

Критерий сводимости задачи об опасной близости к задаче о прокалывании

Е. А. Снегова

В работе рассматривается задача о поиске движущихся объектов, которые могут столкнуться с движущимся объектом-запросом, где под столкновением понимается нахождение объектов в опасной близости. Приведен критерий сводимости данной задачи к одномерной задаче о прокалывании.

Ключевые слова: базы данных движущихся объектов, пространственно-временные базы данных, информационный граф, сложность.

1. Введение

Традиционно в системах управления базами данных предполагается, что каждый движущийся объект имеет свою собственную независимую скорость и собственное направление движения, то есть объекты движутся хаотично. В данной статье рассматриваются потоки движущихся объектов и конфликты между потоками.

Приведем пример приложения задачи об опасной близости.

Рассмотрим квадрат над аэропортом и два типа самолетов: самолеты одного типа (запросы) движутся с юга на север внутри квадрата, а самолеты другого типа (объекты) движутся с запада на восток также внутри квадрата. Каждый самолет, когда он появляется на границе квадрата, объявляет координаты появления и время своего появления. Задача об опасной близости заключается в перечислении для каждого нового самолета-запроса тех и только тех самолетов-объектов, которые будут в некоторый момент времени в процессе

своего движения на расстоянии не более, чем ρ от запроса по Манхэттену.

Расстояние ρ может быть интерпретировано следующим образом: рассмотрим самолет, представляющий из себя круг радиуса ρ в Манхэттенской метрике, как это показано на рис. 1. Задача об опасной близости заключается в том, чтобы для каждого самолета-запроса перечислить те и только те самолеты-объекты, которые будут пересекаться с запросом в процессе своего движения.

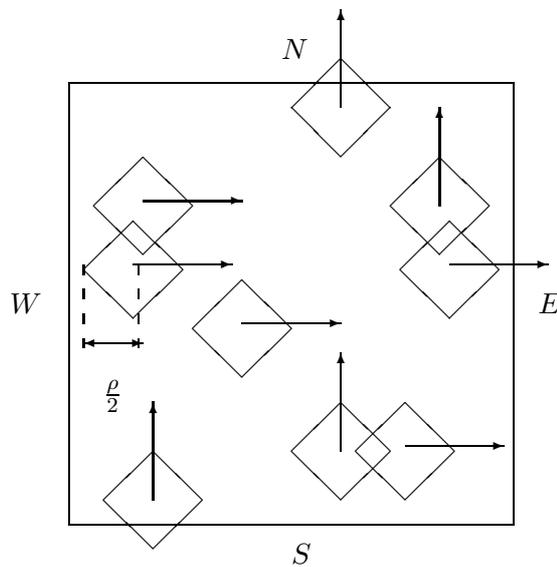


Рис. 1. Движение объектов и запросов в задаче об опасной близости.

В основной части этой статьи приводится формальная постановка задачи об опасной близости, формулируется и доказывается критерий сводимости данной задачи к одномерной задаче о прокалывании.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Э. Э. Гасанову за постановку задачи и помощь в работе.

2. Обзор литературы

Задача об опасной близости тесно связана с задачей поиска объекта, ближайшего к запросу. Рассмотрим существующие методы ре-

шения последней задачи и сравним их с решением задачи об опасной близости в том случае, когда она сводится к задаче одномерного интервального поиска.

В большей части методов решения задачи поиска объекта, ближайшего к запросу, используются структуры данных, основанные на конструкции R -дерева [1].

Первая группа методов относится к случаю статической базы данных, состоящей из неподвижных точек, и статического точечного запроса [2]. Идея этих методов заключается в многоступенчатой проверке данных, происходящей до тех пор, пока не достигается подходящий радиус. Например, Korn [2] и др. разработали алгоритм, состоящий из нескольких предварительных и одного финального этапа отбора.

Для движущихся объектов и статических запросов Roussopoulos и др. [3] разработали алгоритм, позволяющий получать ответ на запрос о положении объектов в пространстве. Структура данных для этого алгоритма основана на R^* -дереве [4] — модификации R -дерева. Cheung и Fu [5] упростили их алгоритм без потери в эффективности, а Venetis [6] и др. расширили его на случай непрерывно движущихся объектов.

В [7] Song и Roussopoulos предложили решение задачи нахождения k ближайших к запросу объектов. Большинство алгоритмов для случая непрерывного движения объектов основываются на повторных применениях алгоритмов для решения обычной задачи о нахождении ближайшего соседа, что приносит значительные издержки (см., например, [8]). В отличие от этого подхода, Tao и др. [9] разработали методы, которые решают данную задачу путем формирования единого запроса для всей базы данных.

Случай движущихся объектов и движущихся запросов — самый близкий к задаче об опасной близости. Gedik ввел понятие MobiEyes [10] — структуры, позволяющей в режиме реального времени определять текущее положение объектов.

Все методы, приведенные выше, основаны на структуре R -дерева или ее модификации, предназначенной для хранения двух- или трехмерных объектов. Данные методы полезны в случае хаотического движения объектов. Во всех работах нет аналитических оценок сложности, и авторы показывают эффективность их результатов с помо-

пью экспериментов. Но не трудно заметить, что в худшем случае оценки не более чем линейные от размера базы данных.

Случай предопределенного движения объектов рассмотрен в [11] Attalah'ом. Автор предложил алгоритмы для поиска самых близких к запросу и самых быстрых относительно запроса объектов и также алгоритмы для вычисления выпуклой оболочки движущихся точек. Для некоторых алгоритмов автор доказал линейные нижние оценки сложности.

В данной работе также рассматривается случай предопределенного движения объектов. Данные о законах движения объектов и запросов позволяют нам в каждом конкретном случае определить, может ли задача об опасной близости быть сведена к задаче одномерной задаче о прокалывании.

Решения одномерной задачи о прокалывании приведены в работах Lars Arge'a и др. [14] и P. Kanellakis'a и др. [15]. В обеих работах [14], [15] описаны алгоритмы решения имеющих логарифмическую сложность поиска без перечисления ответа, линейный объем памяти и логарифмическую сложность вставки/удаления с расчетом на одну операцию (amortized). Недостатком алгоритма из [15] является тот факт, что сложность перечисления ответа пропорциональна длине ответа, а не равна ей, в отличие от алгоритма, описанного в [14]. Кроме того, алгоритм [14] позволяет получить логарифмическую сложность вставки/удаления в худшем случае с помощью постоянной перестройки дерева базы данных и хранения нескольких копий базы.

Сложности упомянутых алгоритмов значительно меньше, чем оценки, полученные Attalah'ом [11].

3. Постановка задачи и формулировка результата

Пусть заданы две функции $f : [0, \tau_{\max}] \rightarrow [-\rho, 1 + \rho]$ и $f_q : [0, \tau_{\max}^q] \rightarrow [-\rho, 1 + \rho]$, называемые *законами движения объектов и объектов-запросов*, соответственно. Функции являются непрерывными и строго монотонными на всей области определения, и удовлетворяют условиям $f(0) = f_q(0) = -\rho$, $f(\tau_{\max}) = f_q(\tau_{\max}^q) = 1 + \rho$.

Считаем, что на плоскости имеется счетное множество объектов, движущихся таким образом, что их координаты в зависимости от времени задаются парой $(f(t - t_i), y_i)$, где $i \in \mathbb{N}$, $y_i \in [0, 1]$, а t_i образует строго возрастающую последовательность вещественных чисел. Аналогично, движение объекта-запроса задается парой $(x, f_q(t - t_q))$, где $x \in [0, 1]$, t_q — вещественное число.

Библиотекой $V(t_q)$ назовем множество объектов, находящихся в текущий момент времени t_q внутри прямоугольника $[-\rho, 1 + \rho] \times [0, 1]$, то есть

$$V(t_q) = \{(t_i, y_i) : t_q \in [t_i, t_i + \tau_{\max}], y_i \in [0, 1]\}.$$

Вместо $V(t_q)$ будем писать просто V , понимая под этим множество всех объектов, находящихся в текущий момент времени внутри квадрата. Через $|V|$ обозначим число объектов в этой библиотеке.

В задаче требуется для произвольного запроса перечислить все объекты из библиотеки, с которыми он в процессе своего движения будет находиться на расстоянии меньшем, чем ρ по Манхэттену, то есть *ответом на запрос* $q = (t_q, x)$ при библиотеке $V = V(t_q)$ и расстоянии опасной близости ρ является множество

$$J(\rho, q, V) = \{o_i \in V \mid \exists t : |f(t - t_i) - x| + |y_i - f_q(t - t_q)| \leq \rho\}.$$

Тройку (f, f_q, ρ) будем называть *задачей об опасной близости*.

Задачей о прокалывании назовем пару (\mathbb{R}, Z) , где библиотека Z есть конечное множество всех интервалов с концами из \mathbb{R} , а \mathbb{R} есть множество всех действительных чисел. Содержательно эта задача состоит в том, чтобы для произвольного запроса $p \in \mathbb{R}$ перечислить все те и только те отрезки из Z , которые содержат p .

Ответ на запрос $p \in \mathbb{R}$ при библиотеке Z в задаче о прокалывании есть множество $J(p, Z) = \{z \in Z : p \in z\}$.

Будем говорить, что задача об опасной близости (f, f_q, ρ) *сводится* с задаче о прокалывании, если существуют такие отображения $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, что для любой библиотеки $V = V(t_q)$, любого запроса $q = (t_q, x)$ и любого объекта $o \in V$ верно

$$o \in J(\rho, q, V) \Leftrightarrow [\varphi_1(o), \varphi_2(o)] \in J(\varphi(q), Z),$$

где $Z = \{[\varphi_1(o), \varphi_2(o)] : o \in V\}$.

Тройку $(\varphi, \varphi_1, \varphi_2)$ будем называть *функциями сведения*.

Аналогично критерию сводимости к задаче одномерного интервального поиска обозначим

$$Y_R = \{y \in [0, 1] : \exists x F_R(x, y) \leq 0\}, \quad (1)$$

$$Y_L = \{y \in [0, 1] : \exists x F_L(x, y) \leq 0\}, \quad (2)$$

$$X_L = \{x \in [0, 1] : \exists y F_L(x, y) \leq 0\}. \quad (3)$$

Теорема 1. *Задача об опасной близости (f, f_q, ρ) сводится к задаче о прокалывании тогда и только тогда, когда существуют функции $\psi, \psi_L, \psi_R : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что для любой пары (x, y) , для которой выполнено условие $F_L(x, y) \leq 0$, верно, что*

$$F_L(x, y) = \psi(x) + \psi_L(y), \quad (4)$$

а для любой пары (x, y) , такой, что $F_R(x, y) \leq 0$, верно, что

$$F_R(x, y) = \psi(x) + \psi_R(y). \quad (5)$$

При этом если выполнены условия (4) и (5) и

$$\psi^*(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{если } x \in X_L, \\ F_L(0, 1), & \text{если } x \notin X_L, \end{cases} \quad (6)$$

$$\psi_R^*(y) = \begin{cases} \psi_R(y), & \text{если } y \in Y_R, \\ F_R(0, 1), & \text{если } y \notin Y_R, \end{cases} \quad (7)$$

$$\psi_L^*(y) = \begin{cases} \psi_L(y), & \text{если } y \in Y_L, \\ F_L(0, 1), & \text{если } y \notin Y_L, \end{cases} \quad (8)$$

то функции сведения $(\varphi, \varphi_1, \varphi_2)$ имеют вид

$$\varphi(t_q, x) = t_q + \psi^*(x), \quad (9)$$

$$\varphi_1(t_i, y_i) = t_i - \psi_R^*(y_i), \quad (10)$$

$$\varphi_2(t_i, y_i) = t_i - \psi_L^*(y_i). \quad (11)$$

4. Доказательство основного результата

4.1. Свойства функций $F_R(x, y)$, $F_L(x, y)$

Перечислим некоторые свойства функций $F_L(x, y)$, $F_R(x, y)$.

Свойство 1. *Функции $F_R(x, y)$, $F_L(x, y)$ строго возрастают по y и убывают по x .*

Доказательство. Покажем, для примера, что $F_L(x, y)$ возрастает по y . Возьмем $y_1 < y_2$ и фиксируем некоторый ξ_2 , такой, что $\xi_2 \in \arg \min_{\xi \in [0, \rho]} [f_q^{-1}(y + \xi - \rho) - f^{-1}(x + \xi)]$. Тогда верна следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} F_L(x, y_2) &= f_q^{-1}(y_2 + \xi_2 - \rho) - f^{-1}(x + \xi_2) > \\ &> f_q^{-1}(y_1 + \xi_2 - \rho) - f^{-1}(x + \xi_2) \geq \min_{\xi \in [0, \rho]} [f_q^{-1}(y_1 + \xi - \rho) - f^{-1}(x + \xi)]. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что $F_L(x, y)$ возрастает по y .

Остальные случаи доказываются аналогично.

Свойство 1 доказано.

Свойство 2. *Функции $F_R(x, y)$, $F_L(x, y)$ непрерывны по y при фиксированном x и непрерывны по x при фиксированном y .*

Доказательство. Рассмотрим последовательность x_n , стремящуюся к x . Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{x_n \rightarrow x} F_L(x_n, y) &= \lim_{x_n \rightarrow x} \min_{\xi \in [0, \rho]} (f_q^{-1}(y + \xi - \rho) - f^{-1}(x_n + \xi)) = \\ &= \min_{\xi \in [0, \rho]} (f_q^{-1}(y + \xi - \rho) - f^{-1}(x + \xi)) \end{aligned}$$

в силу непрерывности функции f^{-1} .

Остальные случаи доказываются аналогично.

Свойство 2 доказано.

Свойство 3. *Для любой пары $(x, y) \in [0, 1]^2$*

$$F_L(x, y) + \tau_{\max} > 0.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} F_L(x, y) &\geq F_L(1, 0) = \min_{\xi \in [0, \rho]} (f_q^{-1}(\xi - \rho) - f^{-1}(1 + \xi)) \geq \\ &\geq f_q^{-1}(0) - f^{-1}(1 + \rho) > -f^{-1}(1 + \rho) = \tau_{\max}, \end{aligned}$$

так как $f_q^{-1}(0) > f_q^{-1}(-\rho) = 0$.

Свойство 3 доказано.

Свойство 4. Для любой пары $(x, y) \in [0, 1]^2$

$$F_R(x, y) - F_L(x, y) > 0.$$

Доказательство. Заметим, что $F_R(x, y) \geq f_q^{-1}(y + \rho) - f^{-1}(x)$, а $F_L(x, y) \leq f_q^{-1}(y - \rho) - f^{-1}(x)$. То есть

$$F_R(x, y) - F_L(x, y) \geq f_q^{-1}(y + \rho) - f_q^{-1}(y - \rho) > 0,$$

так как функция f_q^{-1} строго возрастает.

Свойство 4 доказано.

4.2. Основная лемма

Лемма 1. Объект $o_i = (t_i, y_i)$ из библиотеки $V = V(t_q)$ принадлежит ответу на запрос $q = (t_q, x)$ (то есть $o_i \in J(\rho, q, V)$) тогда и только тогда, когда

$$t_i - t_q \in [F_L(x, y_i), F_R(x, y_i)]. \quad (12)$$

Доказательство. Пусть $o_i \in V$. Тогда по определению

$$o_i \in J(\rho, q, V) \Leftrightarrow \exists t : |f(t - t_i) - x| + |f_q(t - t_q) - y_i| \leq \rho.$$

Обозначим: $\xi = f(t - t_i) - x$.

Тогда $o_i \in J(\rho, q, V) \Leftrightarrow \exists \xi : g(\xi) = |\xi| + |f_q(f^{-1}(x + \xi) + t_i - t_q) - y_i| \leq \rho$.

Рассмотрим два случая.

Первый случай: $f(f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i) - x \geq 0$. Этот случай соответствует ситуации, когда объект пролетел точку x к моменту, когда запрос достиг точки y_i . Раскрывая это неравенство, получаем

$$\begin{aligned} f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i &\geq f^{-1}(x), \\ t_i - t_q &\leq f_q^{-1}(y_i) - f^{-1}(x) \leq f_q^{-1}(y_i + \rho) - f^{-1}(x) \leq F_R(x, y_i). \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что в данном случае минимум $g(\xi)$ нужно искать на отрезке $[0, f(f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i) - x]$, на котором

$$g(\xi) = \xi - f_q(f^{-1}(x + \xi) + t_i - t_q) + y_i \leq \rho.$$

Последнее равносильно $t_i - t_q \geq f_q^{-1}(y_i + \xi - \rho) - f^{-1}(x + \xi)$.

Теперь покажем, что условие $\xi \in [0, f(f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i) - x]$ эквивалентно условию $\xi \in [0, \rho]$. Если $f(f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i) - x \leq \rho$, то возьмем $\xi_1 = f(f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i) - x$ и, очевидно, $g(\xi_1) \leq \rho$, а если $f(f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i) - x > \rho$, то для любого $\xi_2 \in (\rho, f(f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i) - x]$ выполнено $g(\xi_2) \geq \xi_2 > \rho$, то есть в этом случае искомая точка минимума лежит на отрезке $[0, \rho]$.

Второй случай: $f(f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i) - x < 0$. Этот случай соответствует ситуации, когда запрос достиг точки y_i , а объект еще не долетел до точки x . Раскрывая это неравенство, получаем

$$\begin{aligned} f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i &< f^{-1}(x), \\ t_i - t_q &> f_q^{-1}(y_i) - f^{-1}(x) \geq f_q^{-1}(y_i - \rho) - f^{-1}(x) \geq F_L(x, y_i). \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что в данном случае минимум $g(\xi)$ нужно искать на отрезке $[f(f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i) - x, 0]$, на котором

$$g(\xi) = -\xi - y_i + f_q(f^{-1}(x + \xi) + t_i - t_q) \leq \rho.$$

Последнее равносильно $t_i - t_q \leq f_q^{-1}(y_i + \xi + \rho) - f^{-1}(x + \xi)$.

Аналогично первому случаю условие $\xi \in [f(f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i) - x, 0]$ можно заменить на условие $\xi \in [-\rho, 0]$.

Лемма 1 доказана.

4.3. Достаточность

Пусть выполнены условия теоремы 1 и существуют некоторые функции $\psi, \psi_L, \psi_R : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что выполнены условия (4), (5). Пусть Y_R, Y_L и X_L — множества задаваемые соотношениями (1), (2) и (3) соответственно.

Заметим, что $Y_R \subseteq Y_L$ и некоторые из этих множеств могут быть пустыми. Поскольку функции $F_R(x, y), F_L(x, y)$ возрастают и непрерывны по x при фиксированном y , и убывают и непрерывны по y при

фиксированном x , то для множества Y_R верно, что если оно не пусто, то $Y_R = [0, \alpha_{xR}]$ для некоторого положительного α_{xR} .

Аналогично, если $Y_L \neq \emptyset$, то $Y_L = [0, \alpha_{xL}]$, и если $X_L \neq \emptyset$, то $X_L = [\alpha_{yL}, 1]$.

Пусть $\psi^*, \psi_R^*, \psi_L^* : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ — функции определяемые соотношениями (6), (7) и (8) соответственно.

По определению и свойствам 1 ψ^* не убывает на всей области определения, а ψ_L^*, ψ_R^* — не возрастают, и при этом для любого x из отрезка $[0, 1]$ $\psi_L^*(x) \leq \psi_R^*(x)$.

Покажем, что если выполнены условия теоремы 1, то для любой пары (x, y) , такой, что $F_L(x, y) > 0$, верно что

$$\psi^*(y) + \psi_L^*(x) > 0, \quad (13)$$

а для любой пары (x, y) , такой, что $F_R(x, y) > 0$, верно что

$$\psi^*(y) + \psi_R^*(x) > 0. \quad (14)$$

Докажем (13). Пусть $F_L(x, y) > 0$. Возможны два случая.

1. $x \geq \alpha_{xL}$. Следовательно, существует $y_1 < y$, такой, что $F_L(x_1, y) \leq 0$. Из непрерывности и возрастания $F_L(x, y)$ по y при фиксированном x следует, что существует $y_0 \in [y_1, y]$, такой что

$$0 = F_L(x, y_0) = \psi_L^*(y_0) + \psi^*(x) < \psi_L^*(y) + \psi^*(x).$$

Последнее неравенство выполняется в силу возрастания функции $\psi_L^*(y)$.

2. $x < \alpha_{xL}$. Следовательно,

$$\psi_L^*(x) + \psi^*(y) = \psi_L^*(x) + F_L(0, 1) \geq \psi_L^*(y) + \psi^*(\alpha_{xL}) > 0.$$

Последнее неравенство выполняется в силу предыдущего пункта.

Аналогично доказывается неравенство (14).

Пусть $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ — отображения, задаваемые соотношениями (9), (10) и (11) соответственно.

Покажем, что для произвольного запроса $q = (t_q, x)$ и произвольного объекта $o_i = (t_i, y_i)$ из библиотеки $V = V(t_q)$ выполнено

$$o_i \in J(\rho, q, V) \Leftrightarrow [\varphi_1(o_i), \varphi_2(o_i)] \in J(\varphi(q), Z),$$

где $Z = \{[\varphi_1(o), \varphi_2(o)] : o \in V\}$.

По лемме 1

$$o_i \in J(\rho, q, V) \Leftrightarrow t_i - t_q \in [F_L(x, y_i), F_R(x, y_i)].$$

Рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть (x, y_i) такие, что $F_R(x, y_i) \leq 0$. Тогда по условию верно, что $F_L(x, y_i) = \psi^*(x) + \psi_1^*(y_i)$, $F_R(x, y_i) = \psi^*(x) + \psi_2^*(y_i)$, то есть

$$\begin{aligned} t_i - t_q \in [F_L(x, y_i), F_R(x, y_i)] &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t_q + \psi^*(x) \in [t_q - \psi_2^*(y_i), t_q + \psi_1^*(y_i)] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [\varphi_1(o_i), \varphi_2(o_i)] \in J(\varphi(q), Z), \end{aligned}$$

где $Z = \{[\varphi_1(o), \varphi_2(o)] : o \in V\}$.

2. Пусть (x, y_i) такие, что $F_L(x, y_i) \leq 0$, $F_R(x, y_i) > 0$. Тогда по доказанному ранее верно, что $F_L(x, y_i) = \psi^*(x) + \psi_1^*(y_i)$, $\psi^*(x) + \psi_2^*(y_i) > 0$. Поскольку $o_i \in V(t_q)$, то $t_i - t_q \leq 0$, и

$$\begin{aligned} t_i - t_q \in [F_L(x, y_i), F_R(x, y_i)] &\Leftrightarrow t_i - t_q \in [F_L(x, y_i), \psi^*(x) + \psi_2^*(y_i)] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t_i - t_q \in [\psi^*(x) + \psi_1^*(y_i), \psi^*(x) + \psi_2^*(y_i)] \Leftrightarrow \varphi(q) \in [\varphi_1(o_i), \varphi_2(o_i)] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [\varphi_1(o_i), \varphi_2(o_i)] \in J(\varphi(q), Z). \end{aligned}$$

3. Пусть (x, y) такие, что $F_L(x, y) > 0$. Тогда по доказанному ранее верно, что $\psi^*(x) + \psi_1^*(y) > 0$, $\psi^*(x) + \psi_2^*(y) > 0$. Поскольку $o_i \in V(t_q)$, то $t_i - t_q \leq 0$, и

$$\begin{aligned} t_i - t_q \notin [F_L(x, y_i), F_R(x, y_i)] &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t_i - t_q \notin [\psi^*(x) + \psi_2^*(y_i), \psi^*(x) + \psi_1^*(y_i)] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [\varphi_1(o_i), \varphi_2(o_i)] \in J(\varphi(q), Z). \end{aligned}$$

Достаточность доказана.

4.4. Необходимость

Лемма 2. Если для задачи об опасной близости (f, f_q, ρ) существует четыре объекта $\{o_1, o_2, o_3, o_4\}$ и четыре запроса $\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$, такие что

$$\begin{aligned}
V(t_q^1) = V(t_q^2) = V(t_q^3) = V(t_q^4) &= \{o_1, o_2, o_3, o_4\} = V, \\
J(\rho, q_1, V) &= \{o_1, o_2, o_3, o_4\}, \\
J(\rho, q_2, V) &= \{o_1, o_3\}, \\
J(\rho, q_3, V) &= \{o_2, o_4\}, \\
J(\rho, q_4, V) &= \{o_3, o_4\},
\end{aligned} \tag{15}$$

то задача об опасной близости (f, f_q, ρ) не может быть сведена к задаче о прокалывании.

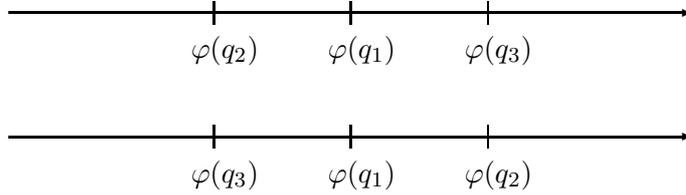


Рис. 2. Два возможных расположения точек $\varphi(o_1), \varphi(o_2), \varphi(o_3)$.

Доказательство. Пусть утверждение леммы не верно. Тогда существуют отображения $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, такие, что для библиотеки V , любого запроса q_j , $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ и любого объекта o_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ верно

$$o_i \in J(\rho, q_j, V) \Leftrightarrow [\varphi_1(o_i), \varphi_2(o_i)] \in J(\varphi(q_j), Z),$$

где $Z = \{[\varphi_1(o_i), \varphi_2(o_i)] : i \in \{1, 2, 3, 4\}\}$.

Так как $o_1 \in J(\rho, q_1, V)$, $o_1 \in J(\rho, q_2, V)$ и $o_1 \notin J(\rho, q_3, V)$, $o_1 \notin J(\rho, q_4, V)$, то на прямой \mathbb{R} должен существовать отрезок $[\varphi_1(o_1), \varphi_2(o_1)]$, который содержит только точки $\varphi(q_1), \varphi(q_2)$ и не содержит точки $\varphi(q_3), \varphi(q_4)$.

Так как $o_2 \in J(\rho, q_1, V)$, $o_2 \in J(\rho, q_3, V)$ и $o_2 \notin J(\rho, q_2, V)$, $o_2 \notin J(\rho, q_4, V)$, то на прямой \mathbb{R} должен существовать отрезок $[\varphi_1(o_2), \varphi_2(o_2)]$, который содержит только точки $\varphi(q_1), \varphi(q_3)$ и не содержит точки $\varphi(q_2), \varphi(q_4)$.

Отсюда следует, что возможны только два расположения тройки точек $\varphi(q_1), \varphi(q_2), \varphi(q_3)$ (они показаны на рисунке 2), и при этом в обоих случаях $\varphi(q_4)$ не может лежать между $\varphi(q_2)$ и $\varphi(q_3)$.

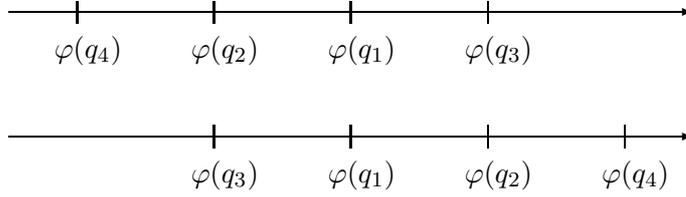


Рис. 3. Два возможных расположения точек $\varphi(q_1), \varphi(q_2), \varphi(q_3), \varphi(q_4)$.

Так как $o_3 \in J(\rho, q_1, V)$, $o_3 \in J(\rho, q_2, V)$, $o_3 \in J(\rho, q_3, V)$ и $o_3 \notin J(\rho, q_4, V)$, то на прямой \mathbb{R} должен существовать отрезок $[\varphi_1(o_3), \varphi_2(o_3)]$, который содержит только точки $\varphi(q_1), \varphi(q_2), \varphi(q_4)$ и не содержит точки $\varphi(q_3)$. Тогда в первом случае точка $\varphi(q_4)$ должна располагаться на прямой \mathbb{R} правее $\varphi(q_2)$, а во втором случае — левее $\varphi(q_2)$. Данное расположение показано на рисунке 3.

Но, так как $o_4 \in J(\rho, q_1, V)$, $o_4 \in J(\rho, q_3, V)$, $o_4 \in J(\rho, q_4, V)$ и $o_4 \notin J(\rho, q_2, V)$, то на прямой \mathbb{R} должен существовать отрезок $[\varphi_1(o_4), \varphi_2(o_4)]$, который содержит только точки $\varphi(q_1), \varphi(q_3), \varphi(q_4)$ и не содержит точки $\varphi(q_2)$. На рисунке 3 видно, что такого отрезка не существует для обоих случаев.

Тем самым лемма 2 доказана.

Лемма 3. Если задача об опасной близости (f, f_q, ρ) сводится к задаче о прокальвании, то существуют функции $\psi'_L, \psi'_R : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ и функция $g : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что для любой пары (x, y) такой, что $F_R(x, y) \leq 0$

$$\begin{aligned} F_L(x, y) &= g(x, y) + \psi'_L(y), \\ F_R(x, y) &= g(x, y) + \psi'_R(y). \end{aligned}$$

Доказательство. Докажем утверждение для случая $F_R(x, y) < 0$. Пусть

$$\zeta(x, y) = F_R(x, y) - F_L(x, y).$$

Покажем, что $\zeta(x, y)$ зависит существенно только от y . Предположим, это не так. Тогда существует тройка (y^0, x^1, x^2) , такая что $F_R(x^1, y^0) < 0$, $F_R(x^2, y^0) < 0$ и

$$\xi(x^1, y^0) > \xi(x^2, y^0).$$

Для произвольного запроса $q = (t_q, x)$ обозначим:

$$\begin{aligned} t_q' &= t_q + F_L(x, y^0), \\ t_q'' &= t_q + F_L(x, y^0). \end{aligned}$$

Для доказательства будем использовать схему (15).

Тогда для объекта $o_i = (t_i, y^0) \in V(t_q)$ и запроса $q = (t_q, x)$ в соответствии с леммой 1 верно, что

$$o_i \in J(\rho, q, V) \Leftrightarrow t_i \in [t_q', t_q''].$$

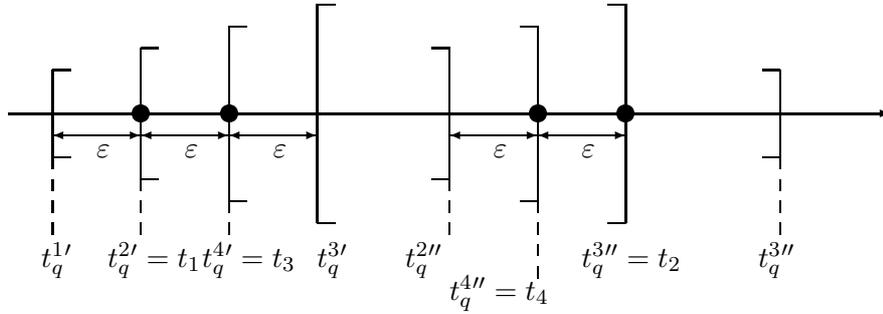


Рис. 4. Расположение моментов появления объектов и запросов

Выберем

$$\varepsilon \in \left(0, \min \left\{ \frac{\xi(x^1, y^0) - \xi(x^2, y^0)}{3}, \frac{\zeta(x^2, y^0)}{2}, -\frac{F_R(x^2, y^0)}{2}, -\frac{F_R(x^1, y^0)}{3} + \frac{\xi(x^1, y^0) - \xi(x^2, y^0)}{3}, \frac{1}{2}(F_L(x^2, y^0) + \tau_{\max}) \right\} \right), \quad (16)$$

и произвольное число t . Зададим запросы следующим образом

- $q_1 = (t - F_L(x^1, y^0), x^1)$,
- $q_2 = (t - F_L(x^2, y^0) + \varepsilon, x^2)$,
- $q_3 = (t - F_L(x^2, y^0) + 3\varepsilon, x^2)$,
- $q_4 = (t - F_L(x^2, y^0) + 2\varepsilon, x^2)$.

Для этих объектов

$$\begin{aligned} t_q^{1'} &= t, t_q^{2'} = t + \varepsilon, t_q^{3'} = t + 3\varepsilon, t_q^{4'} = t + 2\varepsilon, \\ t_q^{1''} &= t + \xi(x^1, y^0), t_q^{2''} = t + \varepsilon + \xi(x^2, y^0), t_q^{3''} = t + 3\varepsilon + \xi(x^2, y^0), \\ t_q^{4''} &= t + 2\varepsilon + \xi(x^2, y^0). \end{aligned}$$

Зададим объекты следующим образом

- $o_1 = (t + \varepsilon, y^0)$,
- $o_2 = (t + 3\varepsilon + \xi(x^2, y^0), y^0)$,
- $o_3 = (t + 2\varepsilon, y^0)$,
- $o_4 = (t + 2\varepsilon + \xi(x^2, y^0), y^0)$.

Моменты $t_q^{i'}, t_q^{i''}$ и o_j показаны на рис. 4.

Покажем, что $V = V(t_q^1) = V(t_q^2) = V(t_q^3) = V(t_q^4) = \{o_1, o_2, o_3, o_4\}$, то есть $t_q^j \in [t_i, t_i + \tau_{\max}]$, где $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Для этого необходимо показать, что $\min_{j=1,4} t_q^j \geq \max_{i=1,4} t_i$ и $\max_{j=1,4} t_q^j \leq \min_{i=1,4} t_i + \tau_{\max}$.

- $\min_{j=1,4} t_q^j = \min\{t - F_L(x^1, y^0), t - F_L(x^2, y^0) + \varepsilon\} \geq \max_{i=1,4} t_i = t + 3\varepsilon + \xi(x^2, y^0)$, что равносильно $\varepsilon \leq \min\{-\frac{F_R(x^1, y^0)}{3} + \frac{\xi(x^1, y^0) - \xi(x^2, y^0)}{3}, \frac{-F_R(x^2, y^0)}{2}\}$ и это верно из-за выбора ε ;
- $\max_{j=1,4} t_q^j = \max\{t - F_L(x^1, y^0), t - F_L(x^2, y^0) + 3\varepsilon\} \leq \min_{i=1,4} t_i + \tau_{\max} = t + \varepsilon + \tau_{\max}$, что выполнено, поскольку в силу выбора ε верно, что $\varepsilon \leq \frac{F_L(x^2, y^0) + \tau_{\max}}{2}$.

Используя утверждение леммы 1, покажем, что выполнено

$$\begin{aligned} J(\rho, q_1, V) &= \{o_1, o_2, o_3, o_4\}, \\ J(\rho, q_2, V) &= \{o_1, o_3\}, \\ J(\rho, q_3, V) &= \{o_2, o_4\}, \\ J(\rho, q_4, V) &= \{o_3, o_4\}. \end{aligned}$$

- $o_1 \in J(\rho, q_1, V) \Leftrightarrow \varepsilon \in [0, \xi(x^1, y^0)]$, что верно, поскольку в силу (16) $\varepsilon < \xi(x^2, y^0) < \xi(x^1, y^0)$;

- $o_2 \in J(\rho, q_1, V) \Leftrightarrow \varepsilon \in [0, \xi(x^1, y^0) - \xi(x^2, y^0)]$, что верно в силу (16);
- $o_3 \in J(\rho, q_1, V) \Leftrightarrow 2\varepsilon \in [0, \xi(x^1, y^0)]$, что верно в силу (16);
- $o_4 \in J(\rho, q_1, V) \Leftrightarrow 2\varepsilon \in [-\xi(x^2, y^0), \xi(x^1, y^0) - \xi(x^2, y^0)]$, что верно в силу (16);
- $o_1 \in J(\rho, q_2, V) \Leftrightarrow F_L(x^2, y^0) \in [F_L(x^2, y^0), F_R(x^2, y^0)]$, что верно;
- $o_2 \notin J(\rho, q_2, V) \Leftrightarrow 2\varepsilon \notin [-\xi(x^2, y^0), 0]$, что верно, так как $\varepsilon > 0$;
- $o_3 \in J(\rho, q_2, V) \Leftrightarrow \varepsilon \in [0, \xi(x^2, y^0)]$, что верно в силу (16);
- $o_4 \notin J(\rho, q_2, V) \Leftrightarrow \varepsilon \notin [-\xi(x^2, y^0), 0]$, что верно в силу (16);
- $o_1 \notin J(\rho, q_3, V) \Leftrightarrow 2\varepsilon \in [0, \xi(x^2, y^0)]$, что верно в силу (16);
- $o_2 \in J(\rho, q_3, V) \Leftrightarrow \xi(x^2, y^0) \in [0, \xi(x^2, y^0)]$, что верно;
- $o_3 \notin J(\rho, q_3, V) \Leftrightarrow -\varepsilon \notin [0, \xi(x^2, y^0)]$, что верно в силу (16);
- $o_4 \in J(\rho, q_3, V) \Leftrightarrow 0 \in [0, \xi(x^2, y^0)]$, что верно в силу (16);
- $o_1 \notin J(\rho, q_4, V) \Leftrightarrow -\varepsilon \in [0, \xi(x^2, y^0)]$, что верно в силу (16);
- $o_2 \notin J(\rho, q_4, V) \Leftrightarrow \varepsilon \in [-\xi(x^2, y^0), 0]$, что верно в силу (16);
- $o_3 \in J(\rho, q_4, V) \Leftrightarrow 0 \in [0, \xi(x^2, y^0)]$, что верно в силу (16);
- $o_4 \in J(\rho, q_4, V) \Leftrightarrow \xi(x^2, y^0) \in [0, \xi(x^2, y^0)]$, что верно в силу (16).

Докажем теперь утверждение для случая $F_R(x, y) = 0$. Подберем последовательность $(y_n) \rightarrow y$ такую, что $y_n < y$. Для этой последовательности получим, что $F_R(x, y_n) < 0$ и $F_R(x, y_n) \rightarrow F_R(x, y)$, $F_L(x, y_n) \rightarrow F_L(x, y)$. По доказанному верно, что $F_R(x, y_n) - F_L(x, y_n)$ зависит только от y_n . Обозначим эту функцию $\psi(y_n)$. Данная функция непрерывна, так как непрерывны функции $F_R(x, y_n)$, $F_L(x, y_n)$. Следовательно, разность $F_R(x, y) - F_L(x, y) = \psi(y)$ и также не зависит от x .

Лемма 3 доказана.

Обозначим:

$$h_{y^0, 1}(x) = F_L(x, y^1) - F_L(x, y^0).$$

Лемма 4. Если задача об опасной близости (f, f_q, ρ) сводится к задаче одномерного интервального поиска, то для любых $y^0, y^1 \in [0, 1]$

таких, что $x^0 < y^1$, функция $h_{y^0,1}(x)$ принимает не более двух значений для x из области

$$\begin{cases} F_L(x, y^1) < 0, \\ h_{y^0,1}(x) \leq F_L(1, 0) + \tau_{\max}. \end{cases} \quad (17)$$

Доказательство. Сначала заметим, что $h_{y^0,1}(x) > 0$ для любого x при $y^0 < y^1$.

Предположим утверждение леммы не верно, то есть существуют $x^0, x^1, x^2 \in [0, 1]$ из области (17), такие что

$$0 < h_{y^0,1}(x^0) < h_{y^0,1}(x^1) < h_{y^0,1}(x^2). \quad (18)$$

Будем использовать схему доказательства (15).

Выберем

$$\begin{aligned} \varepsilon \in (0, \min\{ & -F_L(x^0, y^1), -F_L(x^1, y^1), -F_L(x^1, y^0), \\ & h_{y^0,y^1}(x^1) - h_{y^0,y^1}(x^0), h_{y^0,y^1}(x^2) - h_{y^0,y^1}(x^1), \\ & F_R(x^1, y^0) - F_L(x^1, y^0), F_R(x^2, y^0) - F_L(x^2, y^0), \\ & F_R(x^0, y^1) - F_L(x^0, y^1), F_L(x_1, y^0) + \tau_{\max}\}). \end{aligned} \quad (19)$$

Обозначим $t_2 = -F_L(x^1, y^0) + F_L(x^1, y^1) = h_{y^0,y^1}(x^1)$. Заметим, что согласно (19) $t_2 > \varepsilon > 0$.

Зададим параметры объектов и запросов следующим образом:

- $q_1 = (t_q^1, x^1) = (-F_L(x^1, y^1) + t_2 - \varepsilon, x^1) = (-F_L(x^1, y^0) - \varepsilon, x^1)$,
- $q_2 = (-F_L(x^2, y^0) - \varepsilon, x^2)$,
- $q_3 = (t_2 - F_L(x^0, y^1) - \varepsilon, x^0)$,
- $q_4 = (-F_L(x^1, y^0), x^1)$,
- $o_1 = (-\varepsilon, y^0)$,
- $o_2 = (t_2 - \varepsilon, y^1)$,
- $o_3 = (0, y^0)$,
- $o_4 = (t_2, y^1)$.

Покажем, что выполнено $V(t_q^1) = V(t_q^2) = V(t_q^3) = V(t_q^4) = \{o_1, o_2, o_3, o_4\}$.

По определению $o = (t, y) \in V(t_q)$, если $t_q \in [t, t + \tau_{\max}]$.

Таким образом, необходимо показать, что $\min_{1 \leq j \leq 4} t_q^j \geq \max_{1 \leq i \leq 4} t_i$ и

$$\max_{1 \leq j \leq 4} t_q^j \leq \min_{1 \leq i \leq 4} t_i + \tau_{\max}.$$

- 1) $\min_{1 \leq j \leq 4} t_q^j \geq \max_{1 \leq i \leq 4} t_i \Leftrightarrow \min\{-F_L(x^1, y^0) + F_L(x^1, y^1) - F_L(x^0, y^1) - \varepsilon, -F_L(x^2, y^0) - \varepsilon, -F_L(x^1, y^0) - \varepsilon\} \geq F_L(x^1, y^1) - F_L(x^1, y^0)$, что верно в силу (19),
- 2) $\max_j t_q^j \leq \min_i t_i + \tau_{\max} \Leftrightarrow \max\{-F_L(x^1, y^0) + F_L(x^1, y^1) - F_L(x^0, y^1) - \varepsilon, -F_L(x^2, y^0) - \varepsilon, -F_L(x^1, y^0)\} \leq -\varepsilon + \tau_{\max}$, что верно в силу (19) и в силу условия 17:

$$h_{y^0, y^1}(x^1) \leq F_L(1, 0) + \tau_{\max} \leq F_L(x^0, y^1) + \tau_{\max}.$$

Теперь, используя утверждение леммы 1, покажем, что

$$\begin{aligned} J(\rho, q_1, V) &= \{o_1, o_2, o_3, o_4\}, \\ J(\rho, q_2, V) &= \{o_1, o_3\}, \\ J(\rho, q_3, V) &= \{o_2, o_4\}, \\ J(\rho, q_4, V) &= \{o_3, o_4\}. \end{aligned}$$

- $o_1 \in J(\rho, q_1, V) \Leftrightarrow t_2 \in [t_2, t_2 + F_R(x^1, y^1) - F_L(x^1, y^1)]$, что верно;
- $o_2 \in J(\rho, q_1, V) \Leftrightarrow F_L(x^1, y^0) \in [F_L(x^1, y^0), F_R(x^1, y^1)]$, что верно;
- $o_3 \in J(\rho, q_1, V) \Leftrightarrow \varepsilon \in [0, F_R(x^1, y^0) - F_L(x^1, y^0)]$, что верно в силу (19);
- $o_4 \in J(\rho, q_1, V) \Leftrightarrow \varepsilon \in [0, F_R(x^1, y^1) - F_L(x^1, y^1)]$, что верно в силу (19);
- $o_1 \in J(\rho, q_2, V) \Leftrightarrow F_L(x^2, y^0) \in [F_L(x^2, y^0), F_L(x^2, y^0)]$, что верно в силу (19);
- $o_2 \notin J(\rho, q_2, V) \Leftrightarrow h_{y^0, y^1}(x^1) \notin [h_{y^0, y^1}(x^2), h_{y^0, y^1}(x^1) + F_R(x^2, y^0) - F_L(x^2, y^0)]$, что верно, поскольку $h_{y^0, y^1}(x^2) > h_{y^0, y^1}(x^1)$;
- $o_3 \in J(\rho, q_2, V) \Leftrightarrow \varepsilon \in [0, F_R(x^2, y^0) - F_L(x^2, y^0)]$, что верно в силу (19);
- $o_4 \notin J(\rho, q_2, V) \Leftrightarrow h_{y^0, y^1}(x^1) + \varepsilon \notin [h_{y^0, y^1}(x^2), h_{y^0, y^1}(x^1) + F_R(x^2, y^0) - F_L(x^2, y^0)]$, что верно в силу (19);
- $o_1 \notin J(\rho, q_3, V) \Leftrightarrow -h_{y^0, y^1}(x^1) \notin [-h_{y^0, y^1}(x^0), -h_{y^0, y^1}(x^0) + F_R(x^0, y^0) - F_L(x^0, y^0)]$, что верно, поскольку $h_{y^0, y^1}(x^1) > h_{y^0, y^1}(x^0)$;
- $o_2 \in J(\rho, q_3, V) \Leftrightarrow 0 \in [0, F_R(x^0, y^1) - F_L(x^0, y^1)]$, что верно;

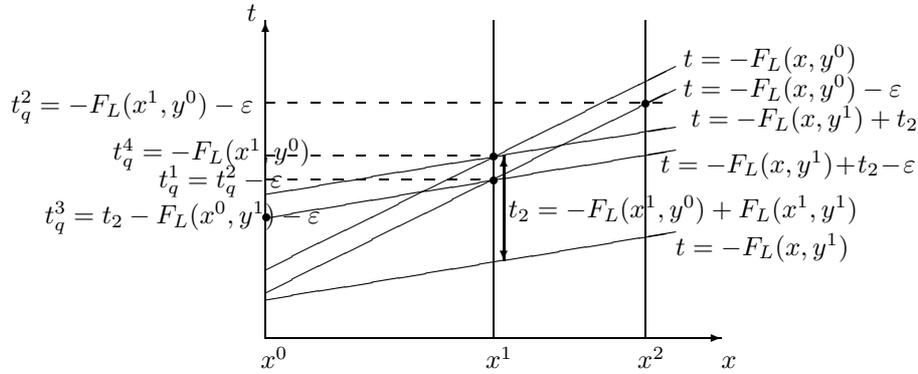


Рис. 5. Расположение моментов появления объектов и запросов для случая $x^0 < x^1 < x^2$

- $o_3 \notin J(\rho, q_3, V) \Leftrightarrow -h_{y^0, y^1}(x^1) + \epsilon \in [-h_{y^0, y^1}(x^0), -h_{y^0, y^1}(x^0) + F_R(x^0, y^0) - F_L(x^0, y^0)]$, что верно в силу (19);
- $o_4 \in J(\rho, q_3, V) \Leftrightarrow \epsilon \in [0, F_R(x^0, y^1) - F_L(x^0, y^1)]$, что верно;
- $o_1 \notin J(\rho, q_4, V) \Leftrightarrow -\epsilon \notin [0, F_R(x^1, y^0) - F_L(x^1, y^0)]$, что верно, поскольку $\epsilon > 0$;
- $o_2 \notin J(\rho, q_4, V) \Leftrightarrow -\epsilon \notin [0, F_R(x^1, y^1) - F_L(x^1, y^1)]$, что верно, поскольку $\epsilon > 0$;
- $o_3 \in J(\rho, q_4, V) \Leftrightarrow 0 \in [0, F_R(x^1, y^0) - F_L(x^1, y^0)]$, что верно;
- $o_4 \in J(\rho, q_4, V) \Leftrightarrow 0 \in [0, F_R(x^1, y^1) - F_L(x^1, y^1)]$, что верно.

Отсюда согласно лемме 1 получаем справедливость утверждения леммы 4. Лемма 4 доказана.

Рассмотрим теперь графическую интерпретацию доказательства леммы 4. Вспомним, что по основной лемме 1 объект $o_i = (t_i, y_i)$ из библиотеки $V = V(t_q)$ принадлежит ответу на запрос $q = (t_q, x)$ (то есть $o_i \in J(\rho, q, V)$) тогда и только тогда, когда $t_i - t_q \in [F_L(x, y_i), F_R(x, y_i)]$. Рассмотрим двумерный график на рисунке 5. На оси абсцисс будем откладывать координаты появления запросов, а на оси ординат — моменты появления запросов. Таким образом, каждому запросу $q_j = (t_q^j, x^j)$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ будет соответствовать точка с координатой x^j по оси абсцисс и координатой t_q^j по оси ординат. На рис. 5 изображены данные точки для случая $x^0 < x^1 < x^2$.

Каждому объекту (t_i, y_i) в данных координатах поставим в соответствие две функции $t_L(x) = t_i - F_R(x, y_i)$ и $t_R(x) = t_i - F_L(x, y_i)$. Таким образом, по основной лемме объект (t_i, y_i) попадет в ответ на те запросы, которым соответствуют точки, лежащие между линиями $t_L(x)$ и $t_R(x)$ (либо на самих линиях).

На рис. 5 для удобства изображены только «верхние» функции, соответствующие объектам o_1, o_2, o_3 и o_4 , в виде прямых. Из рисунка 5 видно, что

$$\begin{aligned} J(\rho, q_1, V) &= \{o_1, o_2, o_3, o_4\}, \\ J(\rho, q_2, V) &= \{o_1, o_3\}, \\ J(\rho, q_3, V) &= \{o_2, o_4\}, \\ J(\rho, q_4, V) &= \{o_3, o_4\}. \end{aligned}$$

Пусть как и раньше

$$\Delta = F_L(1, 0) + \tau_{\max}.$$

Лемма 5. *Существует число $\delta_1 > 0$, такое, что для любых $x, y \in [0, 1]$*

$$F_L(x, y + \delta_1) - F_L(x, y) < \Delta.$$

Справедливость данной леммы следует из непрерывности $F_L(x, y)$ по x и по y внутри квадрата $[-\rho, 1 + \rho]^2$.

Лемма 6. *Если δ_1 — число, существование которого доказывается леммой 5, то для любой пары $(x, y) \in [0, 1]^2$ такой, что $F_L(x, y) \leq 0$ и для любого $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ верно, что*

$$h_{y+\delta_2, y}(y) = h_{y+\delta_2, y}(1).$$

Доказательство. Сначала докажем, что утверждение верно для пары (x_1, y_1) такой, что $F_L(x_1, y_1) < 0$.

Для $x_1 = 1$ утверждение очевидно. Пусть $x_1 < 1$.

Допустим противное:

$$h_{y+\delta_2,y}(x) \neq h_{y+\delta_2,y}(1).$$

Поскольку $\delta_2 \in (0, \delta_1)$, то по лемме 5 $h_{y+\delta_2,y}(y) = F_L(x, y_1 + \delta) - F_L(x, y_1) < \Delta$ и, значит, по лемме 4 $h_{y,y+\delta_2}(x)$ на отрезке $[0, 1]$ может принимать не более двух различных значений. По предположению одно из этих значений равно $h_{y+\delta_2,y}(x_1)$, а другое — $h_{y+\delta_2,y}(0)$.

Построим две бесконечные последовательности (x_n^0) и (x_n^1) , такие, что $h_{y+\delta_2,y}(x_n^0) = h_{y+\delta_2,y}(0)$, $h_{y+\delta_2,y}(x_n^1) = h_{y+\delta_2,y}(x_1)$.

На первом шаге отнесем к первой последовательности 0, а ко второй — x_1 , то есть $x_1^0 = 1$, $x_1^1 = x_1$.

На втором шаге рассмотрим $x_2 = \frac{|x_1^0 - x_1^1|}{2}$. Если $h_{y+\delta_2,y}(x_2) = h_{y+\delta_2,y}(0)$, то $x_2^0 = y_2$, $x_2^1 = y_1$, а если $h_{y+\delta_2,y}(x_2) = h_{y+\delta_2,y}(x_1)$, то $x_2^0 = x_0$, $x_2^1 = x_2$.

На k -ом шаге рассмотрим $x_k = \frac{|x_{k-1}^0 - x_{k-1}^1|}{2}$. Если $h_{y+\delta_2,y}(x_k) = h_{y+\delta_2,y}(0)$, то $x_k^0 = x_k$, $x_k^1 = x_{k-1}^1$, а если $h_{y+\delta_2,y}(x_k) = h_{y+\delta_2,y}(x_1)$, то $x_k^0 = x_{k-1}^0$, $x_k^1 = x_k$.

Таким образом получаем, что все три последовательности (x_n^0) , (x_n^1) и $(x_n^0) \cup (x_n^1)$ имеют единственную предельную точку, одинаковую для всех трех последовательностей, то есть все три последовательности сходятся к одному пределу. Обозначим этот предел x_* .

Функция $h_{y+\delta_2,y}(x)$ непрерывна и

$$h_{y+\delta_2,y}(x_*) = h_{y+\delta_2,y}(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^0) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_{y+\delta_2,y}(x_n^0) = h_{y+\delta_2,y}(1).$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} h_{y+\delta_2,y}(x_*) &= h_{y+\delta_2,y}(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^1) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} h_{y+\delta_2,y}(x_n^1) = h_{y+\delta_2,y}(x_1) \neq h_{y+\delta_2,y}(1). \end{aligned}$$

Противоречие.

Покажем теперь, что для пары (x, y) , такой, что $F_L(x, y) = 0$ также верно утверждение леммы. Возьмем произвольную последовательность $(yx_n) \rightarrow x$, $x_n > x$ для любого n . Так как $F_L(x_n, y) < 0$,

то по только что доказанному для любой пары (x_n, y) верно утверждение леммы. Функция $F_L(x, y)$ непрерывна по x , следовательно утверждение верно и для пары (x, y) .

Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Если задача об опасной близости (f, f_q, ρ) сводится к задаче о прокалывании, то для любой пары (x, y) такой, что $F_L(x, y) \leq 0$ верно, что*

$$F_L(x, y) = F_L(1, y) + F_L(x, 0) - F_L(1, 0).$$

Доказательство. Для произвольной пары $(x, y) \in [0, 1]^2$, такой, что $F_L(x, y) \leq 0$ обозначим:

$$k = \left\lceil \frac{y}{\delta_1} \right\rceil,$$

$$\delta_0 = \frac{y}{k} \leq \delta_1.$$

Здесь δ_1 — число из формулировки леммы 5, $]a[$ — наименьшее целое, не меньшее чем a .

Напишем следующую цепочку равенств, верных по лемме 6:

$$h_{y, y-\delta_2}(x) = h_{y, y-\delta_2}(1),$$

$$h_{y, y-2\delta_2}(x) = h_{y, y-2\delta_2}(1),$$

.....

$$h_{y+k\delta_2, y+(k-1)\delta_2}(x) = h_{y+k\delta_2, y+(k-1)\delta_2}(1).$$

Данная цепочка равенств равносильна следующей цепочке равенств:

$$F_L(x, y - \delta_2) - F_L(1, y - \delta_2) = F_L(x, y) - F_L(1, y),$$

$$F_L(x, y - 2\delta_2) - F_L(1, y - 2\delta_2) = F_L(x, y - \delta_2) - F_L(1, y - \delta_2),$$

.....

$$F_L(x, y - k\delta_2) - F_L(1, y - k\delta_2) =$$

$$= F_L(x, y - (k - 1)\delta_2) - F_L(1, y - (k - 1)\delta_2).$$

По определению δ_0

$$F_L(x, y - k\delta_2) - F_L(1, y - k\delta_2) = F_L(x, 0) - F_L(1, 0).$$

Таким образом, получаем, что

$$F_L(x, y) - F_L(1, y) = F_L(x, 0) - F_L(1, 0),$$

что и требовалось доказать.

Доказательство необходимости.

Пусть $\psi(x) = F_L(x, 0) - F_L(1, 0)$, $\psi_L(y) = F_L(1, y)$.

Тогда по лемме 7

$$F_L(x, y) = \psi(x) + \psi_L(y).$$

По лемме 3 $F_R(x, y) = F_L(x, y) + \psi'_R(y) - \psi'_L(y)$.

Обозначим $\psi_R(y) = \psi'_R(y) - \psi'_L(y) + \psi_L(y)$.

Тогда

$$F_R(x, y) = \psi(x) + \psi_R(y).$$

Необходимость доказана.

Список литературы

- [1] Guttman A. R-Trees: A Dynamic Index Structure for Spatial Searching // Proceedings of the 1984 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data. 1984. P. 47–57.
- [2] Korn F., Sidiropoulos N., Faloutsos C., Siegel E., Protopapas Z. Fast nearest neighbor search in medical image databases // Proceedings of International Conference on Very Large Database. Mumbai, India, 1996.
- [3] Roussopoulos N., Kelley S., Vincent F. Nearest neighbor queries // Proceedings of ACM SIGMOD International Conference on Management of Data. San Jose, USA, 1995.
- [4] Beckmann N., Kriegel H.-P., Schneider R., Seeger B. The R*-Tree: An Efficient and Robust Access Method for Points and Rectangles // Proceedings of the 1990 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data. 1990. P. 322–331.
- [5] Cheung K. L., Fu A. W. Enhanced Nearest Neighbour Search on the R-tree // SIGMOD Record. 27 (3). 1998. P. 16–21.

- [6] Benetis R., Jensen C.S., Karciuskas G., Saltenis S. Nearest and Reverse Nearest Neighbor Queries for Moving Objects // *The VLDB Journal*. 2002. P. 229–249.
- [7] Song Z., Roussopoulos N. K-Nearest Neighbor Search for Moving Query Point // *Proceedings of the 7th International Symposium on Spatial and Temporal Databases*. 2001. P. 79–96.
- [8] Seidl T., Kriegel H. Optimal multi-step k -nearest neighbor search // *Proceedings of ACM SIGMOD International Conference on Management of Data*. Seattle, USA, 1998.
- [9] Tao Y., Papadias D., Shen Q. Continuous Nearest Neighbor Search // *VLDB*. 2002.
- [10] Gedik B., Liu L. MobiEyes: A distributed location monitoring service using moving location queries // *IEEE TMC*. 5 (10). 2006. P. 1384–1402.
- [11] Atallah M. Dynamic Computational Geometry // *Proc. 24th Annu. IEEE Sympos. Found. Comput. Sci.* 1983.
- [12] Гасанов Э. Э., Кудрявцев В. Б. Теория хранения и поиска информации. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
- [13] Лапшов И. С. Динамические базы данных с оптимальной по порядку временной сложности // *Дискретная математика*. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 89–100.
- [14] Arge L., Jeffrey S. Vitter Optimal Dynamic Interval Management in External Memory // *FOCS'96 Proceedings of the 37th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*.
- [15] Kanellakis P.C., Ramaswamy S., Vengroff D.E., Vitter J.S. Indexing for data models with constraints and classes // *Proceeding PODS'93 Proceedings of the twelfth ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART symposium on Principles of database systems*.
- [16] Скиба Е. А. Логарифмическое решение задачи об опасной близости // *Интеллектуальные системы*. 2007. Т. 11, вып. 1–4. С. 693–719.
- [17] Снегова Е. А. Случай задачи об опасной близости, сводящийся к одномерному интервальному поиску // *Интеллектуальные системы*. 2009. Т. 13, вып. 1–4. С. 97–118.
- [18] Булинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. М., 2001.