О континуальности множества специальных предполных классов во множестве автоматных отображений

А. А. Родин

В работе рассматриваются предполные классы, содержащие все о.-д. функции, в каждом состоянии которых реализуется функция из некоторого замкнутого класса D k-значной логики. Показано, что мощность множества таких предполных классов равна континууму для любого замкнутого $D \neq P_k$.

Ключевые слова: автоматные отбражения, предполный класс, k-значная логика.

1. Введение

Пусть $k \geqslant 2$, обозначим через P^k множество всех ограниченно-детерминированных функций (автоматных отображений), входные и выходные переменные которых определены на множестве бесконечных последовательностей, составленных из E_k, где $E_k = \{0, \ldots, k-1\}$.

Будем считать, что на множестве P^k определены операции суперпозиции и обратной связи. Пусть $M \subseteq P^k$. Замыкание множества $M \subset P^k$ относительно этих операций обозначим через $[M]$. Множество $M \subseteq P^k$ называется полным, если $[M] = P^k$.

Известно [1], что критерий полноты в P^k может быть сформулирован в терминах предполных классов. Множество $N \subset P^k$ называется предполным классом в P^k, если $[N] \neq P^k$, но для любой о.-д. функции $f \notin N$, $[N \cup \{f\}] = P^k$. Пусть $M \subseteq P^k$. Множество M является полным тогда и только тогда, когда M не содержится ни в одном из предполных в P^k классов.

Таким образом, число предполных классов является важной характеристикой эффективности этого критерия. В. Б. Кудрявцевым показано, что мощность множества предполных классов в P^k равна континууму [1]. Вместе с тем, интерес представляет задача о числе предполных классов, обладающих некоторыми наперед заданными свойствами [2]. Имеет место теорема, обобщающая один из результатов [3].

Пусть D — произвольный замкнутый класс в P_k (k-значная логика). Обозначим через P^k_D множество ограниченно-детерминированных функций, в каждом состоянии которых реализуется функция k-значной логики, принадлежащей D. Целью данной работы является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. *Для всякого $k \geqslant 2$ и для любого замкнутого множества $D \subset P_k$ существует континуум предполных классов в P^k, содержащих множество P^k_D.*

2. Основные определения

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — о.д. функция из P_k, задаваемая системой канонических уравнений:

$$\begin{gathered} q(1) = q_0, \\ q(t+1) = \varphi(x_1(t), \ldots, x_n(t), q(t)), \\ y(t) = \psi(x_1(t), \ldots, x_n(t), q(t)), \end{gathered}$$

где $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_p\}$ — множество ее состояний, а q_0 — ее начальное состояние. Функцию k-значной логики, реализуемую в состоянии q_i обозначим через F_{q_i}.

Пусть $t \geqslant 1$, E^t_k — множество слов длины t, составленных из E_k. Пусть $i, j \in \{0, 1, \ldots, p\}$. Будем считать, что состояние q_i t-достижимо из состояния q_j, если найдутся такие $a_1, a_2, \ldots, a_n \in E^t_k$, что $\varphi(a_1, \ldots, a_n, q_j) = q_i$.

Пусть D — некоторое замкнутое множество функций k-значной логики. Тогда множество всех о.-д. функций из P^k, таких что каждая из функций

$$F_{q_0}, F_{q_1}, \ldots, F_{q_i}$$

принадлежит множеству D, обозначим через P_D^k. Очевидно, что P_D^k — замкнутое множество в P^k.

Как известно, в P^k существует универсальная о.-д. функция $u(x_1, x_2)$, такая что $[\{u\}] = P^k$ [4]. Таким образом, в P^k существует конечная полная система. И поэтому любое множество о.-д. функций можно расширить до предполного класса.

3. Доказательство теоремы

Не ограничивая общности, будем считать, что D содержит тождественную функцию $x(x_1) = x_1$.

Пусть $p_1, p_2, \ldots$ — упорядоченная последовательность всех простых чисел, больших трех.

Пусть

$$L = \{m_1, m_2, \ldots\} - \tag{1}$$

последовательность чисел таких, что $m_i \in \{0, 1\}$ для любого $i \geqslant 1$.

Пусть о.-д. функция $h_{p_i}^{m_i}(x_1, x_2) = y$, такая что $y(t) = x_1(t)$, если $t = lp_i + m_i + 1$ для некоторого $l \geqslant 0$ и $y(t) = x_2(t)$ в противном случае. Пусть $u(x_1, x_2)$ — универсальная функция с двумя входами. Пусть $g_{p_i}^{m_i}(x_1, x_2) = h_{p_i}^{m_i}(x_1, u(x_1, x_2))$, где $u(x_1, x_2)$ — универсальная функция в P^k. Из построения функции $g_{p_i}^{m_i}$ ясно, что при $t = lp_i + m_i + 1$ выход функции равен $x_1(t)$. Исходя из последовательности L определим множество о.-д. функций $M_L = P_D^k \cup g_{p_i}^{m_i}(x_1, x_2)$, где объединение берется по всем $i \geqslant 1$. Покажем, что для любой последовательности L вида (1) замыкание множества M_L не совпадает с P^k. Пусть

$$N = \{g_{p_{i_1}}^{m_{i_1}}(x_1, x_2) = y_1, \ldots, g_{p_{i_s}}^{m_{i_s}}(x_1, x_2) = y_s\} -$$

произвольное конечное подмножество множества $M_L \setminus P_D^k$.

Покажем, что существует $t \geqslant 1$ такое, что $y_j(t+1) = x_1(t+1)$ для любого $j \in \{1, \dots, s\}$. Возможны два случая. Пусть $m_{i_1} = \dots = m_{i_s} = m$. Тогда

$$t = (p_{i_1} \dots p_{i_s}) + m.$$

Пусть теперь существует $j \in \{1, \dots, s\}$ такое, что $m_{i_1} \neq m_{i_j}$. Будем считать, что для некоторого $d, 1 \leqslant d \leqslant s-1$,

$$m_{i_1} = \dots = m_{i_d} = 0, \quad m_{i_{d+1}} = \dots = m_{i_s} = 1.$$

Тогда

$$t = (p_{i_1} \dots p_{i_d})^{(p_{i_{d+1}}-1)\dots(p_{i_{d+1}}-1)}.$$

Из малой теоремы Ферма следует, что по модулю любого из чисел $p_{i_{d+1}}, \dots, p_{i_s}$ t совпадает с единицей, и делится на любое из $p_{i_1}, \dots, p_{i_d}$. Таким образом, нетрудно видеть, что из начального состояния любой о.-д. функции, принадлежащей $N \cup P^k_D$, лишь такие состояния t-достижимы, в которых реализуются функции k-значной логики, принадлежащие D. Следовательно, этим свойством будет обладать и любая композиция этих функций. А поскольку в каждой композиции участвует лишь конечное число о.-д. функций, то в замыкании не может оказаться о.-д. функция, в каждом состоянии которой реализуется k-значная функция, не принадлежащая D. Поэтому $[M_L] \neq P^k$.

Рассмотрим объединение множеств M_L и $M_{L'}$ для любых отличных друг от друга последовательностей L и L'. Тогда пусть эти последовательности различаются в i-ом разряде. Это значит, что множеству $M_L \cup M_{L'}$ принадлежат функции $g^0_{p_i}(x_1, x_2)$ и $g^1_{p_i}(x_1, x_2)$. Нетрудно видеть, что $h^0_{p_i}(g^0_{p_i}(x_1, x_2), g^1_{p_i}(x_1, x_2)) = u(x_1, x_2)$. Функция $h^0_{p_i}(x_1, x_2)$ принадлежит P^k_D. Поэтому $[M_L \cup M_{L'}] = P^k$.

Как было отмечено выше, в функциональной системе P^k существует конечная полная система. Поэтому любой замкнутый класс в P^k расширяется до предполного. Пусть $\widetilde{M}_L$ и $\widetilde{M}_{L'}$ — предполные классы, содержащие M_L и $M_{L'}$ соответственно. Для любых отличных друг от друга последовательностей L и L' $[M_L \cup M_{L'}] = P^k$. Поэтому $\widetilde{M}_L \neq \widetilde{M}_{L'}$. Известно, что существует континуум последовательностей вида (1). Таким образом, мощность множества предполных классов, содержащих P^k_D не менее, чем континуум. Вместе с тем, мощность всевозможных подмножеств множества P^k также равна континууму. Таким образом, теорема 1 доказана.

Замечание 1. При доказательстве теоремы мы предположили, что множество k-значной логики D содержит тождественную функцию $x(x_1) = x_1$. Пусть это не так. Тогда рассмотрим $D' = [D \cup x]$. Понятно, что D' замкнуто, и $D' \neq P^k$, так как $D \neq P^k$. Далее очевидно, что $P^k_D \subset P^k_{D'}$. Поэтому, если докажем, что существует континуум предполных классов, содержащих $P^k_{D'}$, то P^k_D тоже будет содержаться в тех же самых классах. Следовательно, для множества D теорема тоже будет верна. Итак, без ограничения общности, можно считать, что $x \in D$.

Замечание 2. Если же будем рассматривать функциональную систему, в которой нет обратной связи, а есть только операция суперпозиции, ситуация будет несколько иная. Дело в том, что в системе суперпозиции нет универсальной функции. Тем не менее, утверждение, аналогичное Теореме, имеет место и в этом случае. Доказательство останется точно таким же, только вместо универсальной о.-д. функции $u(x_1, x_2)$ следует взять о.-д. функцию от двух переменных $u'(x_1, x_2)$ с одним состоянием, в котором реализуется какая-нибудь шефферова функция k-значной логики. Тогда $[P^k_{D'} \cup u'(x_1, x_2)] = P^k$. И, следовательно, любое множество, содержащее P^k_D можно расширить до предполного класса.

Автор выражает благодарность Буевичу В. А. за постановку задачи и научное руководство.

Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б. О мощности множеств предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами // Проблемы кибернетики. Вып. 13. М.: Наука, 1965.

[2] Марченков С. С. О классах Слупецкого для детерминированных функций // Дискретная математика. 1998. Т. 10, вып. 2.

[3] Буевич В. А. Критерий полноты систем, содержащих все одноместные ограниченно-детерминированные функции // Дискретная математика. 2000. Т. 12, вып. 4.

[4] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.