

Некоторые классы функций, вычисляемые автоматами

И. Е. Иванов

В работе описаны замкнутые классы вычисляемых функций, вычисляемых конечными автоматами, автоматами с магазинной памятью и автоматами с 2 магазинами.

Ключевые слова: автомат, автомат с магазинной памятью, вычисляемая функция.

Введение

Согласно классификации формальных языков Хомского каждому типу языка сопоставлен акцептор — вычислительное устройство, распознающее данный язык. Для регулярных языков акцептором является конечный автомат, для контекстно-свободных — автомат с магазинной памятью, для контекстно-зависимых — линейно-ограниченная машина Тьюринга, для языков, порожденных грамматиками общего вида, — машина Тьюринга.

Аналогично, можно классифицировать и функции $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ по типу вычисляющего устройства. Хорошо известен класс вычисляемых функций, то есть функций, вычисляемых машиной Тьюринга. В работе исследуются классы функций, вычисляемых конечными автоматами, автоматами с магазинной памятью, автоматами с 2 магазинами.

1. Класс вычислимых функций, вычисляемых конечными автоматами

Пусть V — инициальный конечный детерминированный автомат (далее просто автомат)

$$V = \{A, Q, B, \varphi, \psi, q_0\},$$

где $A = B = \{0, 1\}$, $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_{n-1}\}$, $\varphi : Q \times A \rightarrow Q$, $\psi : Q \times A \rightarrow B$. Функционирование автомата определяется его каноническими уравнениями:

$$\begin{cases} q(0) = q_0, \\ q(t+1) = \varphi(q(t), a(t)), \\ b(t) = \psi(q(t), a(t)), \end{cases}$$

которые задают отображение $h: E_2^\infty \rightarrow E_2^\infty$.

Пусть $f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$. Будем говорить, что автомат V вычисляет функцию f , если для любого натурального n при подаче слова вида $0^k 1^{n+1} 0^\infty$ автомат выдает последовательность вида $0^l 1^{f(n)+1} 0^\infty$, где $k, l \in \mathbb{Z}_+$.

Опишем класс вычислимых автоматом функций.

Скажем, что функция $f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ — периодическая с пред-периодом $X \in \mathbb{Z}_+$ и периодом $d \in \mathbb{Z}_+$, если для любого $x \geq X$ $f(x+d) = f(x)$.

Скажем, что $f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ — ограниченная функция, если для любого x выполнено $f(x) < M$, где $M \in \mathbb{N}$. В противном случае будем говорить, что функция f неограничена.

Утверждение 1. Пусть $f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ — ограниченная вычислимая автоматом функция. Тогда f — периодическая.

Доказательство. Пусть V — автомат, реализующий f . Рассмотрим последовательность $\{r_k\}_{k=0}^{+\infty}$ элементов из Q такую, что $r_0 = q_0$, $r_k = \varphi(r_{k-1}, 1)$. Очевидно, она является периодической.

Так как f — ограниченная функция, будем считать, что последовательность $\{p_k\}_{k=1}^{+\infty}$, определенная из соотношений $p_i = \psi(r_i, 1)$ будет состоять лишь из одних нулей. В противном случае либо функция

неограничена, либо постоянна с некоторого момента. Значит, единицы автомат начнет выдавать только после того, как получит на вход ноль. А это означает, что значение функции зависит лишь от состояния, в котором автомат получил ноль на вход. Отсюда заключаем, что f — периодическая. Утверждение доказано.

Утверждение 2. Пусть $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ — неограниченная вычисляемая автоматом функция. Тогда, начиная с некоторого момента,

$$f(x) = x + b(x),$$

где $b : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}$ — периодическая функция.

Доказательство. Пусть V — автомат, реализующий f . Рассмотрим последовательность $\{r_k\}_{k=0}^{+\infty}$ элементов из Q такую, что $r_0 = q_0$, $r_k = \varphi(r_{k-1}, 1)$. Очевидно, она является периодической. Так как f — неограниченная функция, то последовательность $\{p_k\}$ содержит бесконечно единиц, то есть с некоторого момента постоянна (иначе функция была бы ограниченной). Значит, с некоторого номера s последовательность p_k будет постоянной и будет равняться 1. Из существования таких номеров i, d , что будет выполнено для любых $k > i$ $r_k = r_{k+d}$ получаем, что для любого $x \geq i$ $f(x+d) = f(x) + d$, что равносильно заявленному. Утверждение доказано.

Утверждение 3. Пусть $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ такова, что с некоторого момента выполнено

$$f(x) = ax + b(x),$$

где $a \in \{0, 1\}$, $a, b : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}$ — некоторая периодическая функция. Тогда f вычисляемая автоматом функция.

Доказательство. Будем считать, что $b(x)$ — периодическая функция без предпериода и с периодом d . Введем следующие обозначения:

$$f_i = f(i), \quad i = 0, \dots, X + d.$$

Диаграмма Мура автомата, вычисляющего $f(x)$, приведена на рис. 1.

Заметим, что данный автомат определен только на сверхсловах вида $\alpha = 0^k 1^{n+1} 0^\infty$, где $k, n \in \mathbb{Z}_+$. Если автомат получает слово другого вида, то будем считать, что он переходит в состояние q_F . Утверждение доказано.

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 1. $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ — вычислимая автоматом функция тогда и только тогда, когда с некоторого момента выполнено

$$f(x) = ax + b(x),$$

где $a \in \{0, 1\}$, $a, b : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}$ — некоторая периодическая функция.

Замечание. Класс вычислимых автоматом функций замкнут относительно суперпозиции, так как автомат, вычисляющий суперпозицию функций, можно получить суперпозицией автоматов, вычисляющих данные функции.

2. Класс вычислимых функций, вычисляемых автоматом с магазином

Инициальным детерминированным автоматом с магазиной памятью будем называть «девятку»

$$P = \{A, Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\},$$

где A — входной алфавит, Q — конечное множество состояний, B — выходной алфавит, Γ — алфавит памяти (алфавит ленты магазина), $\varphi : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda) \rightarrow Q$ — функция переходов, $\psi : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda) \rightarrow B$ — функция выхода, $\eta : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda) \rightarrow \Gamma^*$ — функция памяти, $q_0 \in Q$ — начальное состояние, $\gamma_0 \in \Gamma^*$ — начальная запись в магазине.

Функционирование P можно определить с помощью системы канонических уравнений, которые задают в каждый момент времени t состояние автомата $q(t)$, записанное в магазине слово $\gamma(t)$, и выход автомата $b(t)$ при подаче на вход $a(t)$:

$$\begin{cases} q(0) = q_0, \\ \gamma(0) = \gamma_0, \\ z(t) = LS(\gamma(t)), \\ q(t+1) = \varphi(a(t), q(t), z(t)), \\ \gamma(t+1) = S(\gamma(t))\eta(a(t), q(t), z(t)), \\ b(t) = \psi(a(t), q(t), z(t)), \end{cases}$$

где $LS : \Gamma^* \rightarrow \Gamma \cup \{\lambda\}$ возвращает последний символ при подаче непустого слова и $LS(\lambda) = \lambda$, а $S : \Gamma^* \rightarrow \Gamma^*$ — стирает последний символ входного слова и $S(\lambda) = \lambda$.

Автомат с магазинной памятью определяет детерминированную функцию $f : A^* \rightarrow B^*$. Обозначим $\mathcal{M}(A, B)$ множество детерминированных функций, порождаемых автоматами с магазинной памятью. Отметим, что $\mathcal{M}(A, B)$ содержит множество ограниченно-детерминированных функций (при $\Gamma = \emptyset$).

Пусть фиксировано $\alpha = a(0) \dots a(t) \dots \in A^\infty$. Тогда система уравнений один задает последовательности $\{\gamma_\alpha(t)\}$, $\{z_\alpha(t)\}$, $\{q_\alpha(t)\}$, $\{b_\alpha(t)\}$, то есть:

$$\begin{cases} q_\alpha(0) = q_0, \\ \gamma_\alpha(0) = \gamma_0, \\ z_\alpha(t) = LS(\gamma_\alpha(t)), \\ q_\alpha(t+1) = \varphi(a(t), q_\alpha(t), z_\alpha(t)), \\ \gamma(t+1)_\alpha = S(\gamma_\alpha(t))\eta(a(t), q_\alpha(t), z_\alpha(t)), \\ b_\alpha(t) = \psi(a(t), q_\alpha(t), z_\alpha(t)). \end{cases}$$

Пусть $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$. Будем говорить, что автомат с магазинной памятью P вычисляет функцию f , если для любого натурального n при подаче слова вида $0^k 1^{n+1} 0^\infty$ автомат выдает последовательность вида $0^l 1^{f(n)+1} 0^\infty$, где $k, l \in \mathbb{Z}_+$.

Опишем класс функций, вычисляемых автоматом с магазинной памятью.

Утверждение 4. Пусть $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ такова, что для некоторого $d \in \mathbb{N}$ с некоторого момента

$$f(x+d) = f(x) + p(x),$$

где $p : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ — периодическая функция. Тогда существует автомат с магазинной памятью P , вычисляющий f .

Доказательство. Будем считать, что $p(x)$ — периодическая функция без предпериода и с периодом d . Пусть $f(x+d) = f(x) + p(x)$ выполняется для любого $x > X$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} f_i &= f(i), \quad i = 0, \dots, X+d, \\ c_i &= p(X+i), \quad i = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

На рис. 2 приведена диаграмма автомата с магазинной памятью, вычисляющего $f(x)$. Переходы автомата описываются следующим шаблоном $a/z/b/\eta$, то есть из данного состояния, при подаче на вход символа a и верхнего символа магазина z , автомат записывает на выходную ленту b , а в магазине стирает последний символ и дописывает слово η . Следующее состояние указывает стрелка.

Заметим, что данный автомат определен только на сверхсловах вида $\alpha = 0^k 1^{n+1} 0^\infty$, где $k, n \in \mathbb{Z}_+$. Если автомат получает слово другого вида, то будем считать, что он переходит в состояние q_F . Утверждение доказано.

Для доказательства обратного утверждения нам потребуется серия вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Пусть $P = \{A, Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\}$ — автомат с магазинной памятью. Если последовательность $|\gamma_\alpha(t)|$ равномерно ограничена на множестве всех сверхслов, то есть

$$\exists M \forall \alpha \in A^\infty \forall t \quad |\gamma_\alpha(t)| < M,$$

то отображение $A^* \rightarrow B^*$ является ограничено-детерминированным.

Доказательство. Построим конечный автомат $V = \{A, Q', B, \varphi', \psi', q_0\}$, реализующий данное отображение $A^* \rightarrow B^*$. Множество состояний возьмем

$$Q' = Q \times \Gamma^M.$$

Функцию выхода определим $\varphi' : A \times Q' \rightarrow Q'$ исходя из :

$$\varphi'(a, (q, \gamma)) = (\varphi(a, q, z), S(\gamma)\eta(a, q, z)),$$

а функцию выхода $\psi' : A \times Q' \rightarrow B$:

$$\psi'(a, (q, \gamma)) = \psi(a, q, z),$$

где $z = LS(\gamma)$. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть фиксировано $\alpha = a(0)a(1)\dots \in A^\infty$. Тогда системы уравнений

$$\begin{cases} q(0) = q_0 \\ \gamma(0) = \gamma_0 \\ z(t) = LS(\gamma(t)) \\ q(t+1) = \varphi(a(t), q(t), z(t)) \\ \gamma(t+1) = S(\gamma(t))\eta(a(t), q(t), z(t)) \\ b(t) = \psi(a(t), q(t), z(t)) \end{cases} \quad (1)$$

и

$$\begin{cases} q'(0) = q_0 \\ \gamma'(0) = \gamma_0 \\ z'(t) = LS(\gamma'(t)) \\ q'(t+1) = \varphi(a(t), q'(t), z'(t)) \\ d(t+1) = \max\{\min_{l \geq t+1} |\gamma(l)|, 1\} - 1 \\ \gamma'(t+1) = \gamma(t+1) \lfloor_{|\gamma(t+1)|-d(t+1)} \\ b'(t) = \psi(a(t), q'(t), z'(t)) \end{cases} \quad (2)$$

таковы, что для всех t

$$q(t) = q'(t), \quad z(t) = z'(t), \quad b(t) = b'(t).$$

Доказательство. Докажем лемму по индукции. База. При $t = 0$ утверждение, очевидно, выполнено. Шаг индукции. Пусть при $t \leq k$ утверждение выполнено. Значит, $q(t) = q'(t)$, $z(t) = z'(t)$. Отсюда

следует, что $q(t+1) = q'(t+1)$, $b(t+1) = b'(t+1)$. покажем, что $z(t+1) = z'(t+1)$. Если $\eta(a(t), q(t), z(t)) \neq \lambda$, то это очевидно. Пусть $\eta(a(t), q(t), z(t)) = \lambda$ и $z(t+1) \neq z'(t+1)$. Это означает, что $z'(t+1) = \lambda$ (и по-прежнему $\gamma'(t+1) = \lambda$), так как $\gamma'(t+1)$ по определению является суффиксом $\gamma(t+1)$. То есть $|\gamma(t+1)| = \min_{l \geq t+1} |\gamma(l)|$. Следовательно, $|\gamma'(t+1)| = 1$, что противоречит тому, что $z'(t+1) = \lambda$. Значит, $z(t+1) = z'(t+1)$ и лемма доказана.

Теорема 2. Пусть $f : A^* \rightarrow B^*$ и $f \in \mathcal{M}(A, B)$. Тогда f преобразует периодические сверхслова в периодические.

Доказательство. Пусть $P = \{A, Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\}$ автомат с магазинной памятью, порождающий f . Функционирование P задает система уравнений (1). По лемме 2 можно задавать $q(t), z(t), b(t)$ системой уравнений (2). Определим $d_k = \min_{t \geq k} |\gamma(t)|$, причем этот минимум достигается для любого k . Значит, существует возрастающая последовательность целых чисел n_k (в которых и достигается минимум) такая, что $|\gamma'(n_k)| = 1$.

Не ограничивая общности, будем считать, что все $\gamma'(n_k)$ одинаковы (иначе выберем из n_k подпоследовательность с указанным свойством и будем иметь дело с ней). Очевидно,

$$\exists i, j, N : \gamma'(n_i) = \gamma'(n_j), q(n_i) = q(n_j), z(n_i) = z(n_j), n_j - n_i = N\tau.$$

Докажем, что $\forall t \geq n_i z(t) = z(t + N\tau)$, $q(t) = q(t + N\tau)$, $\gamma'(t) = \gamma'(t + N\tau)$ по индукции. База доказана выше. Шаг индукции. Пусть для некоторого t выполнено $z(t) = z(t + N\tau)$, $q(t) = q(t + N\tau)$, $\gamma'(t) = \gamma'(t + N\tau)$, по условию $a(t) = a(t + N\tau)$. Тогда в силу канонических уравнений $z(t+1) = z(t+1 + N\tau)$, $q(t+1) = q(t+1 + N\tau)$, $\gamma'(t+1) = \gamma'(t+1 + N\tau)$.

Значит, последовательности $z(t), q(t)$ будут являться периодическими с периодом вида $N\tau$. Тогда будет периодическим и сверхслово $\beta = b(0)b(1) \dots \in B^\infty$ с аналогичным периодом, что и завершает доказательство теоремы.

Лемма 3. Пусть $P = \{A, Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\}$ — автомат с магазинной памятью. Пусть фиксировано $\alpha = a(0) \dots a(t) \dots \in A^\infty$ —

периодическое сверхслово, а последовательность $|\gamma_\alpha(t)|$ не ограничена. Тогда

$$\exists d, M \in \mathbb{N} : \exists \gamma_0, \gamma \in A^* : \forall m_0 > M \exists \gamma_{m_0} \gamma_\alpha(m_0 + dk) = \gamma_0 \underbrace{\gamma \dots \gamma}_{k \text{ раз}} \gamma_{m_0}.$$

и последовательность $q_\alpha(t)$ — периодическая.

Доказательство. Так как входная последовательность $a(t)$ периодическая — периодическое, то из доказательства теоремы следует, что последовательности $q(t)$ и $z(t)$ — также периодические. Пусть теперь d — наименьший общий период последовательностей $a(t)$, $q(t)$, $z(t)$. Рассмотрим момент времени t_1 такой, что $|\gamma(t_1)| < |\gamma(t_1 + d)|$, причем $\forall t > t_1 |\gamma(t)| \geq |\gamma(t_1)|$. Существование такого момента времени следует из доказательства теоремы 2 и условия, что последовательность $|\gamma_\alpha(t)|$ не ограничена.

Пусть $\gamma(t_1) = \gamma_0 z(t_1)$. Тогда найдется слово γ такое, что будет выполнено

$$\gamma(t_1 + d) = \gamma_0 \gamma z(t_1 + d) = \gamma_0 \gamma z(t_1)$$

в силу условия $\forall t > t_1 |\gamma(t)| \geq |\gamma(t_1)|$ и периодичности последовательности $z(t)$. Докажем по индукции, что

$$\gamma_\alpha(t_1 + dk) = \gamma_0 \underbrace{\gamma \dots \gamma}_{k \text{ раз}} z(t_1).$$

База доказана. Докажем, шаг индукции. Пусть выполнено, что

$$\gamma_\alpha(t_1 + d(k - 1)) = \gamma_0 \underbrace{\gamma \dots \gamma}_{k-1 \text{ раз}} z(t_1).$$

Обозначим $\gamma'_0 = \gamma_0 \underbrace{\gamma \dots \gamma}_{k-1 \text{ раз}}$. Тогда $\gamma(t_1 + d(k - 1)) = \gamma'_0 z(t_1)$. Значит,

$\gamma(t_1 + dk) = \gamma'_0 \gamma z(t_1)$. Подставляя в последнее γ'_0 , получаем требуемое.

Шаг индукции доказан.

Теперь заметим, что из того, что

$$\gamma_\alpha(m_0 + dk) = \gamma_0 \underbrace{\gamma \dots \gamma}_{k \text{ раз}} \gamma_{m_0}$$

следует, что

$$\gamma_\alpha(m_0 + 1 + dk) = \gamma_0 \underbrace{\gamma \dots \gamma}_{k \text{ раз}} S(\gamma(m_0)) \eta(a(m_0), q(m_0), z(m_0)),$$

что и завершает доказательство.

Утверждение 5. Пусть $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$, а P — автомат с магазинной памятью, вычисляющий f . Тогда с некоторого момента будет выполнено

$$f(x + d) = f(x) + p(x),$$

где $p : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ — некоторая периодическая функция с периодом d .

Доказательство. Пусть P — автомат с магазинной памятью, вычисляющий f и удовлетворяющий системе канонических уравнений (1). Рассмотрим еще два автомата с магазинной памятью P_1 , удовлетворяющий системе канонических уравнений

$$\begin{cases} q(0) = q_0 \\ \gamma(0) = \gamma_0 \\ z(t) = LS(\gamma(t)) \\ q(t+1) = \varphi(a(t), q(t), z(t)) \\ \gamma(t+1) = S(\gamma(t))\eta(a(t), q(t), z(t)) \\ b(t) = \psi(a(t), q(t), z(t)) \& a(t) \end{cases} \quad (3)$$

и P_0 , удовлетворяющий

$$\begin{cases} q(0) = q_0 \\ \gamma(0) = \gamma_0 \\ z(t) = LS(\gamma(t)) \\ q(t+1) = \varphi(a(t), q(t), z(t)) \\ \gamma(t+1) = S(\gamma(t))\eta(a(t), q(t), z(t)) \\ b(t) = \psi(a(t), q(t), z(t)) \& \bar{a}(t) \end{cases} \quad (4)$$

Для каждого из автоматов P_i ($i = 0, 1$) есть 2 возможности. Либо он вычисляет некоторую вычислимую функцию f_i , либо он выдает

сверхслово, состоящее из нулей. Перебирая все возможные варианты, нетрудно убедиться, что либо $f = f_i$, либо $f = f_0 + f_1 - 1$. В любом случае, для доказательства утверждения достаточно доказать, что с некоторого момента будет выполнено

$$f_i(x + d) = f_i(x) + p_i(x), \tag{5}$$

где $i \in \{0, 1\}$, а $p_i : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ — некоторая периодическая функция с периодом d .

Рассмотрим работу автомата P_1 . Подадим на вход автомату сверхслово, состоящее из 1. Рассмотрим последовательность $\gamma(t)$, которая получается при этом из канонических уравнений (3).

Если последовательность $|\gamma(t)|$ ограничена, то из леммы 1 следует, что f_1 является вычислимой конечным автоматом.

Пусть последовательность $|\gamma(t)|$ не ограничена. Тогда по лемме 3 найдутся такие d, M , что для любой последовательности вида $m_k = m_0 + kd$, где $m_0 > M$ найдутся $\alpha_0, \alpha, \alpha_1$ такие, что

$$\gamma(m_k) = \alpha_0 \underbrace{\alpha \dots \alpha}_{k \text{ раз}} \alpha_1$$

и что

$$\exists q \in Q : q(m_k) = q.$$

Из леммы следует, что

$$\exists C_0 \forall k f_0(m_{k+1}) = f_0(m_k) + C_0,$$

в силу периодичности последовательности состояний (аналогичное рассуждение было в утверждении 2). Значит, f_0 удовлетворяет (5).

Рассмотрим работу автомата P_0 . Из предыдущего следует, что при подаче сверхслова $\underbrace{1 \dots 1}_{m_k} 0 \dots 0$ на вход будет выполнено:

$$\gamma(m_k) = \alpha_0 \underbrace{\alpha \dots \alpha}_{k \text{ раз}} \alpha_1$$

и

$$\exists q \in Q : q(m_k) = q.$$

Рассмотрим работу автомата при подаче на вход сверхслова $\underbrace{1 \dots 1}_{m_{|Q|+1}} 0 \dots 0 \dots$. Рассмотрим 2 случая.

Пусть $\exists t_0 > m_{|Q|+1}$:

$$\gamma(t_0) = \alpha_0.$$

Тогда $\exists t_1 > t_2 > \dots > t_{|Q|+1}$ $\gamma(t_i) = \alpha_0 \underbrace{\alpha \dots \alpha}_{i \text{ раз}}$. Значит, среди моментов

времени $t_1, t_2, \dots, t_{|Q|+1}$ найдутся такие $t_i > t_j$, что $q(t_i) = q(t_j)$, то есть происходит «зацикливание». Оказывается, что $f(m_{k+(j-i)} - 1) - f(m_k - 1) = t_i - t_j$, если $b(t_i) = 1$, иначе $f(m_{k+(j-i)} - 1) - f(m_k - 1) = 0$. В обоих случаях будет выполнено (5).

Перейдем к рассмотрению второго случая, то есть считаем, что

$$\forall t > m_{|Q|+1} \gamma(t) \neq \alpha_0.$$

Тогда, очевидно, что для любого $k > |Q| + 1$ при подаче слова $\underbrace{1 \dots 1}_{m_k} 0 \dots 0 \dots$ на вход автомат выдаст одинаковое количество еди-

ниц, то есть в данном случае f_1 является постоянной функцией и, следовательно, удовлетворяет (4), что и завершает доказательство.

Утверждение 6. Пусть $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$. f удовлетворяет условию

$$\forall x \geq X \quad f(x + d) = f(x) + p(x), \quad (6)$$

где $p : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ — некоторая периодическая функция с периодом d тогда и только тогда, когда

$$\forall x \geq X \quad f(x) = a(x)x + b(x), \quad (7)$$

где $a : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Q}$, $b : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Q}$ — некоторые периодические функции с периодом d .

Доказательство. Пусть выполнено (7). Тогда

$$f(x + d) = a(x + d)(x + d) + b(x + d) = a(x)x + b(x) + da(x).$$

Обозначая $p(x) = da(x)$, получаем (6).

Пусть выполнено (6). Из (6) следует $f(x + nd) = f(x) + np(x)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Определим $a(x) = \frac{p(x)}{d}$, а $b(x)$ из следующих соотношений:

$$f(x) = b(x) + xa(x), \quad X \leq x < X + d.$$

Пусть $x \geq X$. Единственно представление $x = y + nd$, где $X \leq y < X + d$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y + nd) = f(y) + np(y) = b(y) + ya(y) + nda(y) = \\ &= a(y)(y + nd) + b(y) = a(x)x + b(x), \end{aligned}$$

что и требовалось. Утверждение доказано.

Из утверждений 4, 5 и 6 следует

Теорема 3. Пусть $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$. Существует автомат с магазинной памятью, вычисляющий f , тогда и только тогда, когда некоторого момента выполнено

$$f(x) = a(x)x + b(x),$$

где $a : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Q}$, $b : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Q}$ — некоторые периодические функции.

Замечание. Класс вычисляемых функций вида $f(x) = a(x)x + b(x)$, где $a : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Q}$, $b : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Q}$ — некоторые периодические функции, является замкнутым.

3. Класс вычисляемых функций, вычисляемых автоматом с 2 магазинами

Инициальным детерминированным автоматом с магазинной памятью будем называть «девятку»

$$P = \{A, Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\},$$

где A — входной алфавит, Q — конечное множество состояний, B — выходной алфавит, Γ — алфавит памяти (алфавит лент магазина), $\varphi : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda)^2 \rightarrow Q$ — функция переходов, $\psi : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda)^2 \rightarrow B$ —

функция выхода, $\eta : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda) \rightarrow (\Gamma^*)^2$ — функция памяти, $q_0 \in Q$ — начальное состояние, $\gamma_0 \in (\Gamma^*)^2$ — начальные записи в магазинах.

Функционирование P можно определить с помощью системы канонических уравнений, которые задают в каждый момент времени t состояние автомата $q(t)$, записанные в магазине слова $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, и выход автомата $b(t)$ при подаче на вход $a(t)$:

$$\begin{cases} q(0) = q_0 \\ \{\gamma_1(0), \gamma_2(0)\} = \gamma_0 \\ z_1(t) = LS(\gamma_1(t)) \\ z_2(t) = LS(\gamma_2(t)) \\ q(t+1) = \varphi(a(t), q(t), z_1(t), z_2(t)) \\ \gamma_1(t+1) = S(\gamma_1(t))\eta_1(a(t), q(t), z_1(t), z_2(t)) \\ \gamma_2(t+1) = S(\gamma_2(t))\eta_2(a(t), q(t), z_1(t), z_2(t)) \\ b(t) = \psi(a(t), q(t), z_1(t), z_2(t)) \end{cases} \quad (8)$$

где $LS : \Gamma^* \rightarrow \Gamma \cup \{\lambda\}$ возвращает последний символ при подаче непустого слова и $LS(\lambda) = \lambda$, а $S : \Gamma^* \rightarrow \Gamma^*$ — стирает последний символ входного слова и $S(\lambda) = \lambda$.

Автомат с 2 магазинами определяет детерминированную функцию $f : A^* \rightarrow B^*$. Пусть фиксировано $\alpha = a(0) \dots a(t) \dots \in A^\infty$.

Пусть $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$. Будем говорить, что автомат с 2 магазинами P вычисляет функцию f , если для любого натурального n при подаче слова вида $0^k 1^{n+1} 0^\infty$ автомат выдает последовательность вида $0^l 1^{f(n)+1} 0^\infty$, где $k, l \in \mathbb{Z}_+$.

Опишем класс функций, вычисляемых автоматом с 2 магазинами.

Будем говорить, что автомат Тьюринга это шестерка $T = \{A, Q, \varphi_T, \psi_T, \sigma_T, q_0, q_F\}$, где A, Q — конечные множества, $\varphi_T : A \times Q \rightarrow Q$ — функция переходов, $\psi : A \times Q \rightarrow A$ — функция записи на ленту, $\sigma_T : A \times Q \rightarrow \{R, L, S\}$ — функция управляющего устройства, q_0 — начальное состояние автомата, q_F — финальное. Будем считать, что после работы автомата результат работы будет записан на ленте, а головка автомата находится на последнем значащем символе ленты.

Теорема 4. *Функция $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ вычислима автоматом с 2 магазинами тогда и только тогда, когда она является вычислимой (вычислима на машине Тьюринга).*

Доказательство. Очевидно, что если функция вычислима автоматом с 2 магазинами, то она является вычислимой.

Пусть $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ — вычислимая функция. Значит, существует автомат Тьюринга $T = \{A, Q, \varphi_T, \psi_T, \sigma_T, q_0, q_F\}$ ее вычисляющий. Построим автомат с двумя магазинами $P = \{A, Q', B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q'_1, \gamma_0\}$, который имитирует работу T .

Пусть $Q' = Q \cup \{q'_1, q'_2, q'_3\}$, а $Q = \{q_0, \dots, q_{n-1}\}$. Начальное состояние q'_1 , магазины пусты. Определим работу автомата в состояниях q'_1 и q'_2 :

$$\begin{aligned}\varphi(0, q'_1, z_1, z_2) &= q'_1, \\ \varphi(1, q'_1, z_1, z_2) &= q'_2, \\ \varphi(0, q'_2, z_1, z_2) &= q_0, \\ \varphi(1, q'_2, z_1, z_2) &= q'_2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_1(0, q'_1, z_1, z_2) &= \Lambda, \\ \eta_1(1, q'_1, z_1, z_2) &= \Lambda, \\ \eta_1(0, q'_2, z_1, z_2) &= 1, \\ \eta_1(1, q'_2, z_1, z_2) &= \Lambda;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_2(0, q'_1, z_1, z_2) &= \Lambda, \\ \eta_2(1, q'_1, z_1, z_2) &= 1, \\ \eta_2(0, q'_2, z_1, z_2) &= \Lambda, \\ \eta_2(1, q'_2, z_1, z_2) &= 11.\end{aligned}$$

Поясним работу данного автомата. Сначала считаем входные данные во второй магазин. Это можно сделать, используя 2 состояния q'_1, q'_2 . После того, как входная последовательность единиц полностью

записана во второй магазин, автомат переходит в состояние q_0 . Дальше происходит имитация работы машины Тьюринга:

$$\begin{aligned} \varphi(a, q, z_1, z_2) &= \begin{cases} \varphi_T(z_1, q), & \text{если } q \in Q, \\ q'_3, & \text{если } q' = q_F; \end{cases} \\ \eta_1(a, q', z_1, z_2) &= \begin{cases} z_1 z_2, & \text{если } \sigma_T(z_1, q') = L, \\ z_1, & \text{если } \sigma_T(z_1, q') = S, \\ \Lambda, & \text{если } \sigma_T(z_1, q') = R; \end{cases} \\ \eta_2(a, q, z_1, z_2) &= \begin{cases} \Lambda, & \text{если } \sigma_T(z_1, q) = L, \\ z_2, & \text{если } \sigma_T(z_1, q) = S, \\ z_2 z_1 & \text{если } \sigma_T(z_1, q) = R; \end{cases} \\ \varphi(a, q'_3, z_1, z_2) &= q'_3; \\ \psi(a, q', z_1, z_2) &= \begin{cases} 0, & \text{если } q' \in Q' \setminus \{q'_3, q_F\} \text{ или } q' = q'_3, z_1 = z_2 = \Lambda, \\ 1, & \text{иначе;} \end{cases} \\ \eta_1(a, q'_3, z_1, z_2) &= \Lambda; \\ \eta_2(a, q'_3, z_1, z_2) &= \Lambda. \end{aligned}$$

Каждое состояние автомата с 2 магазинами соответствует состоянию машины Тьюринга. И в каждый момент имитации по магазинам можно однозначно восстановить ленту машины Тьюринга (надо «склеить» оба магазина). После завершения вычислений машина Тьюринга переходит в состояние q_F останавливается. Автомат же продолжает работу, далее переходя в состояние q'_3 , которое отвечает за вывод полученного результата, находящийся в первом магазине, на выходную ленту. Таким образом, любая вычислимая функция является и вычислимой автоматом с 2 магазинами. Теорема доказана.

Список литературы

- [1] Ахо А., Ульман Дж. Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции. Т. 1. М.: Мир, 1978.
- [2] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

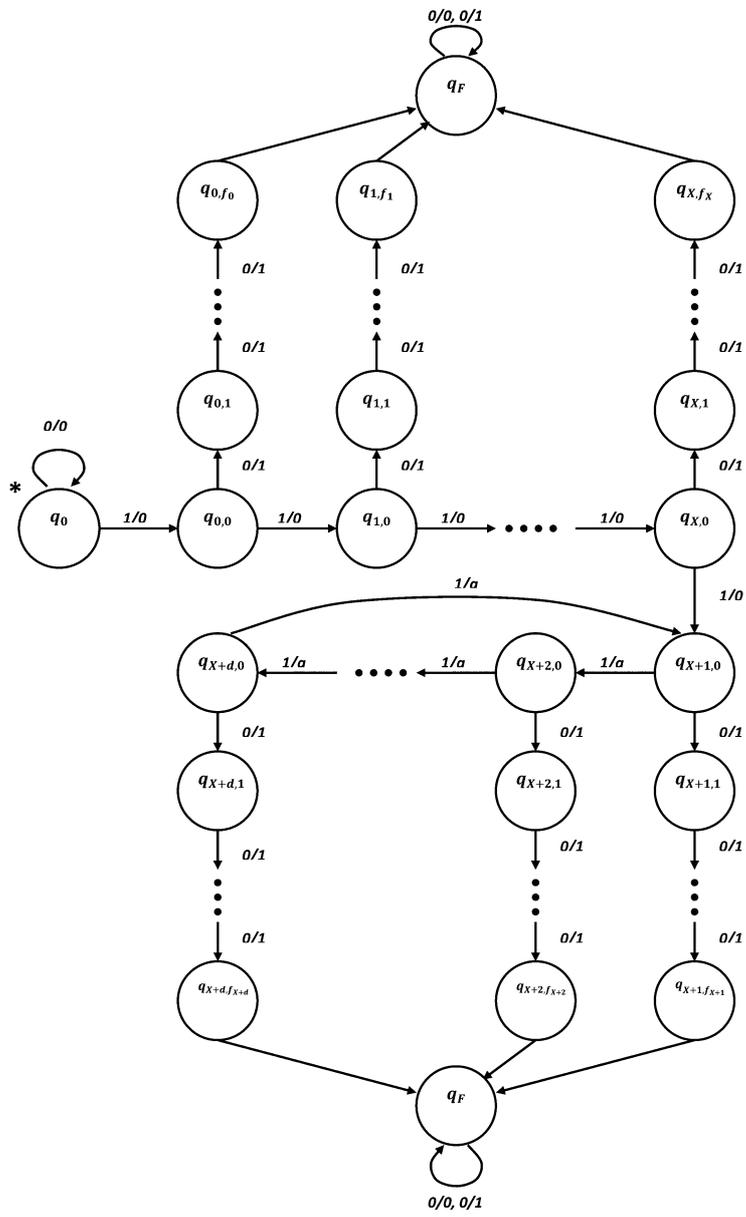


Рис. 1.

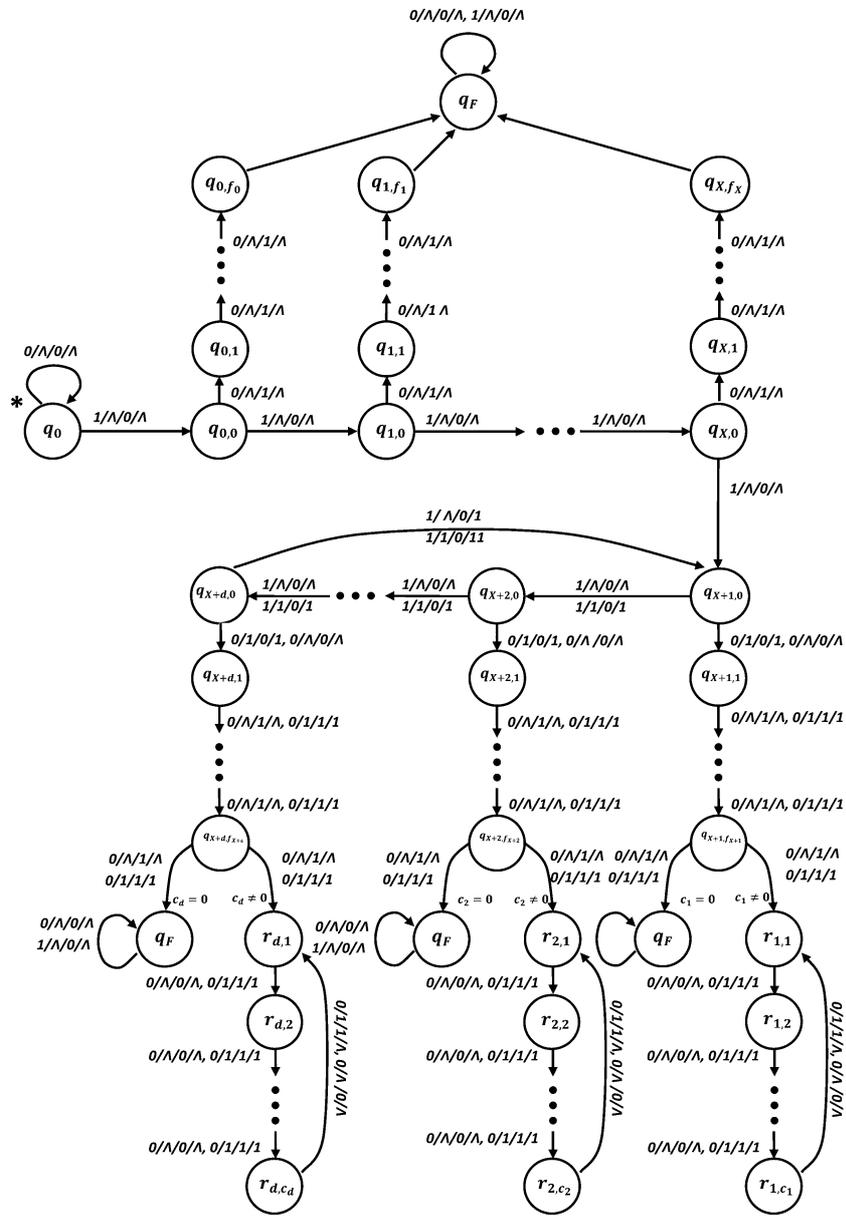


Рис. 2.