоматов, у которых каждый вход-выходной сигнал из заранее заданного множества порождается не более чем одним состоянием. Найдены критерии однозначного распознавания.

Проблема представления (идентификации) автоматов их фрагментами является важной как в теории автоматов (построение контрольных и распознающих экспериментов [1]), так и в технической диагностике дискретных устройств [2] и программных систем [3]. Теория представления автоматов фрагментами изложена в [4]. Одной из центральных задач этой теории является задача определения условий, при которых фрагмент представляет заданный автомат с заданной точностью относительно заданного класса автоматов. В [4] приведены критерии (необходимые и достаточные условия) представления для различного типа автоматов, различных конечных классов и различной точности.

В настоящее время интенсивно начала развиваться теория экспериментов относительно бесконечных классов автоматов, заданных конечными средствами (формальной спецификацией [3], недетерминированным автоматом [5] и т.п.).

В данной работе исследуется структура представлений автомата относительно возможно бесконечного класса автоматов, в каждом из которых каждый вход-выходной сигнал из заранее заданного множества порождается не более чем одним состоянием [6]. Такие сигналы называются маркерами, а такие автоматы — маркированными. Маркеры с точки зрения книги [4] являются идентификаторами состояний. Они присутствуют в реальных автоматах в виде оповещающих или служебных управляющих сигналов.

Найдены критерии, при которых фрагмент является представлением автомата относительно класса маркированных автоматов (теоремы 2–4) и относительно дополнения до этого класса (теорема 1). В следствиях

к теоремам предложены условия существования контрольных экспериментов.

В дальнейшем под автоматом понимается, если не оговорено противное, конечный детерминированный инициальный автомат Мили. Все автоматы имеют один и тот же входной  $X$  и выходной  $Y$  алфавиты. Если автомат частичен, то полагаем, что области определения его функции переходов и функции выходов совпадают. Пусть  $r$  — мощность алфавита  $Y$ ,  $r \geq 1$ .

Пусть  $A = (A, X, Y, \delta, \lambda, a_0)$  — некоторый автомат, у которого  $A$  — множество состояний мощности  $n$ ;  $a_0$  — начальное состояние;  $\delta, \lambda$  — функции переходов и выходов. Пусть  $p = x_1 \dots x_k$  — входное слово. Через  $\delta(a, p)$  обозначим состояние, в которое переходит автомат из состояния  $a$  под действием этого слова, а через  $\lambda(a, p)$  — соответствующее выходное слово длины  $k$ . Пусть  $\lambda(a, p) = q = y_1 \dots y_k$ . Пара  $(p, q)$  называется вход-выходным словом, порожденным состоянием  $a$ . Она отождествляется со словом  $w = (x_1, y_1) \dots (x_k, y_k)$  в алфавите  $U = X \times Y$ . Равенство  $aw = b$  означает, что  $b = \delta(a, p)$  и  $\lambda(a, p) = q$ . Множество всех вход-выходных слов, порожденных состоянием  $a$  обозначим  $\lambda_a$  и  $\lambda_A$  при  $a = a_0$ . Автомату  $A$  поставим в соответствие множество  $\Phi_A = \bigcup_{a \in A} \lambda_a$  всех вход-выходных слов, порожденных этим автоматом.

Автомат  $A$  называется инициально связным, если для всех его состояний  $a$  найдется  $w \in \lambda_A$ , для которого  $a_0 w = a$ . В дальнейшем, если не оговорено противное, рассматриваются инициально связные автоматы. Состояние  $a$  и  $b$  называются эквивалентными, что обозначим  $(a, b) \in \varepsilon$ , если  $\lambda_a = \lambda_b$ . Через  $A/\varepsilon$  обозначим автомат, полученный из  $A$  отождествлением всех эквивалентных состояний. Автомат  $A$ , для которого  $A = A/\varepsilon$ , называется приведенным.

Через  $\mathcal{A}(U)$  обозначим класс всех всюду определенных приведенных автоматов.

Неопределяемые понятия теории автоматов общеприняты и их можно найти, например, в [1,4]. При необходимости функции параметры и поведение автомата снабжаются нижним индексом — его именем.

Введем понятие представления автомата фрагментами. Пусть  $Q = (Q, X, Y, \Delta, \Lambda, q_0)$  — некоторый автомат. Автомат  $Q$  назовем фрагментом автомата  $A$ , если существует гомоморфизм автомата  $Q$  в  $A$ , т.е. такое отображение  $\varphi : Q \rightarrow A$ , что  $\varphi(q_0) = a_0$  и  $\varphi(\Delta(q, x)) = \delta(\varphi(q), x)$ ,  $\Lambda(q, x) = \lambda(\varphi(q), x)$  для всех  $q$  и  $x$  из области определения функции  $\Delta$ .

Зафиксируем произвольно автомат-эталон  $A \in \mathcal{A}(U)$  и подкласс  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}(U)$ . Автомат  $Q$  назовем представлением эталона относительно этого подкласса, если одновременно выполняются условия: 1.  $Q$  является

фрагментом эталона; 2. если  $Q$  является фрагментом автомата  $B \in \mathcal{A}$ , то  $\lambda_A = \lambda_B$ . Из определения вытекает, что эталон  $A$  является представлением самого себя относительно любого подкласса  $\mathcal{A}$  и поэтому представления всегда существуют.

Рассмотрим условия, при которых автомат  $Q$  является представлением  $A$  относительно подкласса  $\mathcal{A}$ . Если в  $\mathcal{A}$  нет автоматов, отличных от  $A$ , т.е. если  $\mathcal{A}$  пуст или состоит из одного  $A$ , то любой фрагмент эталона является представлением. Поэтому в дальнейшем полагаем, что в  $\mathcal{A}$  существует автомат  $B \neq A$ . Тогда  $r \geq 2$ , поскольку при  $r = 1$  класс  $\mathcal{A}(U)$  состоит из одного автомата.

Пусть  $B$  — некоторый автомат и  $b$  некоторое его состояние. Автомат  $C$ , образованный всеми состояниями  $c = bw, w \in \lambda_B$ , называется подавтоматом, порожденным состоянием  $b$ . Класс  $\mathcal{A}$  назовем замкнутым, если для всех  $B \in \mathcal{A}(U)$  как только некоторый его подавтомат входит в  $\mathcal{A}$ , то и  $B \in \mathcal{A}$ . Легко видеть, что для  $r \geq 2$  непустой замкнутый класс бесконечен.

**Теорема 1.** *Автомат  $Q$  является представлением эталона  $A \in \mathcal{A}(U)$  относительно замкнутого подкласса  $\mathcal{A}$  тогда и только тогда, когда  $Q/\varepsilon = A$ .*

**Доказательство.** Если  $Q/\varepsilon = A$ , то очевидно  $Q$  — фрагмент эталона. Пусть  $Q$  — фрагмент некоторого  $B \in \mathcal{A}$ . В силу приведенности автомата  $B$   $Q/\varepsilon$  тоже его фрагмент. В силу инициальной связности  $A = B$  и, тем самым,  $Q$  — представление.

Пусть теперь  $Q/\varepsilon \neq A$  и  $Q$  — представление эталона относительно  $\mathcal{A}$ . Тогда  $Q$  — фрагмент эталона и, следовательно, частичный автомат. Пусть  $C \in \mathcal{A}$ . Доопределим автомат  $Q$  с помощью  $C$ , полагая  $\Delta(q, x) = c_0$  для всех пар  $(q, x)$ , не входящих в область определения функции  $\Delta$ . Функцию выходов  $\Lambda$  доопределяем произвольно. Получим всюду определенный автомат  $D$ . Пусть  $H \in \mathcal{A}$  и  $H \neq C$ . Точно также доопределяем автомат  $Q$  с помощью  $H$  и получаем автомат  $G$ . Так как  $H \neq C$ , то  $\lambda_C(c_0, p) \neq \lambda_H(h_0, p)$  для некоторого входного слова  $p$ . Пусть  $\Delta(q, x)$  неопределено в  $Q$  и  $\Delta(q_0, p') = b$ . Очевидно  $\lambda_D(d_0, p'xp) \neq \lambda_G(g_0, p'xp)$ . Поэтому  $D/\varepsilon \neq G/\varepsilon$ . Автомат  $Q$  является фрагментом автоматов  $D/\varepsilon$  и  $G/\varepsilon$  и оба эти автомата входят в  $\mathcal{A}$ . Следовательно,  $Q$  не представление, что противоречит предположению. Теорема 1 доказана.

Контрольным экспериментом для эталона  $A$  относительно  $\mathcal{A}$  называется конечное подмножество  $W \subseteq \lambda_A$ , для которого  $W \subseteq \lambda_B$ , где  $B \in \mathcal{A}$ , влечет  $\lambda_A = \lambda_B$ . Любому конечному множеству  $W \subseteq \lambda_A$  очевидным образом взаимно однозначно соответствует автомат  $Q$ , граф которого является деревом,  $\lambda_Q = W$ . Ясно, что если  $W$  — контрольный эксперимент, то  $Q$  — представление. Поэтому, контрольный эксперимент считаем

частным видом представлений. Из сказанного и теоремы 1 вытекает

**Следствие 1.** *Не существует контрольных экспериментов для любого  $A \in \mathcal{A}(U)$  относительно любого замкнутого  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}(U)$ .*

Поскольку  $\mathcal{A}(U)$  замкнут, то для него выполняются теорема 1 и следствие 1.

Рассмотрим классы автоматов, введенные в [6]. Зафиксируем множество  $M \subseteq U$ . Через  $\mathcal{A}(U, M)$  обозначим класс всех тех автоматов из  $\mathcal{A}(U)$ , для которых каждое вход-выходное слово  $u \in M$  порождается не более чем одним состоянием. Элементы  $u \in M$  называем маркерами. Состояние  $a$  автомата  $A \in \mathcal{A}(U, M)$ , порождающее некоторый маркер, назовем отмеченным (маркированным). Пусть  $\bar{\mathcal{A}}(U, M) = \mathcal{A}(U) - \mathcal{A}(U, M)$ . Автомат принадлежит дополнению  $\bar{\mathcal{A}}(U, M)$ , если в нем существуют два неэквивалентных состояния, порождающие один и тот же маркер. Поэтому непустое дополнение является замкнутым классом и теорема 1 дает критерий, при котором фрагмент  $Q$  является представлением для  $A \in \mathcal{A}(U)$  и  $\mathcal{A} = \bar{\mathcal{A}}(U, M)$ . Следствие 1 показывает, что в этом случае контрольные эксперименты не существуют.

Рассмотрим случай, когда  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(U, M)$ . Для всех  $M$  класс  $\mathcal{A}$  не пуст и при пустом  $M$  совпадает с  $\mathcal{A}(U)$ . В [6] найдены критерии бесконечности, конечности и одноэлементности класса  $\mathcal{A}$ . Пусть  $A \in \mathcal{A}(U, M)$ .

Пусть  $Q$  — некоторый, возможно частичный, автомат. Через  $[Q]$  обозначим автомат, полученный из  $Q$ , отождествлением всех состояний, порождающих один и тот же маркер и дальнейшей детерминизацией: если  $qu = q_1$  и  $qu = q_2$  для некоторого  $u$ , то отождествляем состояния  $q_1$  и  $q_2$ . При этом может быть два случая. Если  $Q$  — фрагмент некоторого автомата  $C \in \mathcal{A}(U, M)$ , то  $[Q]$  — детерминированный автомат и фрагмент автомата  $C$ . В противном случае,  $B = [Q]$  — недетерминированный, т.е. для некоторого его состояния  $b$  и входа  $x$  найдутся такие состояния  $b_1, b_2$  и выходы  $y_1, y_2, y_1 \neq y_2$ , что  $b(x, y_1) = b_1 \neq b(x, y_2) = b_2$ . Автомат  $[Q]$  назовем замыканием  $Q$  по маркерам.

Через  $M_x$  обозначим подмножество всех тех маркеров  $u$ , для которых  $u = (x, y), y \in Y$ , а через  $r_x$  — мощность этого подмножества. Рассмотрим случай  $A \in \mathcal{A}(U, M)$ .

Рассмотрим некоторый фрагмент  $Q$  эталона. Состояния  $q$  и  $h$  этого фрагмента называются совместимыми, если для любого входного слова  $p$  как только  $\lambda_Q(q, p)$  и  $\lambda_Q(h, p)$  определены, то они равны. Пусть  $\sigma$  — отношение совместимости состояний фрагмента. Известно, что гомоморфизм  $\varphi$  фрагмента  $Q$  в автомат из  $\mathcal{A}(U)$  порождает на состояниях фрагмента конгруэнтность  $\eta \subseteq \sigma$  по правилу:  $(q, h) \in \eta$ , если  $\varphi(q) = \varphi(h)$ , и наоборот всякая конгруэнтность на состояниях фрагмента порождает гомоморфизм его в некоторый автомат из  $\mathcal{A}(U)$ . Пусть  $\text{rank } \eta$  — число

классов эквивалентности конгруентности  $\eta$ .

**Теорема 2.** Пусть  $n < r$  или  $r_x < r$  для всех  $x$ . Автомат  $Q$  является представлением эталона  $A \in \mathcal{A}(U, M)$  относительно  $\mathcal{A}(U, M)$  тогда и только тогда, когда  $[Q]/\varepsilon = A$ .

**Доказательство.** Если последнее равенство выполняется, то  $Q$  — фрагмент эталона. Если  $Q$  — фрагмент некоторого автомата  $B \in \mathcal{A}$ , то  $A$  — фрагмент этого автомата и  $A = B$ . Поэтому  $Q$  — представление.

Пусть  $B = [Q]$ ,  $B/\varepsilon \neq A$  и  $Q$  — представление эталона относительно  $\mathcal{A}$ . Тогда  $B$  — фрагмент эталона и частичный автомат. Доопределим его полагая  $\delta_B(b, x) = b$  для всех  $(b, x)$ , не входящих в область определения. Пусть  $n < r$ . Тогда для каждого фиксированного  $x$  и любого  $b$ , для которого  $\lambda_B(b, x)$  не определено, можно выбрать свой особый  $y_b \in Y$  и положить  $\lambda_B(b, x) = y_b$  так, чтобы  $(x, y_b)$  порождалось только этим состоянием. Полученный всюду определенный автомат обозначим  $C$ . Рассмотрим автомат  $D = C/\varepsilon$ . Если  $D \neq A$ , то, учитывая, что  $B$  — фрагмент  $D$ , получаем, что  $B$ , а значит, и  $Q$  не представление. Если  $D = A$ , то зафиксируем пару  $(b, x)$ , для которой  $\lambda_B(b, x)$  не определено. По построению состояние  $b$  в автомате  $C$  не имеет эквивалентных. Тогда в автомате  $D$  дугу  $(d, (x, y_b), h)$  заменяем дугой  $(d, (x, y), h)$ , где  $(x, y) \notin \Phi_A$ . В силу  $n < r$  такая пара  $(x, y)$  существует. Полученный автомат обозначим  $H$ . По построению  $B$  — фрагмент автомата  $H/\varepsilon$ . Этот автомат отличен от  $A$ , входит в  $\mathcal{A}$  и, следовательно,  $B$  не может быть представлением. Поэтому и  $Q$  не представление.

Пусть теперь  $r_x < r$  для всех  $x$  и  $n = r \geq 2$ . Покажем, что в автомате  $B$  существуют такие состояния  $b_1, b_2$  и входной символ  $x'$ , что  $\lambda_B(b_1, x') \neq \lambda_B(b_2, x')$ . Если эти состояния и вход  $x'$  не существуют, то что все состояния автомата  $B$  являются совместимыми,  $\sigma$  является конгруенцией и  $B/\sigma$  имеет одно состояние. Если  $B/\sigma$  частичен, то доопределяем его полагая  $b(x, y) = b$ , где  $b$  — единственное его состояние,  $(x, y) \notin M$  и  $(b, x)$  не входит в область определения функций этого автомата. Получаем, что доопределенный в случае необходимости автомат  $B/\sigma$  отличен от  $A$ , входит в  $\mathcal{A}(U, M)$  и, поэтому,  $B$  не может быть представлением. Поэтому вышеуказанные состояния в  $B$  существуют.

Доопределим автомат  $B$  двумя способами. Сначала, если  $\delta_B(b, x)$  не определено, то полагаем  $b(x, y) = b_1$ , где  $(x, y) \notin M$ . В силу неравенства  $r_x < r$  такая пара существует. Полученный автомат обозначим  $C$ . Затем, если  $\delta_B(b, x)$  не определено, то полагаем  $b(x, y) = b_2$ , где  $(x, y) \notin M$ . Полученный автомат обозначим  $D$ . Если  $\delta_B(b_0, p) = b$  и  $\delta_B(b, x)$  не определено, то по построению  $\lambda_C(b_0, pxx') \neq \lambda_D(b_0, pxx')$ . Поэтому  $C \neq D$ ,  $C/\varepsilon$  и  $D/\varepsilon$  входят в  $\mathcal{A}(U, M)$  и  $B$  — фрагмент этих автоматов. Поэтому  $B$  — не представление. Теорема 2 доказана.

Рассмотрим случай, когда условие теоремы 2 не выполняется, т.е.  $n \geq r$  и  $r_x = r$  для некоторого  $x$ . Тогда у любого автомата из  $\mathcal{A}(U, M)$  имеется не более чем  $r$  состояний, этот класс конечен и  $n = r$ . Пусть  $\Phi_Q^1 = \Phi_Q \cap U$ .

**Теорема 3.** Пусть  $r = n$  и  $r_x = r$  для некоторого  $x$ . Автомат  $Q$  является представлением эталона  $A$  относительно  $\mathcal{A}(U, M)$  тогда и только тогда, когда одновременно выполняются условия:

1.  $Q$  — фрагмент эталона,
2.  $\Phi_Q^1 = \Phi_A^1$ ,
3. на состояниях фрагмента  $[Q]$  существует конгруэнтность  $\eta \subseteq \sigma$  с  $\text{rank } \eta = n$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть для фрагмента  $Q$  выполняются условия 1–3. Пусть  $Q$  — фрагмент некоторого автомата  $B \in \mathcal{A}(U, M)$ . Так как  $r_x = r$  для некоторого  $x$ , то  $n_B \leq r$ . Условие 2 влечет равенство  $n_B = n_0$ . Поскольку  $B \in \mathcal{A}(U, M)$ , то  $[Q]$  тоже фрагмент  $B$ . Из условия 3 вытекает, что  $A = B$ . Следовательно,  $Q$  — представление.

Пусть  $Q$  — представление эталона относительно  $\mathcal{A}(U, M)$ . Покажем, что выполняются условия 1–3. Поскольку  $Q$  представление, то 1 выполняется. Пусть 2 не выполняется. В силу условия 1  $\Phi_Q^1 \subset \Phi_A$  и существует  $u \in \Phi_A - \Phi_Q$ . Пусть  $au = b$ . По предположению  $n = r \geq 2$ . Преобразуем эталон полагая  $au = d$ , где  $d \neq b$ . В силу леммы 3.2.14 из [4] получаем автомат  $B$  не равный эталону,  $B/\varepsilon \in \mathcal{A}(U, M)$ ,  $B/\varepsilon \neq A$  и, значит,  $Q$  — не представление. Следовательно, условие 2 выполняется.

Пусть теперь не выполняется условие 3 и, кроме конгруэнтности  $\eta$ , порожденной гомоморфизмом фрагмента  $Q$  в эталон, существует другая конгруэнтность  $\gamma$ , причем  $\text{rank } \eta = \text{rank } \gamma = n$ . Так как  $\gamma \neq \eta$ , то  $[Q]/\eta = A \neq B = [Q]/\gamma$ . Если  $B$  всюду определен, то  $B/\varepsilon$  входит в  $\mathcal{A}(U, M)$ , отличен от  $A$  и, следовательно,  $Q$  — не представление.

Пусть автомат  $B$  частичен. По условию 2 и определению  $B \cap \Phi_A^1 \subseteq \Phi_B^1$ . Поскольку  $n = r = r_x$  для некоторого  $x$ , то  $n_B = n$ . Пусть  $\delta_B(b, x)$  не определено для некоторого  $x$ . В силу последнего включения, эталон может порождать не более  $n - 1$  пар вида  $(x, y)$ , где  $y \in Y$ . Следовательно, существует  $(x, y) \in U - \Phi_A^1$ . Полагаем  $b(x, y) = b$ . Таким способом автомат  $B$  можно преобразовать во всюду определенный автомат  $C$ . Фрагмент  $[Q]$  инициально связан, поэтому инициально связаны автоматы  $B$  и  $C$ . В автомате  $Q$  каждый маркер из  $M$  порождается не более чем одним состоянием. Так как  $n_B = r$ , то автомат  $B$  преобразовать в  $C$  можно таким образом, что в  $C$  каждый маркер порождается не более чем одним состоянием. По построению  $\Phi_A \neq \Phi_C$ . Следовательно, автомат  $C/\varepsilon$ , отличен от эталона, входит в  $\mathcal{A}(U, M)$ . Поэтому  $Q$  — не представление, что противоречит предположению. Отсюда вытекает, что 3 выполняется.

Теорема доказана.

Теоремы 2 и 3 вместе дают критерий, при котором фрагмент  $Q$  является представлением эталона  $A \in \mathcal{A}(U, M)$  относительно  $\mathcal{A}(U, M)$ .

**Следствие 2.[6]** *Контрольный эксперимент для  $A \in \mathcal{A}(U, M)$  относительно  $\mathcal{A}(U, M)$  существует тогда и только тогда, когда в каждом цикле графа эталона имеется отмеченное состояние.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть в каждом цикле эталона имеется отмеченное состояние. Рассмотрим множество  $W$  всех слов из  $\lambda_A$  длины  $2n$  и соответствующий ему древовидный автомат  $Q$  с  $\lambda_Q = W$ . В  $Q$  каждое состояние  $q$  либо является висячим, либо  $\delta_Q(q, x)$  определено для всех  $x$ . Пусть  $q$  висячее и  $q_0w = q$ . Тогда найдутся такие слова  $w_1, w_2$ , что  $w = w_1, w_2$ , состояние  $a = a_0w_1$  эталона отмечено, слово  $w_2$  не пусто и его длина не превосходит  $n$ . Кроме того  $a_0w_3 = a$  для некоторого слова  $w_3$  длины не большей  $n - 1$ . Состояние  $q_0w_3$  и  $q_0w_1$  порождают один и тот же маркер,  $\delta_Q(q_0w_3, p)$  определено для всех входных слов  $p$  длины  $n + 1$ . Поэтому в  $Q$  состояние  $q_0w_3$  и  $q$  отождествляются и состояние, соответствующее состоянию  $q$  висячим не является. Поэтому автомат  $[Q]$  всюду определен и  $[Q]/\varepsilon = A$ . В силу теорем 2 и 3 фрагмент  $Q$  является представлением.

Пусть теперь в эталоне имеется цикл, не содержащий отмеченных состояний, т.е.  $a_0w_1 = a$  и  $aw_2 = a$ , для некоторых  $w_1$  и непустого  $w_2$ , а для всех начальных отрезков  $w$  слова  $w_2$  состояние  $aw$  не отмечено. Следовательно, для всех  $x$   $r_x < r$ , т.е. выполняется условие теоремы 2. Зафиксируем произвольно натуральное  $k \leq 1$  и пусть  $l = d_1 + kd_2$ , где  $d_i$  — длина слова  $w_i$  для  $i = 1, 2$ . Рассмотрим множество  $W_k$  всех слов из  $\lambda_A$  длины  $l$  и соответствующий ему фрагмент  $Q$ . Из сказанного выше следует, что в замыкании  $B = [Q]$  состояние  $b = b_0w_1w_2^k$  является висячим. Поэтому автомат  $[Q]/\varepsilon$  имеет висячее состояние и не равен эталону. Тогда, в силу теоремы 2, фрагмент  $Q$  не является представлением. Следовательно, для всех  $k \geq 1$  множество  $W_k$  контрольным экспериментом не является. Поэтому контрольных экспериментов не существует. Следствие доказано.

Рассмотрим случай, когда  $A \in \overline{\mathcal{A}}(U, M)$  и  $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}(U, M)$ .

**Теорема 4.** *Фрагмент  $Q$  является представлением эталона относительно  $\mathcal{A}$  тогда и только тогда, когда  $Q$  — фрагмент эталона и выполняется хотя одно из условий:*

1.  $[Q]$  — является недетерминированным автоматом;
2.  $r_x = r$  и замыкание недоопределено по  $x$  для некоторого  $x$  и для всех конгруенций  $\eta$  на состояниях замыкания  $\text{rank } \eta > r$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $Q$  — фрагмент эталона и выполняется условие 1. Из определения замыкания по маркерам следует,

что если  $[Q]$  недетерминировано, то в  $Q$  существуют состояния  $q_1, q_2$ , порождающие один и тот же маркер, и входное слово  $p$ , для которого  $\lambda_Q(q_1, p) \neq \lambda_Q(q_2, p)$ . Следовательно, эти состояния несовместимы и для любого гомоморфизма  $\varphi$  фрагмента  $Q$  в автомат  $B \in \mathcal{A}(U)$  состояния  $\varphi(q_1), \varphi(q_2)$  порождают один и тот же маркер и не эквивалентны. Поэтому  $B \in \overline{\mathcal{A}}(U, M)$  и  $Q$  — представление.

Пусть выполняется условие 2. Предположим, что  $Q$  — не представление, т.е.  $Q$  — фрагмент некоторого автомата  $B \in \mathcal{A}(U, M)$ , отличного от эталона. Тогда существует гомоморфизм  $\psi$  этого фрагмента в  $B$ . По условию 2 для некоторого входа  $x$   $r_x = r$  и  $[Q]$  недоопределен по  $x$ . Тогда  $n_B = r$  и для соответствующей гомоморфизму  $\psi$  конгруенции  $\eta$   $\text{rank } \eta = r$ , что противоречит условию 2. Из противоречия следует, что  $Q$  представление.

Пусть теперь  $Q$  — представление. Ясно, что  $Q$  — фрагмент эталона. Покажем, что выполняется хоть одно из условий 1, 2. Предположим противное, что оба этих условия не выполняются. Тогда замыкание  $B = [Q]$  является детерминированным автоматом. Если  $B$  всюду определен, то  $B/\varepsilon \in \mathcal{A}(U, M)$  и  $Q$  не представление. Пусть  $B$  частичен и  $\delta_B(b, x)$  не определено. Если  $r_x < r$ , то существует  $(x, y) \notin M$ . Полагаем  $b(x, y) = b$ . Таким образом доопределим  $B$  и получаем всюду определенный автомат  $C$ , для которого  $C/\varepsilon \in \mathcal{A}(U, M)$ . Тогда  $Q$  не представление. Если же существует конгруентность  $\eta$ , для которой  $\text{rank } \eta \leq R$ , то автомат  $C = B/\eta$  имеет не более  $r$  состояний. Поэтому, если  $C$  недоопределен по  $x$ , то для каждого его состояния  $c$  можно выбрать свою особую пару  $(x, y)$  и положить  $c(x, y) = c$ . Получим всюду определенный автомат  $D$ , для которого  $D/\varepsilon \in \mathcal{A}(U, M)$  и  $B$  — фрагмент  $D/\varepsilon$ . Поэтому  $Q$  не представление, что противоречит предположению. Теорема 4 доказана.

Теоремы 4–2 дают критерий, при котором фрагмент является представлением эталона  $A \in \mathcal{A}(U)$  относительно  $\mathcal{A}(U, M)$ .

Из теоремы 4 следует, что для  $A \in \mathcal{A}(U, M)$  относительно  $\mathcal{A}(U, M)$  контрольный эксперимент всегда существует. Действительно, так как  $A \in \overline{\mathcal{A}}(U, M)$ , то в нем существуют состояния  $a_1, a_2$ , порождающие один и тот же маркер  $u$  и  $\lambda(a_1, p) = q_1 \neq q_2 = \lambda(a_2, p)$ . Пусть  $a_1 = a_0 w_1$  и  $a_2 = a_0 w_2$ . Тогда легко видеть, что 4 слова  $\{w_1 u, w_1(p, q_1), w_2 u, w_2(p, q_2)\}$  являются контрольным экспериментом.

## Список литературы

- [1] В.Б. Кудрявцев, С.В. Алешин, А.С. Подколзин. Введение в теорию автоматов — М.: Наука 1985. — 320 с



- [2] Основы технической диагностики /Под ред. П.П. Пархоменко — М.: Энергия 1976. — 464 с
- [3] Протоколы информационно-вычислительных сетей: Справочник /Под ред. И.А. Мизина, А.П. Кулешова — М.: Радио и связь 1990. — 504 с
- [4] И.С. Грунский, В.А. Козловский, Г.Г. Пономаренко. Представления конечных автоматов фрагментами поведения — Киев:Наукова думка 1990.—232с
- [5] Б.Д. Лукьянов. О различающих и контрольных экспериментах с недетерминированными автоматами //Кибернетика и системный анализ. (1995) с.69–76
- [6] Грунский И.С., Максименко И.И. Об экспериментах с автоматами при отсутствии верхней оценки числа состояний //Доповіді НАН України. (1996) с.31–35