О некоторых свойствах классов Шефера

Е. А. Поцелуевская

Вопрос о размерах и свойствах классов Шефера глубоко изучался начиная с момента описания этих классов самим Шефером. В частности, значительный вклад в изучение данного вопроса внесли работы авторов Алексеева В. Б., Горшкова С. П., Гизунова С. А., Носова В. А. и Тарасова А. В. В данной статье рассматриваются некоторые частные свойства классов Шефера, которые могли бы быть полезными для быстрого решения задачи об F-выполнимости или, напротив, для формирования задач, сложных для решения.

Ключевые слова: классы Шефера, F-выполнимость, предполнота, алгоритм.

1. Введение

Проблема выполнимости булевых формул — это одна из классических NP-полных задач, для которой поиск быстрых способов решения, равно как и нахождение наиболее труднорешаемых формулировок, имеет большую практическую ценность. Для обобщенной проблемы выполнимости, называемой F-выполнимостью, Шефером были получены классы задач, решаемых за полиномиальное время. В настоящей работе для данных классов приводится доказательство свойства, аналогичного свойству предполноты. Свойство заключается в том, что в результате добавления к классу Шефера, для которого задача решалась полиномиально, произвольной ненулевой функции, можно получить NP-полную задачу. Кроме того, в работе предпринята попытка решить противоположную проблему, а именно приблизить функции, для которых задача NP-полна, к классам Шефера.

Для этого приведен алгоритм, позволяющий перевести функцию, не лежащую в классе Шефера, в нужный класс фиксацией переменных.

2. Основные понятия и утверждения

В своей работе *The complexity of satisfiability problems* [1] Шефер выделил следующие классы булевых функций:

- 0-выполнимые функции (обозначим 0-ВЫП): все функции f, для которых верно $f(0,\dots,0)=1$;
- 1-выполнимые функции (обозначим 1-ВЫП): все функции f, для которых верно $f(1,\dots,1)=1$;
- слабоотрицательные функции (СЛО): все функции f, для которых существует запись в конъюнктивной нормальной форме (КНФ), в которой каждая скобка содержит только переменные с отрицаниями кроме, быть может, одной, то есть формула вида: $(x_{i_1}^{\alpha}\vee \bar{x_{i_2}}\vee\dots\vee \bar{x_{i_k}})(x_{j_1}^{\beta}\vee \bar{x_{j_2}}\vee\dots\vee \bar{x_{j_l}})\dots(x_{t_1}^{\gamma}\vee \bar{x_{t_2}}\vee\dots\vee \bar{x_{t_k}})$, где $(\alpha,\beta,\dots,\gamma$ — булевы константы).
- слабоположительные функции (СЛП): все функции f, для которых существует запись в КНФ, в которой каждая скобка содержит только переменные без отрицаний, кроме, быть может, одной, то есть формула вида: $(x_{i_1}^{\alpha}\vee x_{i_2}\vee\dots\vee x_{i_k})(x_{j_1}^{\beta}\vee x_{j_2}\vee\dots\vee x_{j_l})\dots(x_{t_1}^{\gamma}\vee x_{t_2}\vee\dots\vee x_{t_k})$, где $(\alpha,\beta,\dots,\gamma$ — булевы константы).
- мультиаффинные функции (МАФ): все функции f, которым соответствует формула, представляющая собой конъюнкцию линейных форм, то есть формула вида: $(a_1x_1+\dots a_nx_n+a_0)(b_1x_1+\dots b_nx_n+b_0)\dots(c_1x_1+\dots c_nx_n+c_0)$, где $(a_i,b_i,\dots,c_i$ — булевы константы).
- биюнктивные функции (БИН): все функции f, для которых существует запись в КНФ, где каждая скобка содержит ровно две переменные, то есть формула вида $(x_{i_1}^{\alpha_1}\vee x_{i_2}^{\alpha_2})(x_{j_1}^{\beta_1}\vee x_{j_2}^{\beta_2})\dots(x_{t_1}^{\gamma_1}\vee x_{t_2}^{\gamma_2})$, где $(\alpha_i,\beta_i,\dots,\gamma_i$ — булевы константы).

Сформулируем задачу об F-выполнимости. Пусть дано $F=F_1,\dots,F_m$ — любое конечное множество формул (функциональных символов). Определим F-формулу как конъюнкцию

$F_{i_1}(\cdot)F_{i_2}(\cdot)\ldots F_{i_k}(\cdot)$ с переменными $x_1,\ldots,x_n$, расставленными некоторым образом. Существует ли набор значений переменных $x_1=\sigma_1$, $\ldots, x_n=\sigma_n$, обращающий F-формулу в единицу?

Важный результат Шефера состоит в следующем.

Теорема 1. *Проблема F-выполнимости полиномиально разрешима, если все функции F_i из множества F одновременно удовлетворяют, по крайней мере, одному из условий:*

- $F_i(0,\ldots,0)=1$*;*
- $F_i(1,\ldots,1)=1$*;*
- F_i *— мультиаффинна;*
- F_i *— биюнктивна;*
- F_i *— слабоположительна;*
- F_i *— слабоотрицательна.*

В противном случае проблема F-выполнимости является NP-полной.

Для классов Шефера СЛО, СЛП, МАФ и БИН С. А. Гизуновым и В. А. Носовым в работе [2] были сформулированы следующие критерии распознавания:

- $f\in$ СЛО тогда и только тогда, когда $\forall\alpha,\beta\in\{0,1\}^n$:
$$\overline{f}(\alpha\wedge\beta)f(\alpha)f(\beta)=0;$$
- $f\in$ СЛП тогда и только тогда, когда $\forall\alpha,\beta\in\{0,1\}^n$:
$$\overline{f}(\alpha\vee\beta)f(\alpha)f(\beta)=0;$$
- $f\in$ МАФ тогда и только тогда, когда $\forall\alpha,\beta,\gamma\in\{0,1\}^n$:
$$\overline{f}(\alpha\oplus\beta\oplus\gamma)f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)=0;$$
- $f\in$ БИН тогда и только тогда, когда $\forall\alpha,\beta,\gamma\in\{0,1\}^n$:
$$\overline{f}(\alpha\beta\oplus\beta\gamma\oplus\alpha\gamma)f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)=0.$$

3. «Предполнота» классов Шефера

Рассмотрим оператор замыкания относительно операций, используемых для составления F-формул $[\cdot]$:

- Переименование переменных. Если M — класс булевых функций, а $h(x'_1, \dots, x'_n)$ — получена из $f(x_1, \dots, x_n) \in M$ переименованием переменных (то есть для любого набора $\sigma \in 0, 1^n$ выполнено: $h(\sigma) = f(\sigma)$), то $h \in [M]$.
- Склеивание переменных. Если M — класс булевых функций, а
$$h(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$$
получена из $f(x_1, \dots, x_n) \in M$ склеиванием переменных x_i и x_j, то есть для любого набора $\sigma \in 0, 1^n$ выполнено:
$$h(\sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_{j-1}, \sigma_{j+1}, \dots, \sigma_n) = \\ = f(\sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_{j-1}, \sigma_j, \sigma_{j+1}, \dots, \sigma_n)),$$
то $h \in [M]$.
- Конъюнкция. Если M — класс булевых функций, то для любых двух функций $f_1, f_2 \in M$ их конъюнкция содержится в замыкании: $f_1 f_2 \in [M]$.

Утверждение 1. *Классы Шефера (0-ВЫП, 1-ВЫП, СЛП, СЛО, МАФ и БИН) являются замкнутыми классами относительно оператора* $[\cdot]$.

Доказательство. Доказательство следует непосредственно из определения классов.

Докажем следующую теорему, характеризующую свойство классов Шефера, в некотором смысле аналогичное понятию предполноты замкнутых классов. Для любого класса Шефера (0-ВЫП, 1-ВЫП, СЛП, СЛО, МАФ, БИН) при добавлении к этому классу ненулевой функции, не лежащей в нем, можно получить функцию, не лежащую ни в одном из классов.

Теорема 2. *Пусть M — один из классов Шефера (0-ВЫП, 1-ВЫП, СЛП, СЛО, МАФ, БИН), $g \notin M$. Тогда существует $h \in [M \cup g]$, $h \neq 0$, такая что $h \notin \{$0-ВЫП$\cup$ 1-ВЫП$\cup$ СЛП$\cup$ СЛО$\cup$ МАФ$\cup$ БИН$\}$.*

Доказательство. Докажем теорему для каждого из классов:

1) 0-ВЫП. Для любой функции $f \in M$ выполнено $f(0,\dots,0) = 1$. К классу 0-ВЫП добавляем функцию g, для которой $g(0,\dots,0) = 0$. Будем рассматривать конъюнкцию функции g и некоторых функций из M (0-ВЫП), чтобы получить h. При этом переменные в F-формуле расставим таким образом, что множество переменных, входящие в функции из 0-ВЫП, не пересекается с множеством переменных, от которых зависит g. Так как для любой функции f из 0-ВЫП $f(0,\dots,0) = 1$, а $g(0,\dots,0) = 0$, то $h(0,\dots,0) = fg(0,\dots,0) = f(0,\dots,0)g(0,\dots,0) = 0$, то есть полученная функция будет не из 0-ВЫП.
Так как функция $g \neq 0$, то существует набор $\sigma = (\sigma_1,\dots,\sigma_k)$, такой что $g(\sigma_1,\dots,\sigma_k) = 1$. Далее, чтобы h не лежала ни в одном из остальных классов, должны быть выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} h(1,\dots,1) = 0; \\ \exists \alpha^1, \beta^1 \in \{0,1\}^n : \ \overline{h}(\alpha^1 \wedge \beta^1) h(\alpha^1) h(\beta^1) = 1; \\ \exists \alpha^2, \beta^2 \in \{0,1\}^n : \ \overline{h}(\alpha^2 \vee \beta^2) h(\alpha^2) h(\beta^2) = 1; \\ \exists \alpha^3, \beta^3, \gamma^3 \in \{0,1\}^n : \ \overline{h}(\alpha^3 \oplus \beta^3 \oplus \gamma^3) h(\alpha^3) h(\beta^3) h(\gamma^3) = 1; \\ \exists \alpha^4, \beta^4, \gamma^4 \in \{0,1\}^n : \overline{h}(\alpha^4\beta^4 \oplus \beta^4\gamma^4 \oplus \alpha^4\gamma^4) h(\alpha^4) h(\beta^4) h(\gamma^4) = 1. \end{cases}$$

Для того, чтобы эти условия были выполнены для h, достаточно составить F-формулу из g и функции $f \in M$, такой что f не принадлежит ни одному из остальных классов. Проверим это утверждение для каждого из условий:

- Если $f \notin$ 1-ВЫП, то $f(1,\dots,1) = 0$. Значит,

  $$h(1,\dots,1) = fg(1,\dots,1) = f(1,\dots,1)g(1,\dots,1) = 0,$$

  то есть $h \notin$ 1-ВЫП.
- Если $f \notin$ СЛО, то $\exists \alpha, \beta \in \{0,1\}^m : \ \overline{f}(\alpha \wedge \beta) f(\alpha) f(\beta) = 1$. Для функции $h = fg$ рассмотрим следующие два набора: $\alpha^1 = (\alpha_1,\dots,\alpha_m,\sigma_1,\dots,\sigma_k) = \alpha\sigma$ и $\beta^1 = (\beta_1,\dots,\beta_m, \sigma_1,\dots,\sigma_k) = \beta\sigma$. Тогда условие для h имеет вид:

$$\begin{aligned}\overline{h}(\alpha^1 \wedge \beta^1)h(\alpha^1)h(\beta^1) = \overline{fg}(\alpha^1 \wedge \beta^1)fg(\alpha^1)fg(\beta^1) = \\ = (\overline{f}(\alpha \wedge \beta) \vee \overline{g}(\sigma))fg(\alpha^1)fg(\beta^1) = \\ = \underbrace{\overline{f}(\alpha \wedge \beta)f(\alpha)f(\beta)}_{1}g(\sigma) = 1.\end{aligned}$$

То есть условие для h выполнено и $h \notin$ СЛО.

- Если $f \notin$ СЛП, то $\exists \alpha, \beta \in \{0,1\}^m :\ \overline{f}(\alpha \vee \beta)f(\alpha)f(\beta) = 1$. Для функции $h = fg$ рассмотрим следующие два набора: $\alpha^2 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \sigma_1, \ldots, \sigma_k) = \alpha\sigma$ и $\beta^2 = (\beta_1, \ldots, \beta_m, \sigma_1, \ldots, \sigma_k) = \beta\sigma$. Тогда условие для h имеет вид:

$$\begin{aligned}\overline{h}(\alpha^2 \vee \beta^2)h(\alpha^2)h(\beta^2) = \overline{fg}(\alpha^2 \vee \beta^2)fg(\alpha^2)fg(\beta^2) = \\ = (\overline{f}(\alpha \vee \beta) \vee \overline{g}(\sigma))fg(\alpha^2)fg(\beta^2) = \\ = \underbrace{\overline{f}(\alpha \vee \beta)f(\alpha)f(\beta)}_{1}g(\sigma) = 1.\end{aligned}$$

То есть условие для h выполнено и $h \notin$ СЛП.

- Если $f \notin$ МАФ, то $\exists \alpha, \beta, \gamma \in \{0,1\}^m :\ \overline{f}(\alpha \oplus \beta \oplus \gamma) f(\alpha)f(\beta)f(\gamma) = 1$. Для функции $h = fg$ рассмотрим следующие три набора: $\alpha^3 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \sigma_1, \ldots, \sigma_k) = \alpha\sigma$, $\beta^3 = (\beta_1, \ldots, \beta_m, \sigma_1, \ldots, \sigma_k) = \beta\sigma$ и $\gamma^3 = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \sigma_1, \ldots, \sigma_k) = \gamma\sigma$. Тогда условие для h имеет вид:

$$\begin{aligned}\overline{h}(\alpha^3 \oplus \beta^3 \oplus \gamma^3)h(\alpha^3)h(\beta^3)h(\gamma^3) = \\ = \overline{fg}(\alpha^3 \oplus \beta^3 \oplus \gamma^3)fg(\alpha^3)fg(\beta^3)fg(\gamma^3) = \\ = (\overline{f}(\alpha \oplus \beta \oplus \gamma) \vee \overline{g}(\sigma))fg(\alpha^3)fg(\beta^3)fg(\gamma^3) = \\ = \underbrace{\overline{f}(\alpha \oplus \beta \oplus \gamma)f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)}_{1}g(\sigma) = 1.\end{aligned}$$

То есть условие для h выполнено и $h \notin$ МАФ.

- Если $f \notin$ БИН, то

$$\exists \alpha, \beta, \gamma \in \{0,1\}^m :\ \overline{f}(\alpha\beta \oplus \beta\gamma \oplus \alpha\gamma)f(\alpha)f(\beta)f(\gamma) = 1.$$

Для функции $h = fg$ рассмотрим следующие три набора: $\alpha^4 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \sigma_1, \ldots, \sigma_k) = \alpha\sigma$, $\beta^4 = (\beta_1, \ldots, \beta_m, \sigma_1, \ldots, \sigma_k) = \beta\sigma$ и $\gamma^4 = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \sigma_1, \ldots, \sigma_k) = \gamma\sigma$. Тогда условие для h имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\overline{h}(\alpha^4\beta^4 \oplus \beta^4\gamma^4 \oplus \alpha^4\gamma^4)h(\alpha^4)h(\beta^4)h(\gamma^4) = \\
&\quad = \overline{fg}(\alpha^4\beta^4 \oplus \beta^4\gamma^4 \oplus \alpha^4\gamma^4)fg(\alpha^4)fg(\beta^4)fg(\gamma^4) = \\
&\quad = (\overline{f}(\alpha\beta \oplus \beta\gamma \oplus \alpha\gamma) \vee \overline{g}(\sigma))fg(\alpha^4)fg(\beta^4)fg(\gamma^4) = \\
&\quad = \underbrace{\overline{f}(\alpha\beta \oplus \beta\gamma \oplus \alpha\gamma)f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)}_{1}g(\sigma) = 1.
\end{aligned}$$

То есть условие для h выполнено и $h \notin$ БИН.

Таким образом, если выбрать функцию $f \in$ 0-ВЫП такую, что $f \notin \{$1-ВЫП $\cup$ СЛО $\cup$ СЛП $\cup$ МАФ $\cup$ БИН$\}$, то получим подходящую h. Такая функция f в класса 0-ВЫП существует: например, можно взять функцию $f = \bar{x_1}\bar{x_2}\bar{x_3} \vee x_1\bar{x_2}x_3 \vee x_1x_2\bar{x_3}$. Для нее $f(0,0,0) = 1$, $f(1,1,1) = 0$, в условиях для остальных классов рассматриваем $\alpha = (1,0,1)$, $\beta = (1,1,0)$, $\gamma = (0,0,0)$.

2) Для класса 1-ВЫП доказательство аналогично. Достаточно взять функцию $f \in$ 1-ВЫП, такую что $f \notin \{$0-ВЫП $\cup$ СЛО $\cup$ СЛП $\cup$ МАФ $\cup$ БИН$\}$. Можно взять функцию $f = \bar{x_1}x_2\bar{x_3} \vee x_1\bar{x_2}\bar{x_3} \vee x_1x_2x_3$. Для нее:

$$f(1,1,1) = 1, \ \ f(0,0,0) = 0,$$

в условиях для остальных классов рассматриваем $\alpha = (0,1,0)$, $\beta = (1,0,0)$, $\gamma = (1,1,1)$.

3) Для класса СЛО доказательство аналогично. Достаточно взять функцию $f \in$ СЛО, такую что $f \notin \{$0-ВЫП $\cup$ 1-ВЫП $\cup$ СЛП $\cup$ МАФ $\cup$ БИН$\}$. Пусть $f = \bar{x_1}x_2x_3x_4 \vee \bar{x_2}x_3x_4 \vee \bar{x_3}x_4$. Для нее:

$$f(0,0,0,0) = 0, \ \ f(1,1,1,1) = 0,$$

для всех наборов α, β выполнено $\overline{f}(\alpha \wedge \beta)f(\alpha)f(\beta) = 0$. В условиях для остальных классов рассматриваем $\alpha = (0,1,1,1)$, $\beta = (1,0,1,1)$. В условии для МАФ рассматриваем $\gamma = (0,0,1,1)$, в условии для БИН: $\gamma = (1,1,0,1)$.

4) Для класса СЛП доказательство аналогично. Достаточно взять функцию $f \in$ СЛП, такую что $f \notin \{$0-ВЫП $\cup$ 1-ВЫП $\cup$ СЛО $\cup$ МАФ $\cup$ БИН$\}$. Рассмотрим $f = \bar{x_2}x_3\bar{x_4} \vee x_2\bar{x_3}\bar{x_4} \vee x_2x_2\bar{x_4} \vee x_1\bar{x_2}\bar{x_3}\bar{x_4}$. Для нее:

$$f(0,0,0,0)=0, \quad f(1,1,1,1)=0,$$

для всех наборов α, β выполнено $\overline{f}(\alpha \vee \beta)f(\alpha)f(\beta)=0$. В условиях для остальных классов рассматриваем $\alpha=(0,0,1,0)$, $\beta=(0,1,0,0)$. В условии для МАФ рассматриваем $\gamma=(0,1,1,0)$. В условии для БИН рассматриваем $\gamma=(1,0,0,0)$.

5) Для класса МАФ доказательство аналогично. Достаточно взять функцию $f \in$ МАФ, такую что $f \notin \{$0-ВЫП $\cup$ 1-ВЫП $\cup$ СЛО $\cup$ СЛП$\cup$БИН$\}$. Возьмем $f = x_1x_2\bar{x_4} \vee x_1\bar{x_2}\bar{x_3}\bar{x_4} \vee x_1\bar{x_2}x_3x_4$. Для нее $f(0,0,0,0)=0$, $f(1,1,1,1)=0$, для любых α, β, γ выполнено:

$$\overline{f}(\alpha \oplus \beta \oplus \gamma)f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)=0.$$

В условиях для остальных классов рассматриваем $\alpha=(1,0,1,1)$, $\beta=(1,1,0,1)$, $\gamma=(1,1,1,0)$.

6) Для класса БИН доказательство аналогично. Достаточно взять функцию $f \in$ БИН, такую что $f \notin \{$0-ВЫП $\cup$ 1-ВЫП $\cup$ СЛО $\cup$ СЛП $\cup$ МАФ$\}$. Выберем $f = \bar{x_1}x_2x_3 \vee x_1\bar{x_2}\bar{x_3} \vee x_1x_2\bar{x_3}$. Для нее $f(0,0,0)=0$, $f(1,1,1)=0$, для любых α, β, γ выполнено $\overline{f}(\alpha\beta \oplus \beta\gamma \oplus \alpha\gamma)f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)=0$. В условиях для остальных классов рассматриваем $\alpha=(0,1,1)$, $\beta=(1,0,0)$, $\gamma=(1,1,0)$. Теорема доказана.

4. Изменение принадлежности функции к классам Шефера при фиксации переменных

Пусть для булевой функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ известно, к каким классам Шефера она принадлежит. Выясним, к каким классам Шефера будет принадлежать функция g, полученная из f фиксацией переменных. Без потери общности, будем считать, что зафиксированы переменные $x_1=\sigma_1,\ldots,x_k=\sigma_k$.

Теорема 3. *Если $f \in$ 0-ВЫП, то:*

- *при $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) = (0, \ldots, 0)$, функция $g \in$ 0-ВЫП;*
- *при $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) \neq (0, \ldots, 0)$ функция $g \in$ 0-ВЫП тогда и только тогда, когда $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, 0, \ldots, 0) = 1$;*
- *В случае, если известен набор фиксируемых переменных и их значения: $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$, вероятность того, из произвольной функции $f \in$ 0-ВЫП указанной фиксацией переменных можно получить $g \in$ 0-ВЫП равна*

$$P_0 = \frac{2^{2^{n-k}-1}}{2^{2^n-1}}.$$

- *Вероятность получить из 0-выполнимой функции веса $\|f\| = N$ 0-выполнимую функцию g произвольной фиксацией переменных составляет*

$$P_{0,N} = \frac{2^k \sum_{i=0}^{N-2} C^i_{2^{n-k}-1} + C^{N-1}_{2^{n-k}-1}}{\sum_{i=0}^{N-1} C^i_{2^{n-k}-1} \frac{2^n-i}{2^{n-k}-i}}.$$

Доказательство. Первые два пункта утверждения очевидны.

Докажем третий пункт. Общее количество 0-выполнимых функций составляет половину от всех функций от n переменных, то есть 2^{2^n-1}. После фиксации k переменных, можно получить $2^{2^{n-k}}$ функций, из которых половина являются 0-выполнимыми. Таким образом, вероятность равна:

$$P_0 = \frac{2^{2^{n-k}-1}}{2^{2^n-1}}.$$

Пусть теперь фиксирован вес функции $\|f\| = N$, при этом $1 \leqslant N \leqslant 2^n$ (так как известно, что $f(0, \ldots, 0) = 1$). Набор k переменных и их значения σ для фиксации можно выбирать произвольно.

Посчитаем общее количество функций g, которые можно получить фиксацией k переменных:

1) В случае если был зафиксирован набор $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) = (0, \ldots, 0)$, число функций $C^k_n \sum_{i=0}^{N-1} C^i_{2^{n-k}-1}$, где C^k_n соответствует числу возможных наборов переменных для фиксации, $C^i_{2^{n-k}-1}$ — число функций g, полученных в результате фиксации и имеющих

вес $i+1$. Вес $i+1$ принимает значения от 1 до N, так как был зафиксирован набор $(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)=(0,\ldots,0)$, и про функцию g известно, что $g(0,\ldots,0)=1$.

2) Если же был зафиксирован набор $(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)\neq(0,\ldots,0)$, число функций составит $C_n^k(2^k-1)\sum_{i=0}^{N-1}C^i_{2^{n-k}}$, где C_n^k соответствует числу возможных наборов переменных для фиксации, (2^k-1) — число возможных значений фиксируемых переменных (все наборы кроме нулевого), $C^i_{2^{n-k}}$ — число функций g, полученных в результате фиксации и имеющих вес i. Вес i принимает значения от 0 до $N-1$, так как был зафиксирован набор $(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)\neq(0,\ldots,0)$, и один из наборов, на котором f принимает единичное значение (а именно, набор $(0,\ldots,0)$), не вошел в функцию g.

Таким образом, общее количество функций g, которые можно получить из f составляет

$$K=C_n^k(\sum_{i=0}^{N-1}C^i_{2^{n-k}-1}+(2^k-1)\sum_{i=0}^{N-1}C^i_{2^{n-k}})=$$
$$=C_n^k(\sum_{i=0}^{N-1}(C^i_{2^{n-k}-1}+(2^k-1)C^i_{2^{n-k}-1}\frac{2^{n-k}}{2^{n-k}-i}))=$$
$$=C_n^k(\sum_{i=0}^{N-1}C^i_{2^{n-k}-1}\frac{2^{n-k}-i+(2^k-1)2^{n-k}}{2^{n-k}-i})=$$
$$=C_n^k(\sum_{i=0}^{N-1}C^i_{2^{n-k}-1}\frac{2^n-i}{2^{n-k}-i}).$$

Найдем теперь количество 0-выполнимых функций среди функций g:

1) В случае если был зафиксирован набор $(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)=(0,\ldots,0)$, число 0-выполнимых функций составляет $C_n^k\sum_{i=0}^{N-1}C^i_{2^{n-k}-1}$ и совпадает с общим числом функций, которые можно получить при фиксации нулевого набора. Это следует из того, что исходная функция f 0-выполнима.

2) Если был зафиксирован набор $(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)\neq(0,\ldots,0)$, число 0-выполнимых функций составит $C_n^k(2^k-1)\sum_{i=0}^{N-2}C^i_{2^{n-k}-1}$, где

C_n^k соответствует числу возможных наборов переменных для фиксации, $(2^k - 1)$ — число возможных значений фиксируемых переменных (все наборы кроме нулевого), $C^i_{2^{n-k}-1}$ — число 0-выполнимых функций g, полученных в результате фиксации и имеющих вес $i+1$. Вес $i+1$ принимает значения от 1 до $N-1$, так как один из наборов, на котором f принимает единичное значение (а именно, набор $(0,\dots,0)$), не вошел в функцию g, а для набора $(\sigma_1,\dots,\sigma_k,0,\dots,0)$ фиксировано значение $g(\sigma_1,\dots,\sigma_k,0,\dots,0)=1$.

Таким образом, общее число 0-выполнимых функций, которые можно получить из f составляет

$$K_0 = C_n^k(\sum_{i=0}^{N-1} C_{2^{n-k}-1} + (2^k-1)\sum_{i=0}^{N-2} C^i_{2^{n-k}-1}) =$$

$$= C_n^k(2^k \sum_{i=0}^{N-2} C^i_{2^{n-k}-1} + C^{N-1}_{2^{n-k}-1}).$$

Вероятность получить 0-выполнимую функцию равна $P_{0,N} = \frac{K_0}{K}$. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим все 0-выполнимые функции f веса 2 от 2 переменных. Таких функций три: $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$, $\overline{x_1 \oplus x_2}$. Общее количество функций, которые можно получить всевозможными фиксациями одной из переменных 10, среди них 6 0-выполнимы:

- при фиксации $x_1 = 0$ имеем 2 функции: $\overline{x_2}$ и 1, обе функции 0-выполнимы;
- при $x_1 = 1$ имеем 3 функции: x_2, $\overline{x_2}$ и 0, из них 0-выполнима только функция $\overline{x_2}$;
- при фиксации $x_2 = 0$ имеем 2 функции: $\overline{x_1}$ и 1, обе функции 0-выполнимы;
- при $x_2 = 1$ имеем 3 функции: x_1, $\overline{x_1}$ и 0, из них 0-выполнима только функция $\overline{x_1}$.

Таким образом, вероятность получить 0-выполнимую функцию g из 0-выполнимой функции f от 2 переменных фиксацией одной переменной составляет $0,6$.

Аналогичная теорема справедлива для класса 1-ВЫП. Сформулируем ее без доказательства.

Теорема 4. *Если $f \in$ 1-ВЫП, то:*

- *при $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) = (1, \ldots, 1)$, функция $g \in$ 1-ВЫП;*
- *при $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) \neq (1, \ldots, 1)$ функция $g \in$ 1-ВЫП тогда и только тогда, когда $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, 1, \ldots, 1) = 1$;*
- *В случае, если известен набор фиксируемых переменных и их значения: $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$, вероятность того, из произвольной функции $f \in$ 1-ВЫП указанной фиксацией переменных можно получить $g \in$ 1-ВЫП равна*

$$P_1 = \frac{2^{2^{n-k}-1}}{2^{2^n-1}}.$$

- *Вероятность получить из 1-выполнимой функции веса $\|f\| = N$ 1-выполнимую функцию g произвольной фиксацией переменных составляет*

$$P_{1,N} = \frac{2^k \sum_{i=0}^{N-2} C^i_{2^{n-k}-1} + C^{N-1}_{2^{n-k}-1}}{\sum_{i=0}^{N-1} C^i_{2^{n-k}-1} \frac{2^n-i}{2^{n-k}-i}}.$$

Изучим теперь, как меняется принадлежность функции к классам Шефера при фиксации переменных для классов СЛО, СЛП, МАФ и БИН.

Теорема 5. *Пусть $f \in M$, где M — это один из классов, СЛО, СЛП, МАФ или БИН. Тогда при любой фиксации переменных полученная функция $g \in M$.*

Доказательство. Действительно, если функция лежит в каком-то из указанных классов, то выполнено одно из условий:

$$\text{СЛО: } \forall \alpha, \beta \in \{0,1\}^n : \overline{f}(\alpha \wedge \beta) f(\alpha) f(\beta) = 0 \tag{1}$$
$$\text{СЛП: } \forall \alpha, \beta \in \{0,1\}^n : \overline{f}(\alpha \vee \beta) f(\alpha) f(\beta) = 0 \tag{2}$$
$$\text{МАФ: } \forall \alpha, \beta, \gamma \in \{0,1\}^n : \overline{f}(\alpha \oplus \beta \oplus \gamma) f(\alpha) f(\beta) f(\gamma) = 0 \tag{3}$$
$$\text{БИН: } \forall \alpha, \beta, \gamma \in \{0,1\}^n : \overline{f}(\alpha\beta \oplus \beta\gamma \oplus \alpha\gamma) f(\alpha) f(\beta) f(\gamma) = 0. \tag{4}$$

Очевидно, что при фиксации некоторых из переменных $x_1, \ldots, x_n$ условия останутся выполненными, а значит класс Шефера для функции g унаследуется от функции f. Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть про функцию f известно, что $f \notin M$, где M — это один из классов, СЛО, СЛП, МАФ или БИН. Пусть g получена из f фиксацией переменных $(x_1, \ldots, x_k) = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$. Тогда верно следующее:*

- *Если среди всевозможных наборов α,β,γ, на которых нарушается условие принадлежности классу Шефера M (одно из условий (1)–(4)) для функции f, есть такие наборы α',β',γ', что*

$$\begin{cases} \alpha'_1 = \beta'_1 = \gamma'_1 = \sigma_1; \\ \ldots \\ \alpha'_k = \beta'_k = \gamma'_k = \sigma_k; \end{cases}$$

  то $g \notin M$.
- *В противном случае $g \in M$.*

Доказательство. Докажем теорему для СЛО, для остальных классов доказательство аналогично.

Пусть есть такая пара наборов α',β', что $\overline{f}(\alpha' \wedge \beta')f(\alpha')f(\beta') = 1$, при этом:

$$\alpha' = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \alpha'_{k+1}, \ldots, \alpha'_n) = \sigma\alpha'',$$
$$\beta' = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \beta'_{k+1}, \ldots, \beta'_n) = \sigma\beta''.$$

Тогда условие для f примет вид:

$$\overline{f}(\alpha' \wedge \beta')f(\alpha')f(\beta') = \overline{f}(\sigma\alpha'' \wedge \sigma\beta'')f(\sigma\alpha'')f(\sigma\beta'') = \\ = \overline{g}(\alpha'' \wedge \beta'')g(\alpha'')g(\beta'') = 1,$$

то есть $g \notin$ СЛО.

Если для всех пар наборов, α,β, для которых $\overline{f}(\alpha\wedge\beta)f(\alpha)f(\beta) = 1$ значения обоих наборов для соответствующих переменных не совпадают с σ, то получаем, что подобных условий для g нет и для всех наборов α и β выполнено $\overline{g}(\alpha\wedge\beta)g(\alpha)g(\beta) = 0$. Таким образом, $g \in$ СЛО. Теорема доказана.

5. Приближение функций к классам Шефера

Используя теорему 6, можно фиксацией переменных перевести функцию $f \notin M$ в класс Шефера M.

Определение. Будем говорить, что функция f находится *на расстоянии k от класса Шефера M*, если минимальное число переменных, которые нужно зафиксировать для f, чтобы полученная после фиксации функция $g \in M$, равно k.

Приведем алгоритм, позволяющий найти переменные, которые необходимо зафиксировать, чтобы перевести функцию в класс Шефера, и фиксируемый набор.

Входные данные:

1) Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \notin M$, где M — один из классов СЛО, СЛП, МАФ, БИН.
2) Все наборы α^1,β^1,(γ^1),…, α^m,β^m,(γ^m), где нарушается условие для соответствующего класса (одно из условий (1)–(4)).

Порядок действий:

1) Для всех наборов α^1,β^1,(γ^1),…, α^m,β^m,(γ^m), где нарушаются условия для класса Шефера, составляется матрица A размера $m \times n$, элементы которой принимают следующие значения:
   - $a_{i,j} = 0$, если $\alpha_j^i = \beta_j^i (= \gamma_j^i) = 0$;
   - $a_{i,j} = 1$, если $\alpha_j^i = \beta_j^i (= \gamma_j^i) = 1$;
   - $a_{i,j} = 2$ в противном случае, то есть если соответствующие элементы пар (троек) наборов не совпадают.
2) Положим $A^1 = A$.
3) Для всех столбцов a_j^1, $j \in \{1, \ldots, n\}$ матрицы A^1 вычисляются значения:

$$N_d(a_j^1) = |\{a_{i,j}^1, i = 1, \ldots, m \mid a_{i,j}^1 = 2\}|;$$
$$N_0(a_j^1) = |\{a_{i,j}^1, i = 1, \ldots, m \mid a_{i,j}^1 = 0\}|;$$
$$N_1(a_j^1) = |\{a_{i,j}^1, i = 1, \ldots, m \mid a_{i,j}^1 = 1\}|.$$

4) Если есть столбец $a^1_{j_1}$, для которого $N_0(a^1_{j_1}) = 0$, то переменной x_{j_1} присваивается значение $x_{j_1} = 0$. Алгоритм заканчивает работу.
5) Если есть столбец $a^t_{j_1}$, для которого $N_1(a^1_{j_1}) = 0$, то переменной x_{j_1} присваивается значение $x_{j_1} = 1$. Алгоритм заканчивает работу.
6) Выберем столбец матрицы A^1 с максимальным числом различных значений в парах (тройках) $N_d(a^1_{j_1}) = k \geqslant N_d(a^1_j)$, $j \neq j_1$.
7) Рассмотрим подматрицу
$$A^2 = \{a^2_{i,j} = a^1_{i,j} \mid i \neq i_l, \text{ где } a^1_{i_l,j_1} = 2\},$$
то есть матрицу, состоящую из строк, для которых в столбце $a^1_{j_1}$ были совпадающие значения. На следующем шаге алгоритма считаем, что $t = 2$.
8) Для всех столбцов a^t_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$ матрицы A^t вычисляются значения:
$$\begin{aligned} N_d(a^t_j) &= |\{a^t_{i,j}, i = 1, \ldots, m \mid a^t_{i,j} = 2\}|; \\ N_0(a^t_j) &= |\{a^t_{i,j}, i = 1, \ldots, m \mid a^t_{i,j} = 0\}|; \\ N_1(a^t_j) &= |\{a^t_{i,j}, i = 1, \ldots, m \mid a^t_{i,j} = 1\}|. \end{aligned}$$
9) Если есть столбец $a^t_{j_t}$, для которого $N_0(a^t_{j_t}) = 0$, то переменным $x_{j_1}, \ldots, x_{j_{t-1}}$ присваиваются произвольные значения из $\{0, 1\}$, переменной x_{j_t} присваивается значение $x_{j_t} = 0$. Алгоритм заканчивает работу.
10) Если есть столбец $a^t_{j_t}$, для которого $N_1(a^t_{j_t}) = 0$, то переменным $x_{j_1}, \ldots, x_{j_{t-1}}$ присваиваются произвольные значения из $\{0, 1\}$, переменной x_{j_t} присваивается значение $x_{j_t} = 1$. Алгоритм заканчивает работу.
11) Выберем столбец матрицы A^t с максимальным числом различных значений в парах (тройках) $N_d(a^t_{j_t}) = k \geqslant N_d(a^t_j)$, $j \neq j_t$. При этом если столбцов, удовлетворяющих этому условию, несколько, выбираем тот, для которого число различных наборов $p = |S| = |\{(a^t_{i,j_1}, a^t_{i,j_2}, \ldots, a^t_{i,j_t}) \mid a^t_{i,j_l} \neq 2\}|$ наименьшее. При этом $p \leqslant 2^t$.

12) Если $p < 2^t$, то выбираем любой набор σ, такой что $\sigma \notin S$ и присваиваем его соответствующим переменным, чтобы получить функцию g:

$$x_{j_1} = \sigma_1, \ldots, x_{j_t} = \sigma_t.$$

На этом шаге алгоритм заканчивает свою работу.

13) Если $p = 2^t$, то рассматриваем подматрицу

$$A^{t+1} = \{a_{i,j}^{t+1} = a_{i,j}^t \mid i \neq i_l, \text{ где } a_{i_l,j_t}^t = 2\},$$

то есть матрицу, состоящую из строк, для которых в столбце $a_{j_t}^t$ были совпадающие значения и переходим к шагу 8 алгоритма.

Теорема 7. *Алгоритм заканчивает работу за конечное число шагов.*

Доказательство. Если бы алгоритм зацикливался, это означало бы, что для любого t на шаге 13 алгоритма, мы имеем $p = 2^t$. В том числе это должно быть верно для $t = n$. Но это значит, что в матрице A задействованы всевозможные наборы из 0 и 1 длины n, и, в частности, в ней есть строки $(0, \ldots, 0)$ и $(1, \ldots, 1)$. Но элементы A равны 0 или 1, когда соответствующие элементы пар (троек) α, β, (γ) совпадают и равны 0 или 1 соответственно. Это значит, что условие для класса Шефера M нарушается для пары (тройки) наборов, которые полностью совпадают: $\alpha = \beta (= \gamma) = \sigma$. Но это невозможно, так как:

- СЛО: $\overline{f}(\alpha \wedge \beta) f(\alpha) f(\beta) = \overline{f}(\sigma) f(\sigma) = 0$;
- СЛП: $\overline{f}(\alpha \vee \beta) f(\alpha) f(\beta) = \overline{f}(\sigma) f(\sigma) = 0$;
- МАФ: $\overline{f}(\alpha \oplus \beta \oplus \gamma) f(\alpha) f(\beta) f(\gamma) = \overline{f}(\sigma) f(\sigma) = 0$;
- БИН: $\overline{f}(\alpha\beta \oplus \beta\gamma \oplus \alpha\gamma) f(\alpha) f(\beta) f(\gamma) = \overline{f}(\sigma) f(\sigma) = 0$.

То есть таких наборов, а значит и строк в матрице, быть не может, и на каком-то шаге $t < n$ алгоритм остановится. Теорема доказана.

Теорема 8. *При фиксации переменных функции f, полученной в результате работы алгоритма, новая функция $g \in M$.*

Доказательство. Рассмотрим различные варианты остановки алгоритма:

1) Алгоритм заканчивает работу на шаге 4 или 5. Тогда имеем: $N_0(a^1_{j_1}) = 0$ или $N_1(a^1_{j_1}) = 0$. Но это значит, что не существует таких наборов α,β, (γ), на которых нарушается условие для M, что $\alpha_{j_1} = \beta_{j_1}(= \gamma_{j_1}) = 0$ (или $\alpha_{j_1} = \beta_{j_1}(= \gamma_{j_1}) = 1$ соответственно). Значит, зафиксировав соответствующее значение x_{j_1}, по теореме 6 получим, что $g \in M$.
2) Алгоритм заканчивает работу на шаге 9 или 10. Пусть зафиксировали значение $(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{t-1}}, x_{j_t}) = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{t-1}, \delta)$ (где $\delta = 0$ если функция заканчивает работу на шаге 9 и $\delta = 1$ иначе). Тогда всем строкам матрицы A, для которых $a_{i,j_l} = 2$ для некоторого $l = 1, \ldots, t$, соответствуют пары (тройки) наборов, для которых не выполнено:

$$\begin{cases} \alpha_{j_i} = \beta_{j_i}(= \gamma_{j_i}) = \sigma_i, \ i = 0, \ldots, t-1 \\ \alpha_{j_t} = \beta_{j_t}(= \gamma_{j_t}) = \delta \end{cases}$$

   Для остальных строк матрицы нарушается равенство $\alpha_{j_1} = \beta_{j_1}(= \gamma_{j_1}) = \delta$. Таким образом, по теореме 6 имеем, что $g \in M$.
3) Алгоритм заканчивает работу на шаге 12. Тогда зафиксирован некий набор $\sigma \notin S$. Всем строкам матрицы A, для которых $a_{i,j_l} = 2$ для некоторого $l = 1, \ldots, t$, соответствуют пары (тройки) наборов, для которых не выполнено: $\alpha_{j_i} = \beta_{j_i}(= \gamma_{j_i}) = \sigma_i$, $i = 0, \ldots, t-1$. Для остальных строк матрицы A значения переменных в парах (тройках) наборах также не совпадут с зафиксированным набором σ в силу выбора этого набора. Тогда по теореме 6 имеем, что $g \in M$. Теорема доказана.

Теорема 9. *Количество переменных, которые фиксируются для функции f, в результате работы алгоритма, минимально.*

Доказательство. Докажем теорему индукцией по минимальному числу фиксируемых переменных.

База индукции. Пусть минимальное количество переменных $k = 1$. Если матрица A такая, что есть столбец $a^1_{j_1}$, для которого $N_0(a^1_{j_1}) = 0$ или $N_0(a^1_{j_1}) = 1$, то на шаге 4 или 5 алгоритма будет зафиксирована одна переменная и алгоритм остановится. Это минимальное значение. Если же такого столбца в матрице A нет, то для любого столбца a_j имеем $N_0(a_j^1) > 0$ и $N_1(a_j^1) > 0$. Если зафиксировать только одну переменную $x_j = \delta$, для любого столбца найдется строка с соответствующим значением переменной. А это значит, что найдется пара (тройка) α, β, (γ), где $\alpha_j = \beta_j (= \gamma_j) = \delta$, и по теореме 6 получаем, что $g \notin M$. Значит минимальное число переменных, которые необходимо зафиксировать для функции f $k \geqslant 2$.

Индуктивный переход. Пусть теорема доказана для $k \leqslant t-1$. Докажем ее для $k = t$. Пусть для подматрицы A^t существует столбец $a_{j_t}^t$, для которого $N_0(a_{j_t}^t) = 0$ или $N_1(a_{j_t}^t) = 0$. Тогда в результате работы алгоритма будет зафиксировано t переменных, то есть минимально возможное количество.

Если для матрицы A^t есть такой столбец a_{j_t}, что для него $p < 2^t$, то в результате работы алгоритма фиксируется набор из t переменных, что также соответствует минимальному количеству.

Если же для любого столбца a_j, имеем $p = 2^t$, то после фиксации любого набора из t переменных $(x_{l_1}, \ldots, x_{l_t}) = (\delta_1, \ldots, \delta_t)$ получим, что найдется пара (тройка) $\alpha, \beta, (\gamma)$, где:

$$\begin{cases} \alpha_{l_1} = \beta_{l_1} (= \gamma_{l_1}) = \delta_1 \\ \ldots \\ \alpha_{l_t} = \beta_{l_t} (= \gamma_{l_t}) = \delta_t \end{cases}$$

и по теореме 6 получаем, что $g \notin M$. Значит, в этом случае фиксации t переменных не достаточно и $k \geqslant t+1$. Теорема доказана.

Автор работы выражает признательность В. А. Носову за научное руководство.

Список литературы

[1] Schaefer T. J. The complexity of satisfiability problems // Proceedings of the 10th ACM Symposium on Theory of Computing. 1978. P. 216–226.

[2] Гизунов С. А., Носов В. А. Сложность распознавания классов Шефера // Вестник МГУ. Сер. 1. 1995.