

Критерий отношения правдоподобия в случайной морфологии*

А. В. Зубюк

Рассмотрены задачи классификации изображений, имеющих случайную форму, и поиска объекта, изображения которого имеют случайную форму, на неизвестном фоне. Предложен метод решения указанных задач, основанный на принципе отношения правдоподобия. Теоретико-возможностный вариант будет рассмотрен в следующей публикации.

Ключевые слова: морфологический анализ изображений, случайная форма изображений, критерий отношения правдоподобия.

1. Введение

Математические методы морфологического анализа изображений, рассмотренные в [2], разработаны для решения задач анализа сцен по их изображениям. В качестве примеров можно привести задачи поиска известного объекта на неизвестном фоне, выделения неизвестного объекта на известном фоне, совмещения изображений, полученных в разных спектральных диапазонах. Трудности при решении подобных задач связаны с тем, что всякое изображение сцены содержит информацию не только о регистрируемой сцене, но также и об условиях регистрации, при которых оно получено, которые, как правило, неизвестны. Такими условиями являются, например, характер освещения объектов сцены, его спектральный состав и т. п. В основе математических методов морфологического анализа изображений

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 11-07-00722-а.

лежит понятие *формы изображения* как максимального инварианта относительно изменения условий регистрации. Форма изображения сцены несёт наиболее полную информацию о форме сцены, доступную по её изображению.

Математические методы случайной морфологии направлены на решение задач анализа сцен, состоящих из объектов, имеющих стохастическую природу. При этом предполагается, что наличие таких объектов делает форму сцены случайной. Примером объекта, имеющего случайную форму, может служить легковой автомобиль. Действительно, изображение легкового автомобиля не может быть охарактеризовано одной формой. Каждый легковой автомобиль, а значит и его изображение, имеет свою форму, отличающуюся, вообще говоря, от форм других легковых автомобилей. Распределение вероятностей этих форм несёт информацию о форме легкового автомобиля «в целом» и отличается, например, от распределения форм грузовых автомобилей.

2. Случайная форма изображений

Напомним формальное определение *случайной формы* изображений, данное в [1].

Пусть $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ — конечное подмножество координатной плоскости, которое в дальнейшем будем называть полем зрения, и \mathcal{R} — n -мерное евклидово пространство. Пусть в пространстве \mathcal{R} определён и фиксирован ортонормированный базис $\{e_1, \dots, e_n\}$. Математической моделью чёрно-белых (полутоновых) изображений будем считать элементы пространства \mathcal{R} . Координаты элемента $f \in \mathcal{R}$ в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ будем интерпретировать как яркости соответствующего изображения в точках x_1, \dots, x_n поля зрения \mathcal{X} . Пространство \mathcal{R} будем называть пространством изображений.

Изменение условий регистрации при получении изображений некоторой сцены приводит к изменению изображений этой сцены. В ряде практически важных случаев можно выделить класс $\mathbb{G} = \{\gamma : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}\}$ преобразований пространства изображений \mathcal{R} , содержащий тождественное преобразование, и являющийся полугруппой

относительно композиция преобразований (которую в дальнейшем будем обозначать знаком « \circ »), который моделирует всевозможные изменения условий регистрации изображений. Для любого изображения $f \in \mathcal{R}$ изображение¹ $\gamma \circ f \in \mathcal{R}$ является изображением той же сцены, что и f .

В связи с вышесказанным дадим следующее определение (см. [2]):

Определение 1. Формой V_f изображения $f \in \mathcal{R}$ будем называть множество

$$V_f = \{\gamma \circ f \mid \gamma \in \mathbb{G}\} \subset \mathcal{R}.$$

Обозначим множество всех форм $\mathbb{V} = \{V_f \mid f \in \mathcal{R}\}$.

Определение 2. Случайной формой будем называть вероятностное пространство $(\mathbb{V}, \mathfrak{A}, \text{Pr})$, где \mathfrak{A} — некоторая σ -алгебра подмножеств множества \mathbb{V} , а Pr — заданная на ней вероятность.

Процесс формирования изображения, моделью которого является случайная форма $(\mathbb{V}, \mathfrak{A}, \text{Pr})$, описывается следующей схемой:

$$(\mathbb{V}, \mathfrak{A}, \text{Pr}) \xrightarrow{1} V \in \mathbb{V} \xrightarrow{2} f \in V \quad (1)$$

Схема (1) состоит из двух этапов:

- 1) В результате стохастического эксперимента, моделью которого является вероятностное пространство $(\mathbb{V}, \mathfrak{A}, \text{Pr})$, из \mathbb{V} случайным образом выбирается «простая» форма V . Такой эксперимент моделирует стохастическую природу объектов сцены.
- 2) Из формы V , полученной на этапе 1, произвольным образом выбирается предъявляемое изображение $f \in \mathcal{R}$. Произвольность такого выбора моделирует априорную неизвестность условий регистрации, при которых получено изображение f .

Пусть полугруппа преобразований \mathbb{G} такова, что форма V_f любого изображения $f \in \mathcal{R}$ является подпространством в \mathcal{R} , содержащим подпространство V_0 , определённое следующим образом²:

¹Здесь и далее запись вида $\gamma \circ f$ означает результат применения преобразования γ к изображению $f \in \mathcal{R}$.

²Подпространство V_0 содержит все изображения, имеющие постоянную яркость на поле зрения \mathcal{X} , то есть содержит все изображения ровного поля зрения.

$$V_0 = \left\{ c \sum_{i=1}^n e_i \mid c \in (-\infty, \infty) \right\}.$$

В морфологическом анализе изображений (см. [2]) в этом случае вводится понятие независимости одного изображения от формы другого. А именно, даётся следующее определение:

Определение 3. Будем говорить, что изображение $g \in \mathcal{R}$ не зависит от формы изображения $f \in \mathcal{R}$, если

$$(\Pi_f - E)g = 0,$$

где Π_f — проектор на форму V_f изображения f , а E — проектор на подпространство V_0 .

Поясним смысл определения 3. Итак, пусть изображение $g \in \mathcal{R}$ не зависит от формы изображения $f \in \mathcal{R}$. Так как по условию форма V_f изображения f является подпространством в \mathcal{R} , то изображение g может быть разложено на ортогональные слагаемые:

$$g = g^\perp + \Pi_f g = g^\perp + E g, \quad g^\perp \in V_f^\perp,$$

где V_f^\perp — ортогональное дополнение к подпространству V_f . Таким образом изображение g представляет собой сумму изображения $E g$ ровного поля зрения и изображения g^\perp , которое (в некотором смысле) не содержит никаких черт изображения f . А значит и само изображение g не содержит (в том же смысле) никаких черт изображения f .

В связи с этим процесс формирования изображений, не зависящих от случайной формы $(\mathbb{V}, \mathfrak{A}, \text{Pr})$, определим следующей схемой:

$$(\mathbb{V}, \mathfrak{A}, \text{Pr}) \xrightarrow{1} V \in \mathbb{V} \xrightarrow{2} f \in V^\perp \oplus V_0, \quad (2)$$

где символом \oplus обозначена прямая сумма подпространств. Поясним смысл схемы (2). Пусть проведён стохастический эксперимент, моделью которого является случайная форма $(\mathbb{V}, \mathfrak{A}, \text{Pr})$, и изображение f сформировано по схеме (2). В этом случае изображение f не зависит от формы V , случайным образом выбранной из \mathbb{V} на первом шаге схемы (2).

3. Задача классификации изображений

Пусть заданы N случайных форм $(\mathbb{V}, \mathfrak{A}, \text{Pr}_1), \dots, (\mathbb{V}, \mathfrak{A}, \text{Pr}_N)$, и предъявляемое изображение $g \in \mathcal{R}$ регистрируется по схеме:

$$g = \lambda + \nu,$$

где $\lambda \in \mathcal{R}$ — это изображение-представитель одной из случайных форм³ $(\mathbb{V}, \mathfrak{A}, \text{Pr}_i)$, $i = 1, \dots, N$, а $\nu \in \mathcal{R}$ — случайный шум. Требуется на основе изображения g принять решение о том, представителем какой из заданных случайных форм является изображение λ .

Пусть μ — мера Лебега в пространстве \mathcal{R} , и шум ν является случайным элементом \mathcal{R} с координатами, абсолютно непрерывными относительно меры μ . Обозначим $\text{pr}_\nu(\cdot) : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty)$ плотность распределения шума ν .

Пусть $\lambda : \mathbb{V} \rightarrow \mathcal{R}$ — некоторое отображение, ставящее в соответствие каждой форме $V \in \mathbb{V}$ изображение $\lambda_V \in V$. Множество всех таких отображений обозначим $\bar{\Lambda}$.

Отображению $\lambda \in \bar{\Lambda}$ соответствуют следующие плотности распределения предъявляемых изображений:

$$\text{pr}_i(g | \lambda) = \int_{\mathbb{V}} \text{pr}_\nu(g - \lambda_V) d\text{Pr}_i(V), \quad g \in \mathcal{R}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3)$$

Таким образом, описанную задачу классификации изображений можно поставить как многоальтернативную задачу проверки статистических гипотез. В этой задаче i -ая гипотеза состоит в том, что предъявляемые изображения являются случайными элементами пространства \mathcal{R} с плотностью распределения $\text{pr}_i(\cdot | \lambda)$, $\lambda \in \bar{\Lambda}$, определённой равенством (3), $i = 1, \dots, N$. Рассмотрим метод решения такой задачи, основанный на принципе максимума правдоподобия. Получающийся при этом критерий не является оптимальным в каком-либо смысле, однако обладает свойством асимптотической оптимальности, о которой пойдёт речь в пункте 4.

³То есть изображение λ формируется по схеме (1).

Определим функции правдоподобия $L_i(\cdot) : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty)$ для рассматриваемых гипотез следующим образом:

$$L_i(g) = \sup_{\lambda \in \bar{\Lambda}} \text{pr}_i(g | \lambda), \quad g \in \mathcal{R}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Пусть \mathbb{Q} — множество векторов $q = (q_1, \dots, q_N)$, удовлетворяющих условию

$$\begin{aligned} q_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \\ \sum_{i=1}^N q_i &= 1. \end{aligned}$$

Критерием отношения правдоподобия для $q \in \mathbb{Q}$ будем называть такой критерий, в соответствии с которым при предъявлении изображения $g \in \mathcal{R}$ решение принимается в пользу гипотезы с номером $I(g)$, удовлетворяющей условию

$$q_{I(g)} L_{I(g)}(g) = \max_{i=1, \dots, N} q_i L_i(g).$$

Рассмотрим случай, когда плотность распределения вероятностей вектора шума имеет вид

$$\text{pr}_\nu(x) = f_\nu(\|x\|^2), \quad x \in \mathcal{R},$$

причём функция $f_\nu(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ является монотонно невозрастающей. Пусть также полугруппа преобразований \mathbb{G} такова, что каждая форма $V \in \mathbb{V}$ является выпуклым замкнутым множеством в \mathcal{R} . Обозначим Π_V оператор проецирования на форму $V \in \mathbb{V}$. Тогда функции правдоподобия (4) примут вид

$$L_i(g) = \int_{\mathbb{V}} f_\nu(\|g - \Pi_V g\|^2) d\text{Pr}_i(V), \quad g \in \mathcal{R}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5)$$

и при предъявлении изображения $g \in \mathcal{R}$ решение в соответствии с критерием отношения правдоподобия для $q \in \mathbb{Q}$ будет приниматься в пользу гипотезы с номером $I(g)$, для которой

$$\begin{aligned}
 q_{I(g)} \int_{\mathbb{V}} f_{\nu} \left(\|g - \Pi_V g\|^2 \right) d\Pr_{I(g)}(V) &= \\
 &= \max_{i=1, \dots, N} q_i \int_{\mathbb{V}} f_{\nu} \left(\|g - \Pi_V g\|^2 \right) d\Pr_i(V).
 \end{aligned}$$

4. Об асимптотической оптимальности критерия отношения правдоподобия

Рассмотрим задачу классификации изображений со случайной формой, описанную в пункте 3, как минимаксную задачу проверки статистических гипотез.

Пусть вероятности \Pr_i , $i = 1, \dots, N$, таковы, что $\max_{i=1, \dots, N} \Pr_i(\{V\}) \neq 0$ лишь для конечного числа форм из множества \mathbb{V} , то есть пусть выполнено условие

$$\bar{\mathbb{V}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ V \in \mathbb{V} : \max_{i=1, \dots, N} \Pr_i(\{V\}) \neq 0 \right\} = \{V_1, \dots, V_K\}, \quad (6)$$

и для любого $A \in \mathfrak{A}$

$$\Pr_i(A) = \sum_{V \in \bar{\mathbb{V}}: V \in A} \Pr_i(\{V\}). \quad (7)$$

Пусть также ни одна форма из множества $\bar{\mathbb{V}}$ не является подмножеством другой формы из $\bar{\mathbb{V}}$, то есть выполнено условие

$$\forall V_1, V_2 \in \bar{\mathbb{V}} \quad V_1 \cap V_2 \neq V_1. \quad (8)$$

Изучим асимптотические свойства критерия отношения правдоподобия в условиях, когда количество точек (пикселей) поля зрения неограниченно увеличивается.

Пусть \varkappa — натуральное число. Обозначим $\mathcal{R}^{(\varkappa)}$ евклидово пространство размерности $\varkappa n$. Скалярное произведение в пространстве $\mathcal{R}^{(\varkappa)}$ будем обозначать $(\cdot, \cdot)_{(\varkappa)}$, а норму в $\mathcal{R}^{(\varkappa)}$ будем обозначать $\|\cdot\|_{(\varkappa)}$. Зафиксируем в $\mathcal{R}^{(\varkappa)}$ некоторый ортонормированный базис

$\{e_1^{(\varkappa)}, \dots, e_{\varkappa n}^{(\varkappa)}\}$ и определим отображение $\Psi^{(\varkappa)} : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^{(\varkappa)}$ следующим образом:

$$\Psi^{(\varkappa)}g = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\varkappa} (g, e_j) e_{(k-1)\varkappa+j}^{(\varkappa)}, \quad g \in \mathcal{R}.$$

Отображение $\Psi^{(\varkappa)}$ каждому изображению из \mathcal{R} ставит в соответствие изображение из $\mathcal{R}^{(\varkappa)}$ путём «копирования» каждого пикселя \varkappa раз.

Отображение $\Psi^{(\varkappa)}$ индуцирует следующие объекты:

- 1) Множество $\mathbb{V}^{(\varkappa)}$ форм в пространстве $\mathcal{R}^{(\varkappa)}$:

$$\mathbb{V}^{(\varkappa)} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \Psi^{(\varkappa)}V \mid V \in \mathbb{V} \right\},$$

где для каждого $V \in \mathbb{V}$ множество $\Psi^{(\varkappa)}V$ определено следующим образом:

$$\Psi^{(\varkappa)}V \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \Psi^{(\varkappa)}g \mid g \in V \right\}.$$

- 2) Множество форм $\overline{\mathbb{V}}^{(\varkappa)} \subset \mathbb{V}^{(\varkappa)}$:

$$\overline{\mathbb{V}}^{(\varkappa)} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \Psi^{(\varkappa)}V \mid V \in \overline{\mathbb{V}} \right\}.$$

- 3) Вероятностные пространства $(\mathbb{V}^{(\varkappa)}, \mathfrak{A}^{(\varkappa)}, \text{Pr}_i^{(\varkappa)})$, $i = 1, \dots, N$, где

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^{(\varkappa)} &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \Psi^{(\varkappa)}A \mid A \in \mathfrak{A} \right\}, \\ \Psi^{(\varkappa)}A &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \Psi^{(\varkappa)}V \mid V \in A \right\}, \quad A \in \mathfrak{A}, \end{aligned}$$

а вероятности $\text{Pr}_i^{(\varkappa)}$ определены на σ -алгебре $\mathfrak{A}^{(\varkappa)}$ так, что

$$\text{Pr}_i^{(\varkappa)}(\Psi^{(\varkappa)}A) = \text{Pr}_i(A), \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Пусть $\mu^{(\varkappa)}$ — мера Лебега в пространстве $\mathcal{R}^{(\varkappa)}$, и $\nu^{(\varkappa)}$ — случайный элемент пространства $\mathcal{R}^{(\varkappa)}$ такой, что случайные величины $(\nu^{(\varkappa)}, e_i^{(\varkappa)})_{(\varkappa)}$, $i = 1, \dots, \varkappa n$, абсолютно непрерывны относительно меры $\mu^{(\varkappa)}$. Обозначим $\text{pr}_{\nu^{(\varkappa)}}^{(\varkappa)}(\cdot)$ плотность распределения случайного элемента $\nu^{(\varkappa)}$ относительно меры $\mu^{(\varkappa)}$.

Обозначим $\bar{\Lambda}^{(\varkappa)}$ следующее множество отображений $\mathbb{V}^{(\varkappa)}$ на $\mathcal{R}^{(\varkappa)}$:

$$\bar{\Lambda}^{(\varkappa)} = \left\{ \lambda : \mathbb{V}^{(\varkappa)} \rightarrow \mathcal{R}^{(\varkappa)} \mid \lambda_V \in V \right\},$$

а $\Lambda^{(\varkappa)}$ — следующее подмножество множества $\bar{\Lambda}^{(\varkappa)}$:

$$\Lambda^{(\varkappa)} = \left\{ \lambda \in \bar{\Lambda}^{(\varkappa)} : \forall V \in \bar{\mathbb{V}}^{(\varkappa)} \min_{V' \in \bar{\mathbb{V}}^{(\varkappa)} \setminus \{V\}} \left\| \left(I - \Pi_{V'}^{(\varkappa)} \right) \lambda_V \right\|_{(\varkappa)}^2 \geq \varkappa^{7/8} \varepsilon \right\}, \quad (9)$$

где $\varepsilon > 0$ — положительная константа, $\Pi_{V'}^{(\varkappa)} : \mathcal{R}^{(\varkappa)} \rightarrow \mathcal{R}^{(\varkappa)}$ — проектор на форму V' , $I : \mathcal{R}^{(\varkappa)} \rightarrow \mathcal{R}^{(\varkappa)}$ — тождественный оператор.

Введём плотности распределения вероятностей $\text{pr}_i^{(\varkappa)}(\cdot \mid \lambda)$, $i = 1, \dots, N$:

$$\text{pr}_i^{(\varkappa)}(g \mid \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{V}^{(\varkappa)}} \text{pr}_\nu^{(\varkappa)}(g - \lambda_V) d\text{Pr}_i^{(\varkappa)}(V), \quad g \in \mathcal{R}^{(\varkappa)}, \quad \lambda \in \Lambda^{(\varkappa)},$$

и определим гипотезы $H_i^{(\varkappa)}$, $i = 1, \dots, N$, следующим образом:

$$H_i^{(\varkappa)} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \text{pr}_i^{(\varkappa)}(\cdot \mid \lambda) \mid \lambda \in \Lambda^{(\varkappa)} \right\}$$

Гипотеза $H_i^{(\varkappa)}$ является математической моделью утверждения, состоящего в том, что предъявляемое изображение $g \in \mathcal{R}^{(\varkappa)}$ регистрируется по схеме

$$g = \lambda_V + \nu^{(\varkappa)}, \quad \lambda \in \Lambda^{(\varkappa)},$$

где форма V случайным образом выбирается из $\mathbb{V}^{(\varkappa)}$ в результате стохастического эксперимента, моделью которого является вероятностное пространство $(\mathbb{V}^{(\varkappa)}, \mathfrak{A}^{(\varkappa)}, \text{Pr}_i^{(\varkappa)})$.

Обозначим $\mathbb{I}^{(\varkappa)}$ множество всех векторнозначных функций $\pi^{(\varkappa)}(\cdot) = (\pi_1^{(\varkappa)}(\cdot), \dots, \pi_N^{(\varkappa)}(\cdot))$, определённых на $\mathcal{R}^{(\varkappa)}$, измеримых относительно статистической структуры $\{(\mathbb{V}^{(\varkappa)}, \mathfrak{A}^{(\varkappa)}, \text{Pr}_i^{(\varkappa)}), i = 1, \dots, N\}$ и таких, что

$$\begin{aligned} \pi_i^{(\varkappa)}(g) &\geq 0, \quad i = 1, \dots, N \\ \sum_{i=1}^N \pi_i^{(\varkappa)}(g) &= 1 \end{aligned} \quad g \in \mathcal{R}^{(\varkappa)}$$

Всякую функцию $\pi^{(\varkappa)}(\cdot) \in \mathbf{\Pi}^{(\varkappa)}$ будем называть рандомизированным критерием.

Определим функции правдоподобия аналогично тому, как это сделано в пункте 3:

$$L_i^{(\varkappa)}(g) = \sup_{\lambda \in \bar{\Lambda}^{(\varkappa)}} \text{pr}_i^{(\varkappa)}(g | \lambda), \quad g \in \mathcal{R}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Критерию отношения правдоподобия, определённом в пункте 3, для $q \in \mathbb{Q}$ соответствует любой рандомизированный критерий $\pi^{(\varkappa)} \in \mathbf{\Pi}^{(\varkappa)}$, удовлетворяющий условию:

$$\sum_{i \in I_q^{(\varkappa)}(g)} \pi_i^{(\varkappa)}(g) = 1, \quad (10)$$

где

$$I_q^{(\varkappa)}(g) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ i \in \{1, \dots, N\} : q_i L_i^{(\varkappa)}(g) = \max_{j=1, \dots, N} q_j L_j^{(\varkappa)}(g) \right\}. \quad (11)$$

Множество всех таких критериев обозначим $\widehat{\mathbf{\Pi}}_q^{(\varkappa)}$, $q \in \mathbb{Q}$.

Определим ошибку, сопутствующую критерию $\pi^{(\varkappa)}(\cdot) \in \mathbf{\Pi}^{(\varkappa)}$, следующим образом:

$$\alpha^{(\varkappa)}(\pi^{(\varkappa)}) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i=1, \dots, N} \sup_{\lambda \in \Lambda^{(\varkappa)}} \alpha_i^{(\varkappa)}(\pi^{(\varkappa)} | \lambda), \quad (12)$$

где

$$\alpha_i^{(\varkappa)}(\pi^{(\varkappa)} | \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \int_{\mathcal{R}^{(\varkappa)}} \pi^{(\varkappa)}(g) \text{pr}_i^{(\varkappa)}(g | \lambda) d\mu^{(\varkappa)}(g), \quad g \in \mathcal{R}^{(\varkappa)}, \quad \lambda \in \Lambda^{(\varkappa)}. \quad (13)$$

Ошибка (12) представляет собой максимально возможную вероятность ошибочных решений в многоальтернативной задаче проверки статистических гипотез с гипотезами $H_i^{(\varkappa)}$, $i = 1, \dots, N$, в случае использования для принятия решений рандомизированного критерия $\pi^{(\varkappa)}(\cdot)$.

Оптимальным будем считать критерий $\pi_*^{(\varkappa)} \in \mathbb{I}^{(\varkappa)}$, для которого ошибка (12) минимальна, то есть:

$$\alpha^{(\varkappa)}\left(\pi_*^{(\varkappa)}\right) = \min_{\pi^{(\varkappa)} \in \mathbb{I}^{(\varkappa)}} \alpha^{(\varkappa)}\left(\pi^{(\varkappa)}\right).$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (6), (7), (8). Пусть случайные величины $(\nu^{(\varkappa)}, e_i^{(\varkappa)})$, $\varkappa = 1, 2, \dots$, $i = 1, \dots, \varkappa n$, одинаково распределены, имеют нулевое математическое ожидание и дисперсию σ^2 . Пусть также плотности $\text{pr}_\nu^{(\varkappa)}(\cdot)$ распределения вероятностей случайных элементов $\nu^{(\varkappa)}$, $\varkappa = 1, 2, \dots$, имеют вид

$$\text{pr}_\nu^{(\varkappa)}(g) = f_\nu^{(\varkappa)}\left(\|g\|_{(\varkappa)}^2\right), \quad g \in \mathcal{R}^{(\varkappa)}, \quad (14)$$

причём функции $f_\nu^{(\varkappa)}(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, являются монотонно невозрастающими.

Тогда найдутся такие $\bar{q} \in \mathbb{Q}$ и $\hat{\pi}_{\bar{q}}^{(\varkappa)} \in \hat{\mathbb{I}}_{\bar{q}}^{(\varkappa)}$, $\varkappa = 1, 2, \dots$, что

$$\left| \alpha^{(\varkappa)}\left(\pi_*^{(\varkappa)}\right) - \alpha^{(\varkappa)}\left(\hat{\pi}_{\bar{q}}^{(\varkappa)}\right) \right| \xrightarrow{\varkappa \rightarrow \infty} 0.$$

Доказательство. Обозначим $\text{Pr}_\nu^{(\varkappa)}$ вероятность, определённую на σ -алгебре борелевских подмножеств пространства $\mathcal{R}^{(\varkappa)}$, с плотностью распределения, равной $\text{pr}_\nu^{(\varkappa)}(\cdot)$. В соответствии с неравенством Чебышёва

$$\begin{aligned} \text{Pr}_\nu^{(\varkappa)}\left(\left\{\left\|\nu^{(\varkappa)}\right\|_{(\varkappa)}^2 \geq \varkappa^{3/4}\varepsilon\right\}\right) &\leq \frac{\mathbf{E} \sum_{i=1}^{\varkappa n} \left(\nu_i^{(\varkappa)}\right)^2}{\varkappa^{3/2}\varepsilon^2} = \\ &= \frac{\varkappa n \sigma^2}{\varkappa^{3/2}\varepsilon^2} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \frac{n \sigma^2}{\varepsilon^2}, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (15)$$

где символ \mathbf{E} означает математическое ожидание. Обозначим

$$\begin{aligned} \beta_i^{(\varkappa)}\left(\pi^{(\varkappa)} \mid \lambda.\right) &\stackrel{\text{def}}{=} 1 - \alpha_i^{(\varkappa)}\left(\pi^{(\varkappa)} \mid \lambda.\right), \\ \pi^{(\varkappa)} &\in \mathbb{I}^{(\varkappa)}, \quad \lambda. \in \Lambda^{(\varkappa)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad \varkappa = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

В силу (13)

$$\beta_i^{(\varkappa)} \left(\pi^{(\varkappa)} \mid \lambda. \right) = \int_{\mathcal{R}^{(\varkappa)}} \pi^{(\varkappa)}(g) \text{Pr}_i^{(\varkappa)}(g \mid \lambda.) d\mu^{(\varkappa)}(g),$$

и с учётом (6), (7), (14), (15)

$$\begin{aligned} & \beta_i^{(\varkappa)} \left(\pi^{(\varkappa)} \mid \lambda. \right) = \\ & = \sum_{V \in \overline{\mathbb{V}}^{(\varkappa)}} \text{Pr}_i^{(\varkappa)}(\{V\}) \int_{O_{\lambda_V}^{(\varkappa, \varepsilon)}} \pi^{(\varkappa)}(g) f_V^{(\varkappa)} \left(\|g - \lambda_V\|_{(\varkappa)}^2 \right) d\mu^{(\varkappa)}(g) + \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \frac{n\sigma^2}{\varepsilon^2} \delta_1^{(\varkappa)}, \end{aligned}$$

где $O_{\lambda_V}^{(\varkappa, \varepsilon)} \subset \mathcal{R}^{(\varkappa)}$ — замкнутый шар радиуса $\sqrt{\varkappa^{3/4}\varepsilon}$ с центром λ_V , и

$$0 \leq \delta_1^{(\varkappa)} \leq 1, \quad \varkappa = 1, 2, \dots$$

Согласно (9) найдётся такое натуральное число \varkappa_1 , что для любого $\varkappa > \varkappa_1$ и $\lambda. \in \Lambda^{(\varkappa)}$ шары $O_{\lambda_V}^{(\varkappa, \varepsilon)}$, $V \in \overline{\mathbb{V}}^{(\varkappa)}$, не пересекаются. В связи с этим решением задачи

$$\sum_{V \in \overline{\mathbb{V}}^{(\varkappa)}} \sum_{i=1}^N q_i \text{Pr}_i^{(\varkappa)}(\{V\}) \int_{O_{\lambda_V}^{(\varkappa, \varepsilon)}} \pi_i^{(\varkappa)}(g) f_V^{(\varkappa)} \left(\|g - \lambda_V\|_{(\varkappa)}^2 \right) d\mu^{(\varkappa)}(g) \sim \max_{\pi^{(\varkappa)} \in \mathbb{III}^{(\varkappa)}} \dots$$

при $\varkappa > \varkappa_1$ является любой рандомизированный критерий $\tilde{\pi}^{(\varkappa)} \in \mathbb{III}^{(\varkappa)}$, сохраняющий своё значение в пределах каждого шара $O_{\lambda_V}^{(\varkappa, \varepsilon)}$, $V \in \overline{\mathbb{V}}^{(\varkappa)}$, и удовлетворяющий условию

$$\sum_{i \in \tilde{I}_{(q, V)}^{(\varkappa)}} \tilde{\pi}_i^{(\varkappa)}(g) = 1, \quad g \in O_{\lambda_V}^{(\varkappa, \varepsilon)},$$

где

$$\tilde{I}_{(q, V)}^{(\varkappa)} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ i \in \{1, \dots, N\} : q_i \text{Pr}_i^{(\varkappa)}(\{V\}) = \max_{j=1, \dots, N} q_j \text{Pr}_j^{(\varkappa)}(\{V\}) \right\}.$$

Множество всех таких критериев обозначим $\tilde{\mathbb{I}}_{(q,\lambda)}^{(\varkappa)}$.

Так как при $\varkappa > \varkappa_1$ шары $O_{\lambda_V}^{(\varkappa,\varepsilon)}$, $V \in \bar{\mathbb{V}}^{(\varkappa)}$, не пересекаются, то для любого $\lambda \in \Lambda^{(\varkappa)}$ найдутся такие $\bar{q} \in \mathbb{Q}$ (не зависящее от \varkappa и от $\lambda \in \Lambda^{(\varkappa)}$) и $\tilde{\pi}_\lambda^{(\varkappa)} \in \tilde{\mathbb{I}}_{(\bar{q},\lambda)}^{(\varkappa)}$ (см. [3]), что

$$\left| \min_{i=1,\dots,N} \beta_i^{(\varkappa)} \left(\pi_\lambda^{(\varkappa)} \mid \lambda \right) - \min_{i=1,\dots,N} \beta_i^{(\varkappa)} \left(\tilde{\pi}_\lambda^{(\varkappa)} \mid \lambda \right) \right| = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \frac{n\sigma^2}{\varepsilon^2} \delta_1^{(\varkappa)}, \quad (16)$$

где $\pi_\lambda^{(\varkappa)} \in \mathbb{I}^{(\varkappa)}$ — решение максиминной задачи

$$\min_{i=1,\dots,N} \beta_i^{(\varkappa)} \left(\pi^{(\varkappa)} \mid \lambda \right) \sim \max_{\pi^{(\varkappa)} \in \mathbb{I}^{(\varkappa)}} . \quad (17)$$

Рассмотрим множество $\hat{\mathbb{I}}_{\bar{q}}^{(\varkappa)}$ критериев отношения правдоподобия, соответствующих $\bar{q} \in \mathbb{Q}$. Каждый такой критерий удовлетворяет условиям (10), (11) при $q = \bar{q}$. Так как по условию теоремы функции $f_\nu^{(\varkappa)}(\cdot)$ монотонно не возрастают, то

$$\begin{aligned} L_i^{(\varkappa)}(g) &= \sup_{\lambda \in \bar{\Lambda}^{(\varkappa)}} \text{pr}_i^{(\varkappa)}(g \mid \lambda) = \\ &= \sum_{V \in \bar{\mathbb{V}}^{(\varkappa)}} \text{Pr}_i^{(\varkappa)}(\{V\}) f_\nu^{(\varkappa)} \left(\left\| g - \Pi_V^{(\varkappa)} g \right\|_{(\varkappa)}^2 \right), \quad g \in \mathcal{R}^{(\varkappa)}. \end{aligned}$$

При этом в силу (9) найдётся такое натуральное число \varkappa_2 , что при $\varkappa > \varkappa_2$

$$\begin{aligned} \Pi_V^{(\varkappa)} g &\in O_{\lambda_V}^{(\varkappa,\varepsilon)} \cap V, \quad V \in \bar{\mathbb{V}}^{(\varkappa)}, \\ \Pi_V^{(\varkappa)} g &\notin O_{\lambda_{V'}}^{(\varkappa,\varepsilon)} \cup V', \quad V, V' \in \bar{\mathbb{V}}^{(\varkappa)}, \quad V \neq V', \end{aligned}$$

Учитывая также, что

$$\int_{O_0^{(\varkappa,\varepsilon)}} f_\nu^{(\varkappa)} \left(\|g\|_{(\varkappa)}^2 \right) d\mu^{(\varkappa)}(g) \xrightarrow{\varkappa \rightarrow \infty} 1,$$

где $O_0^{(\varkappa, \varepsilon)}$ — шар радиуса $\sqrt{\varkappa^{3/4}}\varepsilon$ с центром в нуле, получаем:

$$L_i^{(\varkappa)}(g) = \left(\Pr_i^{(\varkappa)}(\{V\}) + \delta_2^{(\varkappa)}(g, V) \right) f_\nu^{(\varkappa)} \left(\left\| g - \Pi_V^{(\varkappa)} g \right\|_{(\varkappa)}^2 \right),$$

$$g \in O_{\lambda_V}^{(\varkappa, \varepsilon)}, \quad \lambda. \in \Lambda^{(\varkappa)}, \quad V \in \overline{\mathbb{V}}^{(\varkappa)},$$

где функции $\delta_2^{(\varkappa)}(\cdot, V) : \mathcal{R}^{(\varkappa)} \rightarrow [0, \infty)$, таковы, что

$$\delta_2^{(\varkappa)}(g, V) \leq \delta_2^{(\varkappa)} \xrightarrow{\varkappa \rightarrow \infty} 0, \quad g \in O_{\lambda_V}^{(\varkappa, \varepsilon)}, \quad \lambda. \in \Lambda^{(\varkappa)}, \quad V \in \overline{\mathbb{V}}^{(\varkappa)}.$$

Таким образом, найдётся такое натуральное число \varkappa_3 , что для всякого $\varkappa > \varkappa_3$ и для всякого критерия $\tilde{\pi}^{(\varkappa)} \in \tilde{\mathbb{I}}_{(\bar{q}, \lambda.)}^{(\varkappa)}$ найдётся критерий $\hat{\pi}^{(\varkappa)} \in \hat{\mathbb{I}}_{\bar{q}}^{(\varkappa)}$, совпадающий с $\tilde{\pi}^{(\varkappa)}$ на шарах $O_{\lambda_V}^{(\varkappa, \varepsilon)}$, $\lambda. \in \Lambda^{(\varkappa)}$, $V \in \overline{\mathbb{V}}^{(\varkappa)}$, а значит (с учётом (15))

$$\left| \min_{i=1, \dots, N} \beta_i^{(\varkappa)} \left(\tilde{\pi}^{(\varkappa)} \mid \lambda. \right) - \min_{i=1, \dots, N} \beta_i^{(\varkappa)} \left(\hat{\pi}^{(\varkappa)} \mid \lambda. \right) \right| = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \frac{n\sigma^2}{\varepsilon^2} \delta_3^{(\varkappa)},$$

где

$$0 \leq \delta_3^{(\varkappa)} \leq 1, \quad \varkappa = \varkappa_3, \varkappa_3 + 1, \dots$$

Принимая во внимание (16), получаем, что для любого $\lambda. \in \Lambda^{(\varkappa)}$ найдутся такие $\bar{q} \in \mathbb{Q}$ (не зависящее от \varkappa и от $\lambda. \in \Lambda^{(\varkappa)}$) и $\hat{\pi}^{(\varkappa)} \in \hat{\mathbb{I}}_{\bar{q}}^{(\varkappa)}$, что при $\varkappa > \max(\varkappa_1, \varkappa_2)$

$$\left| \min_{i=1, \dots, N} \beta_i^{(\varkappa)} \left(\pi_{\lambda.}^{(\varkappa)} \mid \lambda. \right) - \min_{i=1, \dots, N} \beta_i^{(\varkappa)} \left(\hat{\pi}^{(\varkappa)} \mid \lambda. \right) \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \frac{n\sigma^2}{\varepsilon^2} \left(\delta_1^{(\varkappa)} + \delta_3^{(\varkappa)} \right),$$

где $\pi_{\lambda.}^{(\varkappa)} \in \mathbb{I}^{(\varkappa)}$ — критерий, являющийся решением максиминной задачи (17).

Учитывая, что критерии отношения правдоподобия из $\hat{\mathbb{I}}_{\bar{q}}^{(\varkappa)}$ не зависят от $\lambda. \in \Lambda^{(\varkappa)}$, получаем утверждение теоремы.

5. Задача поиска известного объекта на неизвестном фоне

Пусть, аналогично пунктам 2, 3, $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ — поле зрения, представляющее собой конечное подмножество координатной плоскости, и \mathcal{R} — n -мерное евклидово пространство изображений с ортонормированным базисом $\{e_1, \dots, e_n\}$. Пусть H — некоторое подмножество поля зрения \mathcal{X} , и \mathcal{T}_H — множество сдвиговых преобразований координатной плоскости, удовлетворяющих условию

$$\tau \circ H \subset \mathcal{X}, \quad \tau \in \mathcal{T}_H,$$

где

$$\tau \circ H \stackrel{\text{def}}{=} \{\tau(x) \mid x \in H\}.$$

Обозначим k количество точек, входящих в множество H , а сами эти точки обозначим x_{i_1}, \dots, x_{i_k} , то есть

$$H = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\} \subset \mathcal{X}, \quad k \leq n.$$

Обозначим $\tilde{\mathcal{R}}$ евклидово пространство размерности k , и зафиксируем в $\tilde{\mathcal{R}}$ некоторый ортонормированный базис $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_k\}$.

Для каждого преобразования $\tau \in \mathcal{T}_H$ и изображения $f \in \mathcal{R}$ определим множество $V_f^{(\tau)} \subset \tilde{\mathcal{R}}$ как

$$V_f^{(\tau)} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{j=1}^k \gamma \circ f(\tau(x_{i_j})) \tilde{e}_j \mid \gamma \in \mathbb{G} \right\}.$$

Множество всех таких множеств обозначим \mathbb{V}_τ , то есть

$$\mathbb{V}_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ V_f^{(\tau)} \mid f \in \mathcal{R} \right\}.$$

Формально (в соответствии с определением 1) множества $V_f^{(\tau)}$, $\tau \in \mathcal{T}_H$, $f \in \mathcal{R}$, не являются формами. Однако закрепим за ними такое название, так как каждое из них несёт информацию о форме фрагмента изображения $f \in \mathcal{R}$, соответствующего подмножеству $\tau \circ H$ поля зрения \mathcal{X} .

Пусть полугруппа \mathbb{G} такова, что $\mathbb{V}_{\tau_1} = \mathbb{V}_{\tau_2}$ для любых $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}_H$, и всякая форма $V \in \tilde{\mathbb{V}}$ является подпространством в $\tilde{\mathcal{R}}$, содержащим подпространство V_0 , определённое как

$$V_0 = \left\{ c \sum_{j=1}^k \tilde{e}_j \mid c \in (-\infty, \infty) \right\}.$$

Введём обозначение $\tilde{\mathbb{V}} = \mathbb{V}_{\tau}, \tau \in \mathcal{T}_H$. Обозначим $\tilde{\mathfrak{A}}$ некоторую σ -алгебру подмножеств множества $\tilde{\mathbb{V}}$.

Пусть задана случайная форма $(\tilde{\mathbb{V}}, \tilde{\mathfrak{A}}, \text{Pr})$ изображений искомого объекта. Пусть предъявляемое изображение $g \in \mathcal{R}$ регистрируется по схеме

$$g = \lambda_{\tau_*} + \nu,$$

где $\lambda_{\tau_*} \in \mathcal{R}$ — изображение, удовлетворяющее условию $\lambda_{\tau_*}(x) = (\lambda, \tilde{e}_j)$ при $x = \tau_*(x_{i_j}) \in \tau_* \circ H$, $\lambda \in \tilde{\mathcal{R}}$ — представитель случайной формы $(\tilde{\mathbb{V}}, \tilde{\mathfrak{A}}, \text{Pr})$, ν — случайный элемент пространства \mathcal{R} , координаты (ν, e_i) , $i = 1, \dots, n$, которого независимы и имеют нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией σ^2 , и $\tau_* \in \mathcal{T}_H$.

Требуется по предъявленному изображению g определить преобразование $\tau_* \in \mathcal{T}_H$, то есть, по сути, определить положение искомого объекта на поле зрения \mathcal{X} .

Для каждого $\tau \in \mathcal{T}_H$ определим изображение $g_{\tau} \in \tilde{\mathcal{R}}$ следующим образом:

$$g_{\tau} = \sum_{j=1}^k g(\tau^{-1}(x_{i_j})) \tilde{e}_j, \quad (18)$$

и рассмотрим задачу проверки гипотезы, состоящей в том, что изображение g_{τ} регистрируется по схеме

$$g_{\tau} = \lambda + \nu_{\tau}, \quad (19)$$

где $\lambda \in \mathcal{R}$ — изображение-представитель случайной формы $(\tilde{\mathbb{V}}, \tilde{\mathfrak{A}}, \text{Pr})$, против альтернативы, состоящей в том, что изображение g_{τ} регистрируется по схеме

$$g_{\tau} = \vartheta + \nu_{\tau}, \quad (20)$$

где $\vartheta \in \mathcal{R}$ — изображение, не зависящее от случайной формы $(\tilde{\mathbb{V}}, \tilde{\mathfrak{A}}, \text{Pr})$. В (19), (20) ν_τ — это случайный элемент пространства $\tilde{\mathcal{R}}$, проекции (ν_τ, \tilde{e}_j) , $j = 1, \dots, k$, которого независимы и имеют нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией σ^2 .

Обозначим $\bar{\Lambda}$ множество всех отображений $\lambda : \tilde{\mathbb{V}} \rightarrow \tilde{\mathcal{R}}$, ставящих в соответствие каждой форме $V \in \tilde{\mathbb{V}}$ изображение $\lambda_V \in V$, и $\bar{\Theta}$ множество всех отображений $\vartheta : \tilde{\mathbb{V}} \rightarrow \tilde{\mathcal{R}}$, ставящих в соответствие каждой форме $V \in \tilde{\mathbb{V}}$ изображение $\vartheta_V \in V^\perp \oplus V_0$, то есть изображение, не зависящее от формы V .

При верной гипотезе плотность распределения изображения $g_\tau \in \tilde{\mathcal{R}}$ равна

$$\text{pr}_1(g_\tau | \lambda) = \int_{\tilde{\mathbb{V}}} f_\nu \left(\|g_\tau - \lambda_V\|^2 \right) d\text{Pr}(V), \quad g_\tau \in \mathcal{R}, \quad \lambda \in \bar{\Lambda},$$

а при верной альтернативе плотность распределения изображения $g_\tau \in \tilde{\mathcal{R}}$ равна

$$\text{pr}_2(g_\tau | \vartheta) = \int_{\tilde{\mathbb{V}}} f_\nu \left(\|g_\tau - \vartheta_V\|^2 \right) d\text{Pr}(V), \quad g_\tau \in \mathcal{R}, \quad \vartheta \in \bar{\Theta},$$

где $f_\nu \left(\|\cdot\|^2 \right) : \tilde{\mathcal{R}} \rightarrow [0, \infty)$ — плотность k -мерного нормального распределения с одинаково распределёнными независимыми координатами (в базисе $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_k\}$).

Определим функцию правдоподобия $L_1(\cdot) : \tilde{\mathcal{R}} \rightarrow (-\infty, \infty)$, соответствующую гипотезе:

$$L_1(g_\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\lambda \in \bar{\Lambda}} \text{pr}_1(g_\tau | \lambda) = \int_{\tilde{\mathbb{V}}} f_\nu \left(\|(I - \Pi_V) g_\tau\|^2 \right) d\text{Pr}(V), \quad g_\tau \in \mathcal{R}, \quad (21)$$

и функцию правдоподобия $L_2(\cdot) : \tilde{\mathcal{R}} \rightarrow (-\infty, \infty)$, соответствующую альтернативе:

$$L_2(g_\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\vartheta \in \bar{\Theta}} \text{pr}_2(g_\tau | \vartheta) = \int_{\tilde{\mathbb{V}}} f_\nu \left(\|(\Pi_V - E) g_\tau\|^2 \right) d\text{Pr}(V), \quad g_\tau \in \mathcal{R}, \quad (22)$$

где $I : \tilde{\mathcal{R}} \rightarrow \tilde{\mathcal{R}}$ — тождественный оператор, $\Pi_V : \tilde{\mathcal{R}} \rightarrow V$ — проектор на форму $V \in \tilde{\mathcal{V}}$, и $E : \tilde{\mathcal{R}} \rightarrow V_0$ — проектор на подпространство V_0 .

В соответствии с критерием отношения правдоподобия в описанной задаче проверки статистических гипотез решение в пользу гипотезы следует принимать в том случае, если

$$\frac{L_1(g_\tau)}{L_2(g_\tau)} > c,$$

и решение в пользу альтернативы следует принимать, если

$$\frac{L_1(g_\tau)}{L_2(g_\tau)} < c,$$

где c — некоторая положительная константа.

Таким образом значение отношения правдоподобия $L_1(g_\tau)/L_2(g_\tau)$ выражает, в некотором смысле, «достоверность» сформулированной гипотезы (при сформулированной конкурирующей альтернативе). В связи с этим в исходной задаче поиска объекта, заданного случайной формой $(\tilde{\mathcal{V}}, \tilde{\mathcal{A}}, \text{Pr})$, на неизвестном фоне решение «целесообразно» принимать в пользу преобразования $\hat{\tau} \in \mathcal{T}_H$, для которого

$$\frac{L_1(g_{\hat{\tau}})}{L_2(g_{\hat{\tau}})} = \max_{\tau \in \mathcal{T}_H} \frac{L_1(g_\tau)}{L_2(g_\tau)}.$$

6. Вычислительный эксперимент

Обозначим Φ класс всех вещественных функций $F(\cdot) : (-\infty, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$. Каждой функции $F(\cdot) \in \Phi$ поставим в соответствие преобразование $\gamma : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ следующим образом:

$$\gamma \circ f = \sum_{i=1}^n F((f, e_i)) e_i, \quad f \in \mathcal{R}. \quad (23)$$

В проведённых вычислительных экспериментах полугруппа \mathbb{G} представляла собой полугруппу всех преобразований γ , определённых согласно (23).

Заметим, что для такой полугруппы \mathbb{G} форма V_f любого изображения $f \in \mathcal{R}$ является линейным подпространством в пространстве

изображений \mathcal{R} . При этом согласно определению 1 формы изображений $f_1 \in \mathcal{R}$ и $f_2 \in \mathcal{R}$ совпадают, если и только если найдётся такое обратимое преобразование яркостей, которое превратит f_1 в f_2 , то есть если и только если существует такая обратимая функция $F(\cdot) \in \Phi$, что $(f_2, e_i) = F((f_1, e_i))$, $i = 1, \dots, n$. То есть в рассматриваемом случае форма изображения, понимаемая согласно определению 1, несёт информацию о геометрической форме изображённых объектов.

6.1. Классификация изображений

В проведённом вычислительном эксперименте решалась задача классификации изображений рукописных цифр «0», «1», ..., «9». Случайные формы, соответствующие рукописным цифрам, будем, для удобства, нумеровать, начиная с нуля: случайная форма $(\mathbb{V}, \mathfrak{A}, \text{Pr}_0)$ соответствует цифре «0», ..., случайная форма $(\mathbb{V}, \mathfrak{A}, \text{Pr}_9)$ соответствует цифре «9». Шум ν имел нормальное распределение $\mathcal{N}(0, I)$ с нулевым средним и тождественным ковариационным оператором.

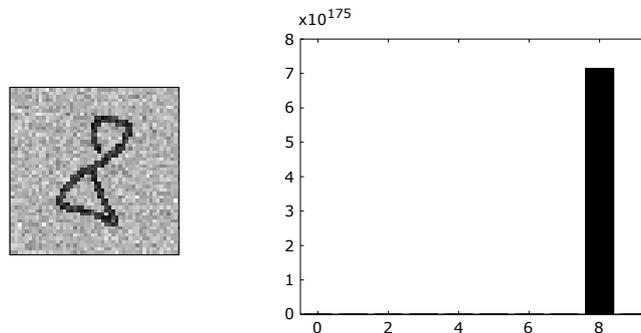


Рис. 1. Слева — предъявленное изображение $g \in \mathcal{R}$. Справа — график зависимости величины $\tilde{l}_i(g | c)$ от номера гипотезы $i = 0, \dots, 9$, $c = 3.5 \times 10^3$.

Для оценки значений $L_i(g)$, $i = 0, \dots, 9$, $g \in \mathcal{R}$, (см. (5)) из каждой случайной формы $(\mathbb{V}, \mathfrak{A}, \text{Pr}_i)$, $i = 0, \dots, 9$, была набрана

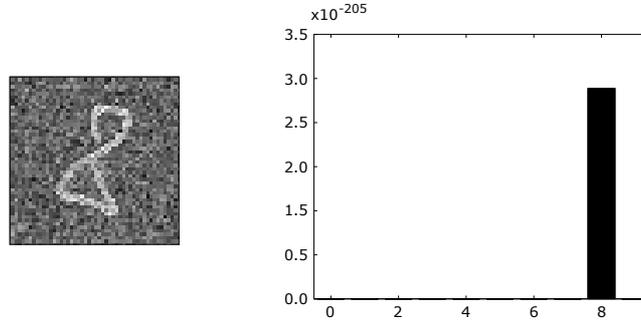


Рис. 2. Слева — предъявленное изображение $g \in \mathcal{R}$. Справа — график зависимости величины $\tilde{l}_i(g | c)$ от номера гипотезы $i = 0, \dots, 9$, $c = 1.3 \times 10^3$.

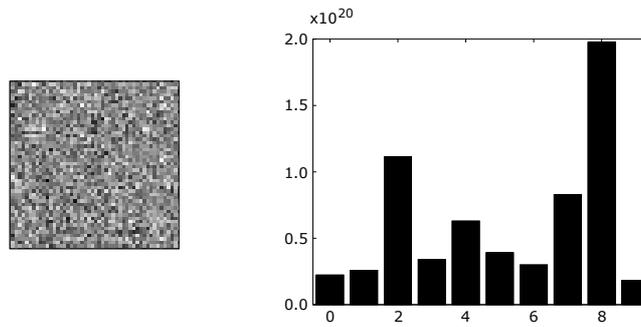


Рис. 3. Слева — предъявленное изображение $g \in \mathcal{R}$. Отношение «сигнал/шум» таково, что не позволяет разглядеть (глазами) представленную на изображении g цифру «8». Справа — график зависимости величины $\tilde{l}_i(g | c)$ от номера гипотезы $i = 0, \dots, 9$, $c = 1.3 \times 10^3$.

выборка объема 5000. Обозначим формы, входящие в эти выборки, $V_i^{(j)}$, $i = 0, \dots, 9$, $j = 1, \dots, 5000$:

$$\begin{aligned} \text{выборка из } (\mathbb{V}, \mathfrak{A}, \text{Pr}_0) : & V_0^{(1)}, \dots, V_0^{(5000)}, \\ & \dots \\ \text{выборка из } (\mathbb{V}, \mathfrak{A}, \text{Pr}_9) : & V_9^{(1)}, \dots, V_9^{(5000)}. \end{aligned}$$

При предъявлении изображения $g \in \mathcal{R}$ решение принималось в пользу той цифры, для которой максимально значение

$$\tilde{l}_i(g | c) = \frac{1}{5000} \sum_{j=1}^{5000} \exp \left(-\frac{\|g - \Pi_{V_i^{(j)}} g\|^2}{2\sigma^2} + c \right), \quad i = 0, \dots, 9, \quad (24)$$

где $c \in (-\infty, \infty)$ — некоторая константа. Величины $\tilde{l}_i(g | c)$ являются оценками (в некотором смысле) величин

$$(2\pi\sigma^2)^{n/2} \exp(c) L_i(g), \quad i = 0, \dots, 9. \quad (25)$$

Так как домножение величин $L_i(g)$ на $(2\pi\sigma^2)^{n/2} \exp(c)$ не меняет их упорядоченности, то описанный алгоритм принятия решений является приближённой (в некотором смысле) версией критерия отношения правдоподобия, соответствующего такому $q \in \mathbb{Q}$, что $q_0 = \dots = q_9$.

На рис. 1, 2, 3 представлены графики зависимости величин $\tilde{l}_i(g | c)$ от номера гипотезы $i = 0, \dots, 9$, для трёх различных изображений $g \in \mathcal{R}$ цифры «8». Рис. 1, 2 демонстрируют, что в ситуации, когда шум позволяет увидеть (глазами) на предъявляемом изображении $g \in \mathcal{R}$ цифру «8», величина $\tilde{l}_8(g | c)$ существенно (на несколько порядков) превосходит величины $\tilde{l}_i(g | c)$, $i = 0, \dots, 9$, $i \neq 8$. Причём это справедливо для изображений цифры «8», полученных при различных условиях регистрации: тёмная цифра на светлом фоне на рис. 1 и светлая цифра на тёмном фоне на рис. 2. Рис. 3 демонстрирует, что значения $\tilde{l}_i(g | c)$, $i = 0, \dots, 9$, становятся сопоставимыми друг с другом лишь при таком уровне шума, который не позволяет увидеть (глазами) на предъявленном изображении какую-либо цифру.

Поясним смысл умножения на $\exp(c)$ в (25). Математически такая операция не влияет на работу алгоритма, так как не меняет упорядоченности умножаемых на $\exp(c)$ величин. Однако на практике

значения $\frac{\|g - \Pi_{V_i^{(j)}} g\|^2}{2\sigma^2}$ оказываются настолько велики, что точности используемых в ЭВМ типов данных (например `double` в языке

C++) не хватает, чтобы отличать величины $\exp\left(-\frac{\|g - \Pi_{V_i^{(j)}} g\|^2}{2\sigma^2}\right)$ от нуля. Добавление константы c к показателю экспоненты делает (при должном выборе $c \in (-\infty, \infty)$) значения слагаемых в (24) отличными от нуля при вычислениях на ЭВМ.

6.2. Поиск известного объекта на неизвестном фоне

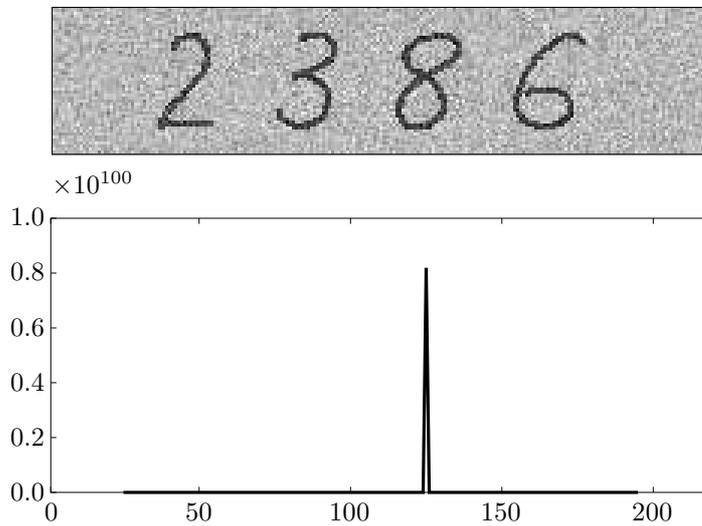


Рис. 4. Сверху — предъявленное изображение $g \in \mathcal{R}$. Снизу — график зависимости величины $\tilde{s}(g_{\tau(\Delta x)} \mid c_1, c_2)$ от параметра сдвига $\Delta x \in \Delta X$, $c_1 = 2 \times 10^3$, $c_2 = 1$.

В проведённом вычислительном эксперименте решалась задача поиска рукописной цифры «8» на предъявленном изображении. Шум ν имел нормальное распределение $\mathcal{N}(0, I)$ с нулевым средним и тождественным ковариационным оператором. Поле зрения \mathcal{X} имело размер 50×220 точек (пикселей), и подмножество $H \subset \mathcal{X}$ имело размер 50×50 пикселей.

Как и в пункте 6.1, для оценки значений $L_1(g)$ и $L_2(g)$, $g \in \mathcal{R}$ (см. (21), (22)), из случайной формы $(\tilde{\mathbb{V}}, \tilde{\mathfrak{A}}, \text{Pr}_{\langle 8 \rangle})$, соответствующей рукописной цифре «8», была набрана выборка объёма 5000. Обозначим формы, входящие в эту выборку, V_j , $j = 1, \dots, 5000$.

При предъявлении изображения $g \in \mathcal{R}$ решение принималось в пользу преобразования $\hat{\tau} \in \mathcal{T}_H$, для которого максимально значение

$$\tilde{s}(g_\tau | c_1, c_2) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{l}_1(g_\tau | c_1)}{\tilde{l}_2(g_\tau | c_2)} = \frac{\sum_{j=1}^{5000} \exp\left(-\frac{\|g_\tau - \Pi_{V_j} g_\tau\|^2}{2\sigma^2} + c_1\right)}{\sum_{j=1}^{5000} \exp\left(-\frac{\|\Pi_{V_j} g_\tau - E g_\tau\|^2}{2\sigma^2} + c_2\right)}, \quad \tau \in \mathcal{T}_H,$$

где изображения $g_\tau \in \tilde{\mathcal{R}}$ определены в (18), и $c_1, c_2 \in (-\infty, \infty)$ — некоторые константы. Величины $\tilde{s}(g_\tau | c_1, c_2)$ являются оценками (в некотором смысле) величин

$$\exp(c_1 - c_2) \frac{L_1(g_\tau)}{L_2(g_\tau)}, \quad \tau \in \mathcal{T}_H,$$

поэтому алгоритм, максимизирующий $\tilde{s}(g_\tau | c_1, c_2)$, является приближённой версией алгоритма, максимизирующего $\frac{L_1(g_\tau)}{L_2(g_\tau)}$. Домножение на $\exp(c_1 - c_2)$ необходимо, чтобы избежать потери точности при вычислениях на ЭВМ (подробное объяснение дано в пункте 6.1).

Так как «высота» (в пикселях) поля зрения \mathcal{X} и «высота» множества H совпадают, то существует взаимно-однозначное соответствие между множеством преобразований \mathcal{T}_H и множеством $\Delta X = \{24.5, 25.5, \dots, 194.5\}$, определённое следующим правилом: каждому $\Delta x \in \Delta X$ соответствует такое преобразование $\tau(\Delta x) \in \mathcal{T}_H$, что положение (в пикселях) центра множества $\tau(\Delta x) \circ H$ относительно левого края поля зрения \mathcal{X} равно Δx .

На рис. 4 приведены предъявленное изображение $g \in \mathcal{R}$ и график зависимости величины $\tilde{s}(g_{\tau(\Delta x)} | c_1, c_2)$ от параметра сдвига $\Delta x \in \Delta X$. Как видно, $\tilde{s}(g_{\tau(\Delta x)} | c_1, c_2)$ имеет резкий максимум напротив изображения цифры «8».

В заключение автору приятно выразить благодарность научному руководителю проф. Ю. П. Пытьеву за поддержку и ценные советы в ходе научной работы по рассмотренной теме.

Список литературы

- [1] Пытьев Ю. П., Зубюк А. В. Случайная и нечёткая морфология (эмпирическое восстановление модели, идентификация) // Материалы IX международной конференции «Интеллектуальные системы и компьютерные науки», М.: Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 2006. Т. 1, ч. 2. — С. 222–225.
- [2] Пытьев Ю. П., Чуличков А. И. Методы морфологического анализа изображений. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
- [3] Боровков А. А. Математическая статистика. — Новосибирск: Наука, Издательство Института математики, 1997.