Пример простой универсальной линейной однородной структуры

А.С. Думов

Рассматриваются линейные однородные структуры, обладающие свойством универсальности, т.е. способные в определенном смысле моделировать любые линейные однородные структуры. Приводится конструктивное доказательство существования универсальной линейной однородной структуры с восемью состояниями ячейки.

1 Понятия и результат

Назовем *линейной однородной структурой* (ЛОС) [1], [2], четверку $S = (\mathbf{Z}, E_n, V, f)$, где $\mathbf{Z}$ - множество одномерных векторов с целыми координатами, $E_n = \{0, 1, ..., n-1\}$ - отрезок расширенного натурального ряда, $V = \{\alpha_0, ..., \alpha_{h-1}\}$ - конечный упорядоченный набор элементов $\mathbf{Z}$, f - функция h переменных, $f : (E_n)^h \rightarrow E_n$. Элементы множества $\mathbf{Z}$ называются *ячейками* ЛОС S. Элементы множества E_n называются *состояниями ячеек*. Набор V, называемый *шаблоном соседства*, определяет для каждой ячейки α ЛОС S набор $V(\alpha) = (\alpha + \alpha_0, ..., \alpha + \alpha_{h-1})$, называемый *окрестностью ячейки* α. Функция f называется *локальной функцией переходов* ЛОС S.

Состоянием ЛОС S называем произвольную функцию g, определенную на множестве $\mathbf{Z}$ и принимающую значения из E_n. Если $\alpha \in \mathbf{Z}$ и g - состояние ЛОС S, то значение $g(\alpha)$ называем *состоянием ячейки* α, *определяемым* состоянием g линейной однородной структуры S. На множестве Γ всех состояний ЛОС S определим *основную функцию переходов* F линейной однородной структуры S, полагая $F(g_1) = g_2$, если $g_1, g_2 \in \Gamma$ и выполняется тождество $g_2(\alpha) = f(g_1(\alpha+\alpha_0), ..., g_1(\alpha+\alpha_{h-1}))$.

Назовем *поведением* ЛОС S последовательность ее состояний $g_0, g_1, ...$, для которых выполняется равенство $g_{i+1} = F(g_i)$, $i = 0, 1, ...$.

Состояние g_0 интерпретируется как некоторое изначально задаваемое состояние. Состояние g_i иногда интерпретируется как состояние ЛОС в момент времени i.

Моделирование поведения одной ЛОС посредством поведения другой ЛОС определим следующим образом. Пусть $S = (\mathbf{Z}, E_n, V, f)$, $S' = (\mathbf{Z}, E_{n'}, V', f')$, $l \in \mathbf{N}$. Обозначим через $P_{\alpha'}$ множество всех таких ячеек α ЛОС S, что $\alpha' \cdot l \leq \alpha < \alpha' \cdot l + l$. Семейство множеств (*блоков*) $P_{\alpha'}$, $\alpha' \in \mathbf{Z}$, образует покрытие множества ячеек ЛОС S. Назовем *состоянием блока* $P_{\alpha'}$ совокупность $g(P_{\alpha'})$ состояний ячеек этого блока. Пусть θ - взаимно однозначное отображение множества $E_{n'}$ состояний ячейки ЛОС S' на подмножество M множества состояний блока ЛОС S. Сопоставим каждому состоянию g' ЛОС S' такое состояние g ЛОС S, что для каждой ячейки α' ЛОС S' состояние $g(P_{\alpha'})$ блока $P_{\alpha'}$ равно $\theta(g'(\alpha'))$. Таким образом, состояние блока $P_{\alpha'}$ ЛОС S “изображает” состояние ячейки α' ЛОС S'. Обозначим это как $g = \Theta(g')$. Пусть G' - подмножество множества Γ' всех состояний ЛОС S'. Если существует такое $N \in \mathbf{N}$, что для любого такого поведения g'_0, g'_1, ... ЛОС S', что $g'_0 \in G'$, поведение $g_0 = \Theta(g'_0)$, g_1, ... ЛОС S удовлетворяет соотношению $g_{N \cdot i} = \Theta(g'_i)$, $i \in \mathbf{N}$, то говорим, что множество состояний G' ЛОС S' представимо в ЛОС S [с замедлением N]. Если $G' = \Gamma'$, то говорим, что ЛОС S' представима в ЛОС S [с замедлением N]. Если произвольная ЛОС S' представима в некоторой ЛОС S, то назовем ЛОС S *универсальной*.

Теорема. *Существует универсальная линейная однородная структура с* $n = 8$ *состояниями ячейки и шаблоном соседства* $V = ((-1), (0), (1))$.

2 Доказательство

Рассмотрим линейную однородную структуру S, множество состояний ячейки которой есть $\{0, \rightarrow, \leftarrow, \rightharpoonup, \leftharpoonup, \hookleftarrow, \Box, \nabla\}$ и шаблон соседства $V = ((-1), (0), (1))$. Состояния из множества $\{\rightarrow, \leftarrow, \rightharpoonup, \leftharpoonup, \hookleftarrow\}$, которые будут осуществлять “движение” влево и вправо, “передаваясь” от ячейки к ячейке, назовем *сигналами*. Определим локальную функцию переходов f этой ЛОС S в соответствии со следующими правилами, предполагая, что в случае возможности применения более чем одного правила, следует применять первое из возможных. Звездочки означают, что соответствующие переменные могут принимать произвольное значение.

1. $f(\hookleftarrow, \rightarrow, \leftarrow) = \nabla$; **2.** $f(*, \rightarrow, \Box) = \rightharpoonup$; **3.** $f(*, \rightharpoonup, \Box) = \rightharpoonup$; **4.** $f(\Box, \leftarrow, *) = \leftharpoonup$; **5.** $f(\Box, \leftharpoonup, *) = \leftharpoonup$; **6.** $f(\rightharpoonup, \rightarrow, *) = \Box$; **7.** $f(\rightharpoonup, \rightharpoonup, *) = \Box$; **8.** $f(*, \leftarrow, \leftharpoonup) = \Box$; **9.** $f(*, \leftharpoonup, \leftharpoonup) = \Box$; **10.** $f(*, \rightharpoonup, \leftharpoonup) = \hookleftarrow$; **11.** $f(\rightharpoonup, \leftharpoonup, *) = 0$; **12.** $f(\rightarrow, \rightarrow, \leftharpoonup) = \leftharpoonup$; **13.** $f(\rightarrow, \rightarrow, *) = \nabla$; **14.** $f(\rightarrow, *, *) = \rightarrow$; **15.**

$f(*,\nabla,\leftharpoonup)=\nabla$; **16.** $f(\rightharpoonup,*,*)=\rightharpoonup$; **17.** $f(*,*,\leftarrow)=\leftarrow$; **18.** $f(*,*,\leftharpoonup)=\leftharpoonup$; **19.** $f(*,\rightarrow,\nabla)=\rightarrow$; **20.** $f(\nabla,\leftarrow,*)=\nabla$; **21.** $f(*,\rightharpoonup,\nabla)=\nabla$; **22.** $f(*,\leftarrow,\nabla)=\rightharpoonup$; **23.** $f(\nabla,\rightharpoonup,*)=\leftharpoonup$; **24.** $f(\nabla,\leftharpoonup,*)=\leftharpoonup$; **25.** $f(*,\nabla,*)=\nabla$; **26.** $f(*,\rightarrow,\hookleftarrow)=\hookleftarrow$; **27.** $f(\rightarrow,\hookleftarrow,*)=0$; **28.** $f(\Box,\hookleftarrow,*)=\leftharpoonup$; **29.** $f(*,\leftharpoonup,\hookleftarrow)=\hookleftarrow$; **30.** $f(\leftharpoonup,\hookleftarrow,*)=0$; **31.** $f(*,\hookleftarrow,\nabla)=0$; **32.** $f(*,\leftharpoonup,\Box)=\hookleftarrow$; **33.** $f(*,\hookleftarrow,\Box)=0$; **34.** $f(\hookleftarrow,*,\Box)=\leftarrow$; **35.** $f(*,\hookleftarrow,*)=\hookleftarrow$; **36.** $f(*,\Box,*)=\Box$; **37.** $f(*,*,*)=0$.

Обозначим через $\aleph'$ класс всех ЛОС S' с $n'\geq 2$ состояниями ячейки, шаблоном соседства $((-1),(1))$, локальные функции переходов f' которых удовлетворяют следующим правилам: $f'(0,0)=0$, $f'(x,y)\neq 0$ если $x\neq 0$ и $y\neq 0$, $f'(x,y)=f'(y,x)$. Будем говорить, что состояние g удовлетворяет условию четности, если $g(\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=(i)$, i-нечетно.

Лемма 1. *Множество G' состояний ЛОС $S'\in\aleph'$, удовлетворяющих условию четности, представимо в ЛОС S.*

Доказательство. Пусть ЛОС S' имеет n' состояний ячейки. Поставим в соответствие состоянию g' ЛОС S' состояние g ЛОС S следующим образом. Пусть $\delta,\Delta\in\mathbf{N}$. Обозначим через $\delta_{i'}$ совокупность таких ячеек $\alpha=(i)$, что $(\delta+\Delta)\cdot i'\leq i<(\delta+\Delta)\cdot i'+\delta$, $i'\in\mathbf{Z}$. Множество ячеек, ограниченное слева ячейками из $\delta_{i'}$ и справа ячейками из $\delta_{i'+1}$, будем обозначать через $\Delta_{i'}$. Назовем такие множества ячеек соответственно δ-блоками и Δ-блоками. Положим δ равным $2^{n'-2}$ и будем пока считать, что $\delta\ll\Delta$, и что Δ - четно.

Состоянию $g'(\alpha')$ произвольной ячейки $\alpha'=(i')$ ЛОС S' сопоставим совокупность состояний ячеек $\delta_{i'}$- и $\Delta_{i'}$-блоков ЛОС S. Если состояние $g'(\alpha')=0$, то $g(\alpha)=0$ для всех ячеек $\alpha\in\delta_{i'}$ ЛОС S, если же $g'(\alpha')=x\neq 0$, то $g(\alpha)=\nabla$ для ячейки $\alpha=((\delta+\Delta)\cdot i'+\delta-2^{x-1})$ (т.е. для ячейки номер 2^{x-1}, если считать от правого края блока $\delta_{i'}$), и $g(\alpha)=0$ для остальных ячеек $\delta_{i'}$-блока. Состояния ячеек $\Delta_{i'}$-блока не зависит от состояния ячейки α' ЛОС S', а определяются локальной функцией переходов f' моделируемой ЛОС S'. Пусть $\Omega=\{\delta,v,k_1,...,k_m,\Delta+\delta-w\}$ - упорядоченное по возрастанию множество чисел, v, $k_i,i\in\{1,...,m\}$, w - четны, $m\in\mathbf{N}$. Пусть $g((\delta))=\leftarrow$, $g((v))=\Box$, $g((k_i))=\rightarrow,i\in\{1,...,m\}$, $g(w)=\rightarrow$, и пусть $g(\alpha)=0$ для остальных ячеек блока Δ_0. Состояния ячеек остальных Δ-блоков могут быть получены переносом Δ_0 блока на $(\Delta+\delta)\cdot i$, $i\in\mathbf{Z}$. Далее мы дадим описание функционирования ЛОС S, из которого станет ясно, как именно следует выбирать числа v, m, k_1, ..., k_m, w для представления множества G' состояний данной структуры S'. При этом мы ограничимся изложением основной идеи, оставляя в стороне некоторые технические детали. Пусть состояние g_0 ЛОС S сопоставлено состоянию g_0' ЛОС S' указанным образом, причем для состояния g_0' выполнено условие $g_0'(\alpha')=0\Leftrightarrow\alpha'=(i')$, i' - нечетно.

Согласно правилу 17, сигнал $\leftarrow$ из $g_0((\delta))$ будет двигаться влево, и достигнет в момент времени t_1 такой ячейки α_1, что $g_{t_1}(\alpha_1 + (-1)) = \nabla$, после чего $g_{t_1+2}(\alpha_1+(-1))$ станет равным $\rightharpoonup$ согласно правилам 17, 20, 22, и затем появившийся сигнал $\rightharpoonup$ согласно правилу 16 будет перемещаться вправо. Аналогично, сигнал $\to$ из ячейки $2 \cdot (\Delta + \delta - w)$ будет двигаться вправо и достигнет в момент времени t_2 такой ячейки $\alpha_2 \in \delta_3$, что $g_{t_2}(\alpha_2 + (1)) = \nabla$. К этому моменту времени состояние ячейки $\alpha_2 + (2)$ есть $\leftharpoonup$ (согласно правилу 23), затем $g_{t_2+1}(\alpha_2 + (1)) =\to$ по правилу 14 и сигнал $\leftharpoonup$ из ячейки $\alpha_2 + (2)$ начнет движение влево. В результате в момент времени t_3 состояние ячейки $\alpha_3 = (\delta)$ станет равным $\rightharpoonup$, а в момент времени t_4 состояние ячейки $\alpha_4 = 2 \cdot (\Delta + \delta) - (1)$ станет равным $\leftharpoonup$. Согласно соответствию, введенному между состояниями ячеек ЛОС S и состояниями ячеек ЛОС S', $t_1 = 2^x + 1$, $t_2 = w + 3 + 2\delta - 2^y$, где x, y - состояния ячеек $\alpha'_1 = (1)$ и $\alpha'_2 = (3)$ ЛОС S'. Можно подобрать w и v так, что для любых x и y встреча соответствующих сигналов $\rightharpoonup$ и $\leftharpoonup$ произойдет в ячейке $\alpha_5 \in \Upsilon$, $\Upsilon = \{(i) | 2\delta + \Delta + v + 2 < i \leq 4\delta + \Delta + v + 2\}$, и так, что в течение временного диапазона $[t_5, t_6]$, в котором может произойти эта встреча сигналов, в указанном множестве Υ не будет никаких других сигналов. Тогда состояние этой ячейки α_5 по правилу 10 станет равным $\hookleftarrow$, и этот сигнал $\hookleftarrow$ останется неподвижен, согласно правилу 35, до появления сигнала $\to$ в левой соседней ячейке. Заметим, что для различных с точностью до перестановки пар x и y соответствующий сигнал $\hookleftarrow$ будет возникать в различных ячейках. Пусть в момент времени $t_7 > t_6$ сигнал $\to$, находившийся в момент времени $t = 0$ в ячейке $(-w)$, окажется в ячейке $(2\delta + \Delta + v - 1)$, чего можно добиться, подбирая Δ и числа из Ω. Затем он дойдет до ячейки $\alpha_5 - (1)$, и сигнал $\hookleftarrow$ переместится на одну ячейку влево согласно правилу 26. Если $\alpha_5 - (1) = (2\delta + \Delta + v + 1)$, то, согласно правилам 18, 28, 29, 32, 34 в ячейках $(2\delta+\Delta+v+1)$, $(2\delta+\Delta+v)$, $(2\delta+\Delta+v-1)$ возникнет несколько сигналов, которые начнут перемещаться влево со скоростью 1 ячейка за 1 такт времени. Вследствие "столкновения" этой совокупности сигналов с сигналом $\to$ (в момент времени $t = 0$ находившемся в ячейке $(-\Delta + k_m)$), согласно правилу 1, некоторая ячейка α_6 перейдет в состояние ∇. Число k_m, таким образом, следует выбирать так, чтобы эта ячейка α_6 была равна $(\delta + \delta - 2^{f'(x,y)-1})$, где $f'(x, y)$ -локальная функция переходов ЛОС S', $x = g'((0))$, $y = g'((3))$. Если же $\alpha_5 - (1) \neq (2\delta + \Delta + v + 1)$, то сигнал $\hookleftarrow$ "передвинется" влево на одну ячейку при встрече с сигналом "из $\{k_i\}$-последовательности". Каждой паре (x, y), $x = g'((0))$, $y = g'((3))$, соответствует (с точностью до перестановки) свой сигнал $\to$, находящийся в момент времени $t = 0$ в ячейке $(-\Delta + k_l)$, после встречи с которым сигнал $\hookleftarrow$ перородится в совокупность сигналов, начинающую движение влево до столкновения с сигналом $\rightarrow$, находящемся в момент времени $t = 0$ в ячейке $(-\Delta + k_{l-1})$. Варьируя разность $k_l - k_{l-1}$, можно обеспечить всевозможные значения функции f' на наборе (x, y). Решая эту задачу для различных x, y, получаем моделирование различных функций. Замедление при таком представлении множества G' состояний ЛОС S' посредством ЛОС S составит $2 \cdot (\delta + \Delta)$. Лемма доказана.

Пусть $\aleph''$ - класс всех ЛОС S'' с $n \geq 2$ состояниями ячейки и шаблоном соседства $V'' = ((-1), (0), (1))$.

Лемма 2. *Произвольная ЛОС $S'' \in \aleph''$ представима некоторой ЛОС $S' \in \aleph'$, причем так, что для любого состояния g'' ЛОС S'' соответствующее ему состояние g' ЛОС S' удовлетворяет условию четности.*

Доказательство. Пусть моделируемая структура S'' имеет n'' состояний ячейки и локальную функцию переходов $f''(x, y, z)$. Пусть состояние каждой ячейки моделирующей ЛОС S' - либо 0, либо вектор (A, t), где $A \in \{\bullet, \rightarrow, \leftarrow, x, \overrightarrow{x}, \overleftarrow{x}, \widetilde{x, y}, \overrightarrow{x, y}, \overleftarrow{x, y}\}$, $x, y \in \{0, ..., n'' - 1\}$, $t \in \{0, ..., 5\}$. Локальную функцию переходов $f'(x, y)$ ЛОС S', симметричную относительно своих аргументов, определим согласно следующим правилам. (Через x, y будем обозначать элементы множества $\{0, ..., n'' - 1\}$.)

1. $f'(0, 0) = 0$. **2.1.** $f'((x, 0), (\rightarrow, 0)) = (\overrightarrow{x}, 1)$, **2.2.** $f'((x, 0), (\leftarrow, 0)) = (\overleftarrow{x}, 1)$, **2.3.** $f'((\rightarrow, 0), (\leftarrow, 0)) = (\bullet, 1)$. **3.1.** $f'((\overrightarrow{x}, 1), (\bullet, 1)) = (\overrightarrow{x}, 2)$, **3.2.** $f'((\leftarrow, 1), (\bullet, 1)) = (\overleftarrow{x}, 2)$, **3.3.** $f'((\overrightarrow{x}, 1), (\overleftarrow{x}, 1)) = (\bullet, 2)$. **4.1.** $f'((\overrightarrow{x}, 2), (\overleftarrow{y}, 2)) = (\widetilde{x, y}, 3)$, **4.2.** $f'((\overrightarrow{x}, 2), (\bullet, 2)) = (\rightarrow, 3)$, **4.3.** $f'((\overleftarrow{x}, 2), (\bullet, 2)) = (\leftarrow, 3)$. **5.1.** $f'((\widetilde{x, y}, 3), (\rightarrow, 3)) = (\overleftarrow{x, y}, 4)$, **5.2.** $f'((\widetilde{x, y}, 3), (\leftarrow, 3)) = (\overrightarrow{x, y}, 4)$, **5.3.** $f'((\rightarrow, 3), (\leftarrow, 3)) = (\bullet, 4)$. **6.1.** $f'((\overrightarrow{x, y}, 4), (\bullet, 4)) = (\overrightarrow{x, y}, 5)$, **6.2.** $f'((\overleftarrow{x, y}, 4), (\bullet, 4)) = (\overleftarrow{x, y}, 5)$, **6.3.** $f'((\overrightarrow{x, y}, 4), (\overleftarrow{x, y}, 4) = (\bullet, 5)$. **7.1.** $f'((\overrightarrow{x, y}, 5), (\overleftarrow{y, z}, 5)) = (f''(x, y, z), 0)$, **7.2.** $f'((\overrightarrow{x, y}, 5), (\bullet, 5)) = (\leftarrow, 0)$, **7.3.** $f'((\overleftarrow{x, y}, 5, (\bullet, 5)) = (\rightarrow, 0)$.

Состояние g'' ЛОС S'' поставим в соответствие состоянию g' ЛОС S' следующим образом. Если $g''(\alpha) = x$, то $g'(6 \cdot \alpha) = (x, 0)$. Если $\alpha' = (i')$, i' - нечетно, то $g'(\alpha') = 0$. Если $\alpha' = (2) + 6 \cdot k, \ k \in \mathbf{Z}$, то $g'(\alpha') = (\rightarrow, 0)$. Если $\alpha' = (-2) + 6 \cdot k, \ k \in \mathbf{Z}$, то $g'(\alpha') = (\leftarrow, 0)$.

Следующая таблица иллюстрирует последовательность состояний ЛОС S' с такой функцией переходов. Вторые компоненты векторов-состояний опущены. (Они равны нулю для всех ячеек в ненулевом состоянии в первой строке, единице - во второй, ..., пяти - в шестой строке и снова нулю - в седьмой.)

$\leftarrow$	0	x	0	$\rightarrow$	0	$\leftarrow$	0	y	0	$\rightarrow$	0	$\leftarrow$	0	z	0	$\rightarrow$
	$\overleftarrow{x}$	0	$\overrightarrow{x}$	0	$\bullet$	0	$\overleftarrow{y}$	0	$\overrightarrow{y}$	0	$\bullet$	0	$\overleftarrow{z}$	0	$\overrightarrow{z}$	
		$\bullet$	0	$\overrightarrow{x}$	0	$\overleftarrow{y}$	0	$\bullet$	0	$\overrightarrow{y}$	0	$\overleftarrow{z}$	0	$\bullet$		
			$\rightarrow$	0	$\widetilde{x, y}$	0	$\leftarrow$	0	$\rightarrow$	0	$\widetilde{y, z}$	0	$\leftarrow$			
				$\overleftarrow{x, y}$	0	$\overrightarrow{x, y}$	0	$\bullet$	0	$\overleftarrow{y, z}$	0	$\overrightarrow{y, z}$				
					$\bullet$	0	$\overrightarrow{x, y}$	0	$\overleftarrow{y, z}$	0	$\bullet$					
						$\leftarrow$	0	$f''(x, y, z)$	0	$\rightarrow$						

Ячейка α, находящаяся в момент времени $t = 0$ в состоянии $(y, 0)$, оказывается в момент времени $t = 6$ в состоянии $(f''(x, y, z), 6)$, $(x, 0)$, $(z, 0)$ - состояния в момент времени $t = 0$ ячеек, отстоящих от ячейки α влево и вправо на 6 ячеек. Т.о. ЛОС S'' моделируется ЛОС S' с задержкой 6. Лемма доказана.

Из существования в классе $\aleph''$ универсальной ЛОС [2] и из лемм 1 и 2 вытекает универсальность структуры S.

Список литература

[1] В. Б. Кудрявцев, С.В. Алешин, А.С. Подколзин. Введение в теорию автоматов. - М.; Наука, 1985.

[2] В.Б. Кудрявцев, А.С. Подколзин, А.А. Болотов. Основы теории однородных структур. - М.; Наука, 1990.