

# Однозначность восстановления изображения по его коду в $n$ -мерном случае

П. Г. Агниашвили

В работе рассматривается дискретно-геометрический подход к распознаванию зрительных образов в случае произвольной конечной размерности. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых возможно однозначное восстановление изображения по его коду. Получена геометрическая интерпретация результатов, описывающая класс допустимых изображений. Отдельно рассмотрен случай вырожденных изображений.

**Ключевые слова:** распознавание образов, код изображения, модифицированный код, однозначность восстановления изображения.

## 1. Введение

Одной из ключевых характеристик изображения является его код. По своему смыслу код должен отражать определенную общность в восприятии изображений. В рассматриваемом дискретно-геометрическом подходе общим признаком является  $a'$ -эквивалентность изображений (аффинная эквивалентность с сохранением нумерации точек). Данное направление получило развитие в работе [1], где, в частности, исследуется возможность восстановления изображений по их кодам в двумерном и трехмерном случаях. Код строится таким образом, чтобы быть одинаковым для  $a'$ -эквивалентных изображений. Кроме того, если изображения не являются  $a'$ -эквивалентными, их коды также должны быть различны — только тогда можно говорить

о коде, характеризующем данный признак и никакой другой. Оказывается, если в качестве изображений рассматривать произвольные конечные множества точек в евклидовом пространстве, то последнее условие не выполняется: можно привести пример двух изображений, не являющихся  $a'$ -эквивалентными, но имеющих один и тот же код. Возникает задача о нахождении такого класса изображений, для которых возможно однозначное восстановление по коду с точностью до  $a'$ -эквивалентности. Известно, что в двумерном случае достаточно потребовать, чтобы изображение не лежало на одной или двух параллельных прямых. В трехмерном случае достаточно, чтобы изображение не лежало на одной или двух параллельных плоскостях. Более того, аналогичное условие оказывается достаточным и в общем случае  $n$ -мерного пространства, когда изображение не лежит в одной или двух параллельных гиперплоскостях.

В то же время указанное условие не является необходимым: существуют изображения, лежащие в двух параллельных гиперплоскостях, для которых возможно однозначное восстановление по коду с точностью до  $a'$ -эквивалентности. В двумерном случае легко показать, что каждое такое изображение представляет собой множество точек, лежащих на одной прямой, и одну (возможно, кратную) точку вне этой прямой. Для последующих размерностей ситуация усложняется и приводит к следующей задаче: выделить среди изображений, лежащих в двух параллельных гиперплоскостях, такой класс изображений, для которых возможно однозначное восстановление по коду с точностью до  $a'$ -эквивалентности.

В данной работе рассматривается случай произвольной конечной размерности. Найдены необходимые и достаточные условия, определяющие изображения, для которых возможно однозначное восстановление по коду. Для этого вводится вспомогательная характеристика —  $\mu$ -код (модифицированный код). В отличие от основного кода  $\mu$ -код содержит числа со знаком и в точности характеризует свойство изображений быть аффинно-эквивалентными с сохранением нумерации. Установлена связь между кодом и  $\mu$ -кодом, позволяющая однозначно восстановить знаки в основном коде, если это возможно. Получена геометрическая интерпретация результатов, описывающая класс допустимых изображений в общем случае. Более подробно рас-

смотрен вопрос допустимости изображений, лежащих в двух параллельных гиперплоскостях.

## 2. Изображения первого и второго рода, $\mu$ -код

Всюду далее рассматривается пространство  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . Под точкой с индексом  $p \in \mathbb{N}$  будем понимать упорядоченную пару  $(\mathbf{x}, p)$ , где  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  — вектор из  $\mathbb{R}^n$ . Далее вместо «точка с индексом  $p$ » будем также говорить «точка  $p$ » и использовать обозначение  $\mathbf{x}^p = (x_1^p, \dots, x_n^p)$  для координатной записи. Введем несколько определений:

**Определение 1.** Изображением первого рода в  $\mathbb{R}^n$  называется конечное множество индексированных точек, не лежащих в одной гиперплоскости и занумерованных индексами  $1, \dots, k$  в случае  $k$  точек,  $k \in \mathbb{N}$ .

Для изображения первого рода  $A$  через  $|A|$  будем обозначать число точек в изображении, а через  $\mathbb{N}_{|A|} = \{1, \dots, |A|\}$  — множество индексов у точек изображения. Два изображения первого рода  $A_1$  и  $A_2$ , состоящие из одинакового числа точек ( $|A_1| = |A_2|$ ), будем называть *а'-эквивалентными*, если существует аффинное преобразование, при котором каждая точка из  $A_1$  с индексом  $p \in \mathbb{N}_{|A_1|}$  отображается в точку из  $A_2$  с тем же индексом  $p \in \mathbb{N}_{|A_2|}$  (рис. 1).

**Определение 2.** Изображением второго рода называется класс всех попарно а'-эквивалентных изображений первого рода.

Если некоторое свойство изображения первого рода сохраняется при аффинных преобразованиях, то можно говорить об этом свойстве у соответствующего изображения второго рода (например: свойство «точки изображения не лежат в одной гиперплоскости» сохраняется при аффинных преобразованиях). В таких случаях будем также говорить об изображениях без уточнения их рода.

Рассмотрим изображение  $A$  (первого или второго рода). Введем произвольную аффинную систему координат в  $\mathbb{R}^n$ , и пусть  $(x_1^p, \dots, x_n^p)$  — координаты точки с индексом  $p \in \mathbb{N}_{|A|}$  в этой системе ко-

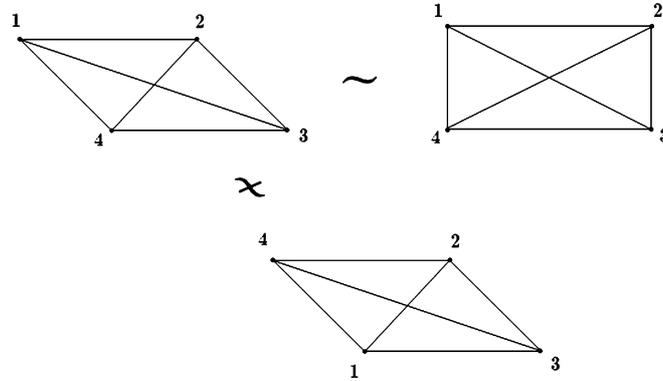


Рис. 1.

ординат. Для произвольных индексов  $r_1, \dots, r_{n+1}, s_1, \dots, s_{n+1} \in \mathbb{N}_{|A|}$  определим индексированное число  $\mu_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}}$  по формуле:

$$\mu_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}} = \frac{\begin{vmatrix} x_1^{r_1} & \dots & x_n^{r_1} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{r_{n+1}} & \dots & x_n^{r_{n+1}} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^{s_1} & \dots & x_n^{s_1} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{s_{n+1}} & \dots & x_n^{s_{n+1}} & 1 \end{vmatrix}}$$

Здесь в случае равенства знаменателя нулю полагаем, что значение  $\mu_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}}$  не определено, и используем запись  $\mu_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}} = \infty$ . По сути, введенное индексированное число представляет собой отношение ориентированных объемов двух  $n$ -симплексов на точках  $r_1, \dots, r_{n+1}$  и  $s_1, \dots, s_{n+1}$  соответственно [2]. Наборы индексов  $\{r_1, \dots, r_{n+1}\}$  и  $\{s_1, \dots, s_{n+1}\}$  для числа  $\mu_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}}$  будем называть верхним и нижним наборами соответственно.

**Определение 3.**  $\mu$ -кодом изображения  $A$  называется множество всех индексированных чисел  $\mu\text{-}T_A = \{\mu_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}} \mid r_1, \dots, r_{n+1}, s_1, \dots, s_{n+1} \in \mathbb{N}_{|A|}\}$ . Каждое индексированное число  $\mu_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}}$  называется элементом  $\mu$ -кода изображения  $A$ .

В дальнейших рассуждениях неоднократно используются свойства определителя, которые можно найти, например, в книге [3].

**Лемма 1 (корректность определения  $\mu$ -кода).** Пусть  $A$  — изображение первого рода. Тогда  $\mu$ -код  $\mu\text{-}T_A$  изображения  $A$  не зависит

от выбора аффинной системы координат и не изменяется при аффинных преобразованиях изображения  $A$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{x}^p = (x_1^p, \dots, x_n^p)$  — координаты точки  $p$  в некоторой аффинной системе координат,  $\mathbf{y}^p = (y_1^p, \dots, y_n^p)$  — координаты точки  $p$  в новой системе координат или после аффинного преобразования. Связь между  $\mathbf{y}^p$  и  $\mathbf{x}^p$  задается уравнением

$$\mathbf{y}^p = \mathbf{x}^p C + \mathbf{x}^0,$$

где  $C$  — некоторая невырожденная  $n \times n$ -матрица,  $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  — некоторый фиксированный вектор. Тогда для элемента  $\tilde{\mu}_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}}$  в новых координатах имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}} &= \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{y}^{r_1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{y}^{r_{n+1}} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{y}^{s_1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{y}^{s_{n+1}} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{x}^{r_1} C + \mathbf{x}^0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}^{r_{n+1}} C + \mathbf{x}^0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{x}^{s_1} C + \mathbf{x}^0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}^{s_{n+1}} C + \mathbf{x}^0 & 1 \end{vmatrix}} = \\ &= \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{x}^{r_1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}^{r_{n+1}} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} C & 0 \\ \mathbf{x}^0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{x}^{s_1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}^{s_{n+1}} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} C & 0 \\ \mathbf{x}^0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{x}^{r_1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}^{r_{n+1}} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{x}^{s_1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}^{s_{n+1}} & 1 \end{vmatrix}} = \mu_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}} \end{aligned}$$

Таким образом, элементы  $\mu$ -кода не изменяются. Лемма доказана. Доказанная лемма позволяет использовать  $\mu$ -код как для изображений первого рода, так и для изображений второго рода.

### 3. Свойства $\mu$ -кода

В данном разделе исследуются свойства  $\mu$ -кода, которые будут неоднократно использоваться в дальнейших рассуждениях. На их ос-

нове построено доказательство основного утверждения данного раздела (теорема 1), которое позволяет свести исследование изображений второго рода к исследованию их  $\mu$ -кодов.

**Определение 4.** Рассмотрим изображение  $A$ . Набор индексов  $B = \{i_1, \dots, i_{n+1}\} \subseteq \mathbb{N}_{|A|}$  называется симплексным набором для  $\mu$ -кода  $\mu$ - $T_A = \{\mu_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}}\}$ , если индексированные числа с нижним набором  $B$  определены, то есть выполнено  $\mu_{i_1, \dots, i_{n+1}}^{r_1, \dots, r_{n+1}} \neq \infty$ .

У  $\mu$ -кода любого изображения существует хотя бы один симплексный набор, так как по определению точки изображения не лежат в одной гиперплоскости, что обеспечивает отличный от нуля определитель в знаменателе соответствующих индексированных чисел (рис. 2).

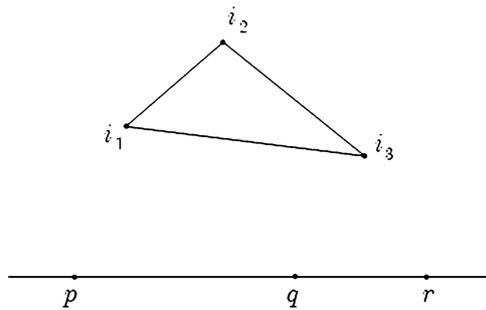


Рис. 2.

Обозначим через  $\mu_j^s$  элемент  $\mu$ -кода, у которого нижний набор является симплексным набором  $B = \{i_1, \dots, i_{n+1}\}$ , а верхний набор есть  $\{i_1, \dots, i_{j-1}, s, i_{j+1}, \dots, i_{n+1}\}$ , то есть  $j$ -й индекс симплексного набора замещен индексом  $s$  (рис. 3).

**Определение 5.** Множество  $\mu_B = \{\mu_j^s | s \in \mathbb{N}_{|A|}, j \in \mathbb{N}_{n+1}\}$  называется ключевым подмножеством  $\mu$ -кода  $\mu$ - $T_A$  относительно симплексного набора  $B$ .

**Лемма 2.** Ключевого подмножества  $\mu$ -кода достаточно, чтобы восстановить весь  $\mu$ -код. А именно, верна следующая формула:

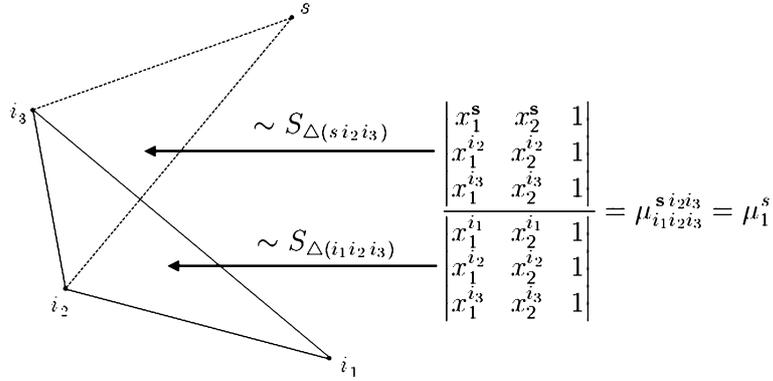


Рис. 3.

$$\mu_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}} = \frac{\begin{vmatrix} \mu_1^{r_1} & \dots & \mu_n^{r_1} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_1^{r_{n+1}} & \dots & \mu_n^{r_{n+1}} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mu_1^{s_1} & \dots & \mu_n^{s_1} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_1^{s_{n+1}} & \dots & \mu_n^{s_{n+1}} & 1 \end{vmatrix}} \quad (*)$$

Здесь в случае равенства знаменателя нулю полагаем  $\mu_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}} = \infty$ .

**Доказательство.** Пусть  $V = \{i_1, \dots, i_{n+1}\}$  — симплексный набор индексов. Тогда для  $\mu_j^s$  имеем:

$$\mu_j^s = \frac{\begin{vmatrix} x_1^{i_1} & \dots & x_n^{i_1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^s & \dots & x_n^s & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{i_{n+1}} & \dots & x_n^{i_{n+1}} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^{i_1} & \dots & x_n^{i_1} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{i_{n+1}} & \dots & x_n^{i_{n+1}} & 1 \end{vmatrix}} = \left( \frac{1}{|V|} \right) \cdot (x_1^s V_{j1} + \dots + x_n^s V_{jn} + V_{jn+1}),$$

$$\text{где } V = \begin{pmatrix} x_1^{i_1} & \cdots & x_n^{i_1} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{i_{n+1}} & \cdots & x_n^{i_{n+1}} & 1 \end{pmatrix}, |V| \neq 0.$$

$V_{lk}$  — алгебраическое дополнение элемента матрицы  $V$ , стоящего на пересечении  $l$ -й строки и  $k$ -го столбца. Обозначим через  $W$  матрицу

$$W = \begin{pmatrix} V_{11} & \cdots & V_{1n} & V_{1n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ V_{n1} & \cdots & V_{nn} & V_{nn+1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Из разложения (и фальшивого разложения) по строке определителя  $|V|$  имеем

$$x_1^{i_k} V_{j1} + \cdots + x_n^{i_k} V_{jn} + V_{jn+1} = \begin{cases} V, & k = j; \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$$

Но тогда  $|V||W^\top| = |VW^\top| = \begin{vmatrix} \text{diag}(V) & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = |\text{diag}(V)| \neq 0$ , откуда имеем  $|W^\top| \neq 0$ . С учетом полученного разложения получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{\begin{vmatrix} \mu_1^{r_1} & \cdots & \mu_n^{r_1} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_1^{r_{n+1}} & \cdots & \mu_n^{r_{n+1}} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mu_1^{s_1} & \cdots & \mu_n^{s_1} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_1^{s_{n+1}} & \cdots & \mu_n^{s_{n+1}} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{|V|} \begin{pmatrix} x_1^{r_1} & \cdots & x_n^{r_1} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{r_{n+1}} & \cdots & x_n^{r_{n+1}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} & \cdots & V_{n1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ V_{1n} & \cdots & V_{nn} & 0 \\ V_{1n+1} & \cdots & V_{nn+1} & 1 \end{pmatrix}}{\frac{1}{|V|} \begin{pmatrix} x_1^{s_1} & \cdots & x_n^{s_1} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{s_{n+1}} & \cdots & x_n^{s_{n+1}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} & \cdots & V_{n1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ V_{1n} & \cdots & V_{nn} & 0 \\ V_{1n+1} & \cdots & V_{nn+1} & 1 \end{pmatrix}} = \\ & = \frac{\frac{1}{|V|} \begin{pmatrix} x_1^{r_1} & \cdots & x_n^{r_1} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{r_{n+1}} & \cdots & x_n^{r_{n+1}} & 1 \end{pmatrix} W^\top}{\frac{1}{|V|} \begin{pmatrix} x_1^{s_1} & \cdots & x_n^{s_1} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{s_{n+1}} & \cdots & x_n^{s_{n+1}} & 1 \end{pmatrix} W^\top} = \frac{\frac{|W^\top|}{|V|} \begin{vmatrix} x_1^{r_1} & \cdots & x_n^{r_1} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{r_{n+1}} & \cdots & x_n^{r_{n+1}} & 1 \end{vmatrix}}{\frac{|W^\top|}{|V|} \begin{vmatrix} x_1^{s_1} & \cdots & x_n^{s_1} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{s_{n+1}} & \cdots & x_n^{s_{n+1}} & 1 \end{vmatrix}} = \mu_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}} \end{aligned}$$

Здесь существенно, что  $|V|, |W^\top| \neq 0$ . Лемма доказана.

**Следствие 1.** Для любого индекса  $s \in N_{|A|}$  выполняется соотношение (рис. 4):

$$\mu_1^s + \dots + \mu_{n+1}^s = 1. \quad (1)$$

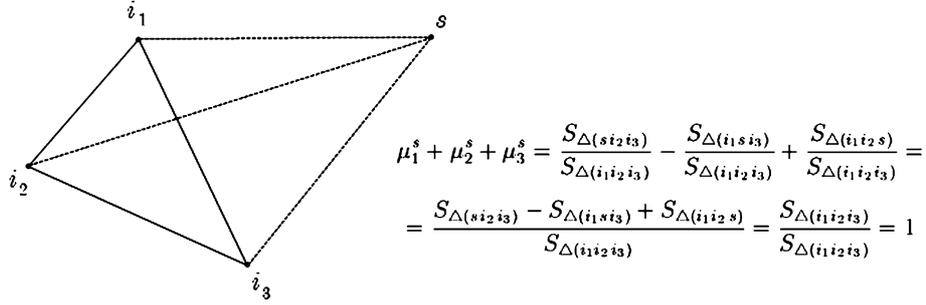


Рис. 4.

**Доказательство.** Пусть  $B = \{i_1, \dots, i_{n+1}\}$  — симплексный набор индексов.

Легко видеть, что  $\mu_j^{i_k} = \begin{cases} 1, & k = j; \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$

Тогда, согласно соотношению (\*), имеем:

$$\begin{aligned} \mu_{n+1}^s &= \frac{\begin{vmatrix} \mu_1^{i_1} & \dots & \mu_n^{i_1} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_1^{i_n} & \dots & \mu_n^{i_n} & 1 \\ \mu_1^s & \dots & \mu_n^s & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mu_1^{i_1} & \dots & \mu_n^{i_1} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_1^{i_{n+1}} & \dots & \mu_n^{i_{n+1}} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} E & 1 \\ \mu_1^s \dots \mu_n^s & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \\ &= \begin{vmatrix} E & 1 \\ \mu_1^s \dots \mu_n^s & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & 0 \\ \mu_1^s \dots \mu_n^s & 1 - \mu_1^s - \dots - \mu_n^s \end{vmatrix} = 1 - \mu_1^s - \dots - \mu_n^s \end{aligned}$$

Это и означает, что  $\mu_1^s + \dots + \mu_{n+1}^s = 1$ .

**Следствие 2.** Формула (\*) может быть записана в следующем виде:

$$\mu_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}} = \frac{\begin{vmatrix} \mu_1^{r_1} & \cdots & \mu_{n+1}^{r_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1^{r_{n+1}} & \cdots & \mu_{n+1}^{r_{n+1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mu_1^{s_1} & \cdots & \mu_{n+1}^{s_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1^{s_{n+1}} & \cdots & \mu_{n+1}^{s_{n+1}} \end{vmatrix}} \quad (2)$$

Здесь в случае равенства знаменателя нулю полагаем  $\mu_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}} = \infty$ .

**Доказательство.** В формуле (\*) в каждом из определителей вычтем из последнего столбца все предыдущие, что не изменит значение определителей, и воспользуемся соотношением (1), что и приведет к формуле (2).

**Лемма 3.** Пусть для некоторого множества действительных чисел  $\{\mu_j^s | s \in \mathbb{N}_m, j \in \mathbb{N}_{n+1}\}$  выполняется соотношение (1). Тогда существует единственное изображение  $A$  второго рода, такое что  $|A| = m$ , набор индексов  $B = \{i_1, \dots, i_{n+1}\} \subseteq \mathbb{N}_{|A|}$  является симплексным, и ключевое подмножество  $\mu$ -кода  $\mu$ - $T_A$  изображения  $A$  относительно симплексного набора  $B$  совпадает с множеством  $\{\mu_j^s | s \in \mathbb{N}_m, j \in \mathbb{N}_{n+1}\}$ .

**Доказательство.** Рассмотрим произвольное множество индексированных точек  $\mathbf{x}^{i_1}, \dots, \mathbf{x}^{i_{n+1}} \in \mathbb{R}^n$  с условием

$$\begin{vmatrix} x_1^{i_1} & \cdots & x_n^{i_1} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{i_{n+1}} & \cdots & x_n^{i_{n+1}} & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Обозначим данную матрицу через  $V$ , алгебраические дополнения соответствующих элементов через  $V_{lk}$ . Определим координаты произвольной точки  $\mathbf{x}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}_m$  из системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1^s V_{11} + \dots + x_n^s V_{1n} = |V| \mu_1^s - V_{1n+1} \\ \dots \dots \dots \\ x_1^s V_{n1} + \dots + x_n^s V_{nn} = |V| \mu_n^s - V_{nn+1} \end{cases}$$

Из условия  $|V| \neq 0$  следует, что матрица

$$\begin{pmatrix} V_{11} & \cdots & V_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{n1} & \cdots & V_{nn} \end{pmatrix}$$

невырождена, поэтому данная система уравнений имеет единственное решение  $\mathbf{x}^s$ .

Условие  $|V| \neq 0$  также гарантирует, что набор  $B$  будет симплексным. Покажем, что у полученного таким способом изображения первого рода ключевое подмножество  $\mu$ -кода относительно  $B$  совпадает с  $\{\mu_j^s | s \in \mathbb{N}_m, j \in \mathbb{N}_{n+1}\}$ . Уравнение

$$x_1^s V_{j1} + \dots + x_n^s V_{jn} = |V| \mu_j^s - V_{j, n+1}, j = 1, \dots, n$$

равносильно записи

$$\mu_j^s = \left| \begin{array}{cccc} x_1^{i_1} & \cdots & x_n^{i_1} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^s & \cdots & x_n^s & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{i_{n+1}} & \cdots & x_n^{i_{n+1}} & 1 \end{array} \right| / \left| \begin{array}{cccc} x_1^{i_1} & \cdots & x_n^{i_1} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{i_{n+1}} & \cdots & x_n^{i_{n+1}} & 1 \end{array} \right|,$$

что и доказывает совпадение с ключевым подмножеством при  $j \in \mathbb{N}_n$ . Покажем, что при  $j = n + 1$  имеет место аналогичное уравнение (а потому и запись). Если заменить  $i$ -й столбец в матрице  $V$  на столбец из единиц,  $i = 1, \dots, n$ , то определитель новой матрицы будет равен нулю, а разложение по  $i$ -му столбцу даст сумму  $V_{1i} + \dots + V_{n+1i}$ . Таким образом,

$$V_{n+1i} = -V_{1i} - \dots - V_{ni} \text{ при } i = 1, \dots, n.$$

Если же разложить определитель  $|V|$  по последнему столбцу, то получим

$$|V| - V_{n+1, n+1} = V_{1, n+1} + \dots + V_{n, n+1}$$

Для чисел  $\mu_j^s$  по условию выполняется соотношение (1), поэтому

$$\mu_{n+1}^s - 1 = -\mu_1^s - \dots - \mu_n^s.$$

Учитывая эти соотношения, получаем, что сумма уравнений

$$-\sum_{j=1}^n (x_1^s V_{j1} + \dots + x_n^s V_{jn}) = -\sum_{j=1}^n (|V|\mu_j^s - V_{jn+1})$$

дает уравнение

$$x_1^s V_{n+11} + \dots + x_n^s V_{n+1n} = |V|\mu_{n+1}^s - V_{n+1n+1}.$$

Это полностью доказывает совпадение ключевого подмножества  $\mu$ -кода и множества  $\{\mu_j^s | s \in \mathbb{N}_m, j \in \mathbb{N}_{n+1}\}$ .

Итак, любое изображение первого рода, полученное данным способом, однозначно определяется выбором координат для точек симплексного набора  $B$ . Но любые два множества из  $n+1$  точек в  $\mathbb{R}^n$  с условием  $|V| \neq 0$  являются  $a'$ -эквивалентными, что означает  $a'$ -эквивалентность любых таких изображений первого рода. Отсюда следует единственность соответствующего изображения второго рода как класса  $a'$ -эквивалентных изображений первого рода. Лемма доказана.

**Теорема 1.** *Между множеством  $\mu$ -кодов и множеством изображений второго рода существует биекция, сопоставляющая каждому изображению его  $\mu$ -код.*

**Доказательство.** Из леммы 1 следует, что каждому изображению  $A$  второго рода однозначно сопоставляется его  $\mu$ -код  $\mu-T_A$ . Согласно лемме 2,  $\mu$ -код  $\mu-T_A$  полностью определяется любым своим ключевым подмножеством. Для ключевого подмножества  $\mu$ -кода выполняется соотношение (1), и, согласно лемме 3, изображение  $A$  будет единственным изображением второго рода с данным ключевым подмножеством. Но тогда  $A$  является единственным изображением второго рода с  $\mu$ -кодом  $\mu-T_A$ . Теорема доказана.

#### 4. Код и $\mu$ -код

В данном разделе вводится понятие кода изображения. Устанавливается связь между кодом и  $\mu$ -кодом (теорема 2), которая позволяет однозначно восстановить  $\mu$ -код, анализируя код изображения,

либо выявляет неоднозначность такого соответствия. Другими словами (в силу теоремы 1), устанавливается возможность восстановления изображения второго рода на основе его кода.

**Определение 6.** Рассмотрим изображение  $A$  и его  $\mu$ -код

$$\mu\text{-}T_A = \{\mu_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}} | r_1, \dots, r_{n+1}, s_1, \dots, s_{n+1} \in \mathbb{N}_{|A|}\}.$$

Пусть  $\rho_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}} = |\mu_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}}|$ . Кодом изображения  $A$  называется множество всех индексированных чисел

$$T_A = \{\rho_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}} | r_1, \dots, r_{n+1}, s_1, \dots, s_{n+1} \in \mathbb{N}_{|A|}\}.$$

Таким образом, код является, по сути,  $\mu$ -кодом без знака. Аналогично случаю  $\mu$ -кода вводятся понятия элемента кода, симплексного набора и ключевого подмножества ( $\rho_B = \{\rho_j^s | s \in \mathbb{N}_m, j \in \mathbb{N}_{n+1}\}$ ).

Рассмотрим два изображения  $A$  и  $\hat{A}$  из одинакового числа точек ( $|A| = |\hat{A}|$ ). Пусть  $B = \{i_1, \dots, i_{n+1}\}$  — симплексный набор индексов для обоих изображений и для ключевых подмножеств  $\mu$ -кодов выполняется  $\rho_j^s \equiv |\mu_j^s| = |\hat{\mu}_j^s| \equiv \hat{\rho}_j^s$ ,  $s \in \mathbb{N}_{|A|}$ ,  $j \in \mathbb{N}_{n+1}$ . С каждым индексом  $s$  связано специальное подмножество индексов симплексного набора  $M^s = \{i_j \in B | \rho_j^s \neq 0\}$ . Определим семейство подмножеств симплексного набора  $\mathbb{M}_{A, \hat{A}} = \{M_+^s, M_-^s | s \in \mathbb{N}_{|A|}\}$ , где  $M_+^s = \{i_j \in M^s | \mu_j^s = \hat{\mu}_j^s\}$  и  $M_-^s = \{i_j \in M^s | \mu_j^s = -\hat{\mu}_j^s\}$  (рис. 5).

**Определение 7.** Разбиением симплексного набора  $B$ , разделяющим семейство  $\mathbb{M}_{A, \hat{A}}$ , называется пара подмножеств индексов  $(B_1, B_2)$  со свойствами (рис. 6):

- 1)  $B = B_1 \sqcup B_2$ ;
- 2) Для любого индекса  $s \in \mathbb{N}_{|A|}$  либо  $M_+^s \subseteq B_1, M_-^s \subseteq B_2$ , либо  $M_+^s \subseteq B_2, M_-^s \subseteq B_1$ .

Здесь и далее запись  $B = B_1 \sqcup B_2$  означает, что  $B = B_1 \cup B_2$  и  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ .

**Теорема 2.** Рассмотрим два изображения  $A$  и  $\hat{A}$ . Пусть  $|A| = |\hat{A}|$ ,  $B = \{i_1, \dots, i_{n+1}\}$  — симплексный набор индексов для обоих изображений, а для ключевых подмножеств  $\mu_B$  и  $\hat{\mu}_B$   $\mu$ -кодов выполняется

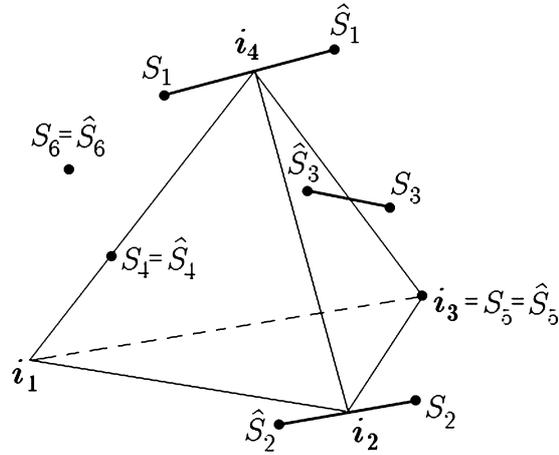


Рис. 5.

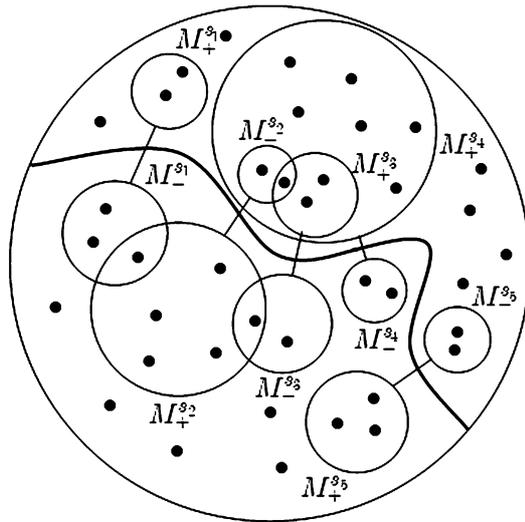


Рис. 6.

$|\mu_j^s| = |\hat{\mu}_j^s|$ ,  $s \in \mathbb{N}_{|A|}$ ,  $j \in \mathbb{N}_{n+1}$ . Тогда верно утверждение: коды изображений  $A$  и  $\hat{A}$  совпадают тогда и только тогда, когда существует разбиение симплексного набора  $B$ , разделяющее семейство  $\mathbb{M}_{A, \hat{A}}$ .

**Доказательство. Необходимость.** Пусть существует разбиение  $(B_1, B_2)$  симплексного набора  $B$ , разделяющее семейство  $\mathbb{M}_{A, \hat{A}}$ . Покажем, что в этом случае коды изображений  $A$  и  $\hat{A}$  совпадают.

Рассмотрим произвольный элемент  $\rho_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}}$  кода  $T_A$  и соответствующий элемент  $\hat{\rho}_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}}$  кода  $T_{\hat{A}}$ . Связь между кодом и  $\mu$ -кодом дают тождества  $\rho_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}} = |\mu_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}}|$ ,  $\hat{\rho}_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}} = |\hat{\mu}_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}}|$ . Воспользуемся формулой (2), чтобы выразить элементы  $\mu_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}}$  и  $\hat{\mu}_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}}$  через ключевые подмножества  $\mu_B$  и  $\hat{\mu}_B$ :

$$\mu_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}} = \frac{\begin{vmatrix} \mu_1^{r_1} & \cdots & \mu_{n+1}^{r_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1^{r_{n+1}} & \cdots & \mu_{n+1}^{r_{n+1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mu_1^{s_1} & \cdots & \mu_{n+1}^{s_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1^{s_{n+1}} & \cdots & \mu_{n+1}^{s_{n+1}} \end{vmatrix}}$$

Рассмотрим определитель в числителе формулы (2). Индексы  $r_1, \dots, r_{n+1}$  делятся на два класса:  $R_1$  — те индексы  $r_i$ , для которых  $M_+^{r_i} \subseteq B_1$ ,  $M_-^{r_i} \subseteq B_2$ , и  $R_2$  — те индексы  $r_j$ , для которых  $M_+^{r_j} \subseteq B_2$ ,  $M_-^{r_j} \subseteq B_1$ . Для индекса  $r \in R_1$  по определению множеств  $M_+^r$  и  $M_-^r$  имеем:

- 1)  $\mu_j^r = \hat{\mu}_j^r$  при  $i_j \in M_+^r \subseteq B_1$ ;  $\mu_j^r = \hat{\mu}_j^r = 0$  при  $i_j \in B_1 \setminus M_+^r$ ;
- 2)  $\mu_j^r = -\hat{\mu}_j^r$  при  $i_j \in M_-^r \subseteq B_2$ ;  $\mu_j^r = \hat{\mu}_j^r = 0$  при  $i_j \in B_2 \setminus M_-^r$ .

Иначе говоря,  $\mu_j^r = \hat{\mu}_j^r$  при  $r \in R_1, i_j \in B_1$  и  $\mu_j^r = -\hat{\mu}_j^r$  при  $r \in R_1, i_j \in B_2$ . Аналогично получаем  $\mu_j^r = -\hat{\mu}_j^r$  при  $r \in R_2, i_j \in B_1$  и  $\mu_j^r = \hat{\mu}_j^r$  при  $r \in R_2, i_j \in B_2$ .

В определителе для  $\hat{\mu}_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}}$  изменим знак сначала у всех столбцов, соответствующих индексам  $i_j \in B_2$ , а затем для всех строк, соответствующих индексам  $r \in R_2$  (рис. 7). Получившийся определитель может отличаться от первоначального только знаком. В то же время, результат преобразования полностью совпадает с определителем для  $\mu_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}}$ . Аналогичное рассуждение верно и для определителя в знаменателе формулы (2). Но тогда рассматриваемые элементы  $\mu$ -кода

могут отличаться только знаком, то есть  $|\mu_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}}| = |\hat{\mu}_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}}|$ , а потому и  $\rho_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}} = \hat{\rho}_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}}$ . В силу произвольности выбора элементов кодов получаем, что коды изображений  $A$  и  $\hat{A}$  совпадают.

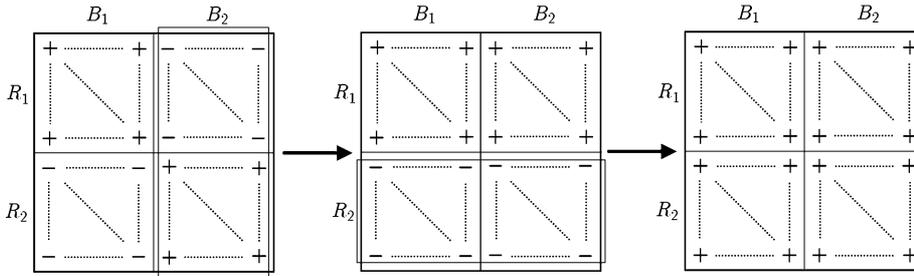


Рис. 7.

*Достаточность.* Пусть не существует разбиения симплексного набора  $B$ , разделяющего семейство  $\mathbb{M}_{A, \hat{A}}$ . Покажем, что в этом случае коды изображений  $A$  и  $\hat{A}$  различны. Для этого найдем такой набор индексов  $D$ , что  $\rho_B^D \neq \hat{\rho}_B^D$ .

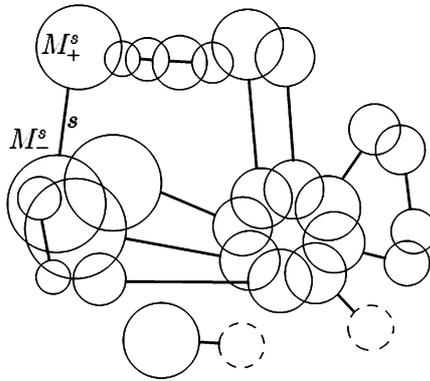


Рис. 8.

Чтобы найти нужный набор индексов  $D$ , построим вспомогательную конструкцию — граф  $G$  на основе семейства множеств  $\mathbb{M}_{A, \hat{A}}$  (рис. 8). Для этого сначала построим промежуточный граф  $G'$ . Вершинами графа  $G'$  объявим множества из  $\mathbb{M}_{A, \hat{A}}$ , то есть  $M_+^s$  и  $M_-^s$  для

всевозможных  $s \in N_{|A|}$ . Две вершины соединяем ребром, если соответствующие множества имеют непустое пересечение. Так получаем граф  $G'$  (рис. 9).

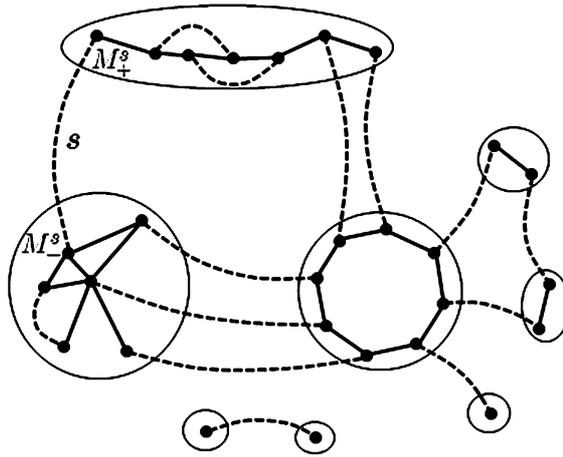


Рис. 9.

Вершинами графа  $G$  объявим компоненты связности графа  $G'$ . Далее, для каждого  $s \in N_{|A|}$  находим компоненту связности  $G'$ , содержащую  $M_+^s$ , и компоненту связности, содержащую  $M_-^s$ , и соответствующие этим компонентам вершины графа  $G$  соединяем ребром. Для удобства припишем каждому ребру соответствующий индекс  $s$  (рис. 10).

Отметим, что по определению связности компоненты связности для каждого индекса  $s \in N_{|A|}$  определяются однозначно, причем в случае их совпадения получаем петлю в графе  $G$ . Итак, граф  $G$  полностью определен. По сути, вершины графа  $G$  — это «связные» подмножества множеств из  $\mathbb{M}_{A, \hat{A}}$ , поэтому далее будем говорить, что вершина  $v$  графа  $G$  содержит множество  $M \in \mathbb{M}_{A, \hat{A}}$ , и писать  $M \in v$ , имея ввиду данное соответствие между вершинами графа  $G$  и подмножествами семейства множеств  $\mathbb{M}_{A, \hat{A}}$ .

Предположим, что граф  $G$  — двудольный. Тогда его вершины делятся на два класса, так что никакие две вершины из одного класса не соединены ребром. Поэтому для каждого индекса  $s \in N_{|A|}$  множе-

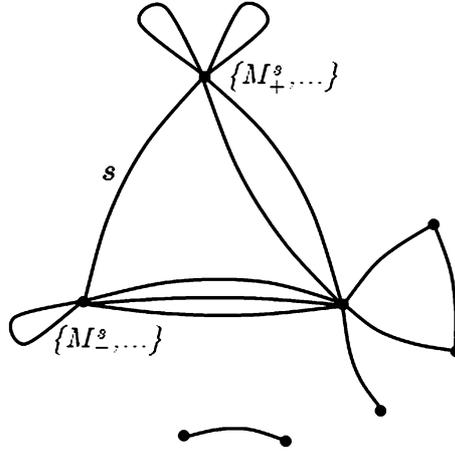


Рис. 10.

ства  $M_+^s$  и  $M_-^s$  принадлежат вершинам из разных классов. Положим  $B_1$  — объединение всех множеств, принадлежащих вершинам одного из классов,  $B_2 = B \setminus B_1$ . Очевидно, пара  $(B_1, B_2)$  является разделяющим разбиением, что противоречит условиям.

Итак, граф  $G$  не двудольный. Но граф не является двудольным тогда и только тогда, когда он содержит цикл нечетной длины. Выберем в графе  $G$  какой-нибудь цикл  $\mathcal{C}$  нечетной длины. Напомним, что ребра графа  $G$ , а потому и цикла  $\mathcal{C}$ , помечены индексами  $s \in N_{|A|}$ . Рассмотрим произвольную вершину  $v \in \mathcal{C}$ . Возможны два случая:

- 1) Длина цикла  $\mathcal{C}$  больше 1. Тогда из вершины  $v$  выходят ровно два ребра цикла  $\mathcal{C}$ . Пусть они помечены индексами  $s'$  и  $s''$ . Ровно одно из множеств  $M_+^{s'}$ ,  $M_-^{s'}$  содержится в вершине  $v$  — обозначим его через  $M'_v$ . Аналогично, через  $M''_v$  обозначим то множество из  $M_+^{s''}$ ,  $M_-^{s''}$ , которое содержится в вершине  $v$ .
- 2) Длина цикла  $\mathcal{C}$  равна 1. Тогда из вершины  $v$  выходит единственное ребро (петля) цикла  $\mathcal{C}$ . Пусть оно помечено индексом  $s$ . Оба множества  $M_+^s$ ,  $M_-^s$  содержатся в вершине  $v$  — обозначим их через  $M'_v$  и  $M''_v$ .

По определению графа  $G$  вершина  $v$  соответствует компоненте связности промежуточного графа  $G'$ . При этом множества  $M'_v$  и  $M''_v$

соответствуют вершинам графа  $G'$ , содержащимся в этой компоненте связности. Связность означает, что в графе  $G'$  существует путь, связывающий эти две вершины. Другими словами, существует последовательность множеств  $M_0^v = M_v', M_1^v, \dots, M_{k_v}^v, M_{k_v+1}^v = M_v''$  из  $v$ , такая что  $M_i^v \cap M_{i+1}^v \neq \emptyset, i = 0, \dots, k_v$ . Будем называть такую последовательность множеств *связывающей* для  $v$ . Также будем называть множества  $M_0^v$  и  $M_{k_v+1}^v$  *крайними*, а множества  $M_i^v, i = 1, \dots, k_v$  — *внутренними*.

Таким образом, в графе  $G$  для произвольного цикла  $\mathcal{C}$  нечетной длины мы можем построить систему связывающих последовательностей множеств (рис. 11). Теперь среди всех циклов нечетной длины и среди всех возможных связывающих последовательностей выберем тот вариант, при котором общее количество участвующих в последовательностях множеств минимально.

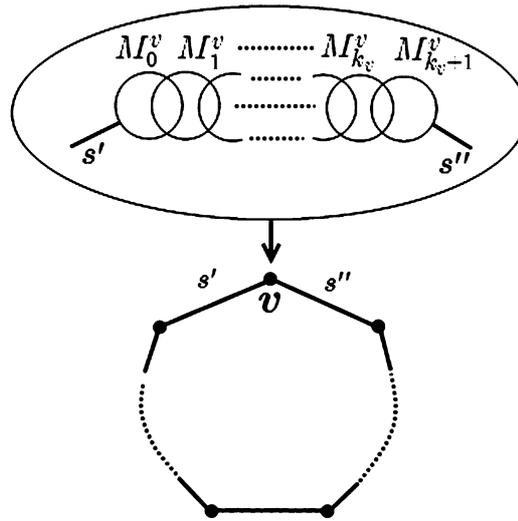


Рис. 11.

Итак, пусть  $\mathcal{C}$  — выбранный цикл,  $\{(M_0^v, \dots, M_{k_v+1}^v) | v \in \mathcal{C}\}$  — множество связывающих последовательностей, и общее количество участвующих множеств минимально. Покажем, что в этом случае для полученной системы множеств выполняются следующие свойства:

- 1)  $M_i^v \cap M_j^v \neq \emptyset$  при  $|i - j| = 1$ ,  $v \in \mathcal{C}$ ,  $i, j = 0, \dots, k_v + 1$ . Это свойство позволит в дальнейшем выбрать индексы из соответствующих непустых пересечений;
- 2)  $M_i^v \cap M_j^v = \emptyset$  при  $|i - j| \geq 2$ ,  $v \in \mathcal{C}$ ,  $i, j = 0, \dots, k_v + 1$ . Это свойство гарантирует, что выбранные в различных пересечениях индексы будут различны;
- 3)  $\widetilde{M}_i^v \cap (M_j^{v'} \cap M_{j+1}^{v'}) = \emptyset$ ,  $v, v' \in \mathcal{C}$ ,  $i = 1, \dots, k_v$ ,  $j = 0, 1, \dots, k_{v'}$ . Здесь через  $\widetilde{M}_i^v$  обозначено то множество, которое вместе с  $M_i^v$  образует пару  $M_+^s, M_-^s$ . Это свойство гарантирует, что выбранные в пересечениях индексы не окажутся ни в одном из  $\widetilde{M}_i^v$ .

Свойство 1 выполняется по определению связывающей последовательности.

Предположим, что не выполняется свойство 2 и существует вершина  $v \in \mathcal{C}$ , для которой  $M_i^v \cap M_j^v \neq \emptyset$  при  $|i - j| \geq 2$ ,  $i, j = 0, \dots, k_v + 1$ . Тогда из связывающей последовательности для вершины  $v$  можно удалить множества, промежуточные между  $M_i^v$  и  $M_j^v$ , и получить более короткую последовательность, что противоречит выбору изначальных связывающих последовательностей (рис. 12). Итак, свойство 2 выполняется.

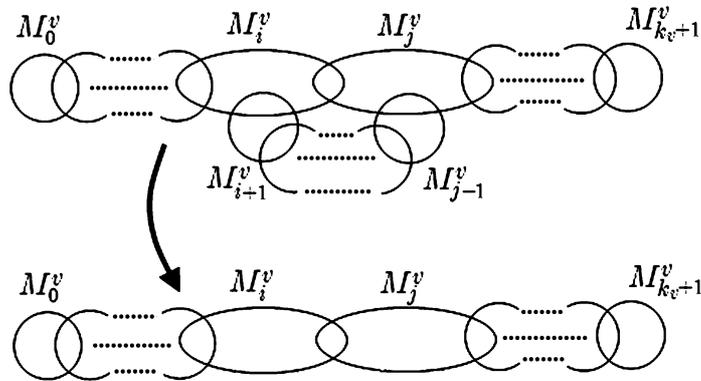


Рис. 12.

Чтобы получить свойство 3, докажем более сильное утверждение:  $\widetilde{M}_i^v \cap M_j^{v'} = \emptyset$ ,  $v, v' \in \mathcal{C}$ ,  $i = 1, \dots, k_v$ ,  $j = 1, \dots, k_{v'}$ . Предполо-

жим, что это не так и существуют вершины  $v, v' \in \mathcal{C}$ , для которых  $\widetilde{M}_i^v \cap M_j^{v'} \neq \emptyset$ ,  $i \in \{1, \dots, k_v\}$ ,  $j \in \{1, \dots, k_{v'}\}$  (рис. 13). Тогда множество  $\widetilde{M}_i^v$  содержится в вершине  $v'$ . Множества  $\widetilde{M}_i^v$  и  $M_i^v$  по определению являются для некоторого индекса  $s$  парой  $M_+^s, M_-^s$ , поэтому ребро, помеченное индексом  $s$ , соединяет в графе  $G$  вершины  $v$  и  $v'$ . Цикл  $\mathcal{C}$  делится этим ребром на два цикла, один из которых также нечетной длины, причем не большей, чем у цикла  $\mathcal{C}$ . Рассмотрим этот новый цикл. Для вершин, отличных от  $v$  и  $v'$ , оставим связывающие последовательности теми же. Для вершин  $v$  и  $v'$  изменим концы связывающих последовательностей на  $M_i^v$  и  $\widetilde{M}_i^v$  соответственно. При этом длина связывающей последовательности для  $v'$  не увеличится, а длина связывающей последовательности для  $v$  уменьшится за счет того, что  $i \in \{1, \dots, k_v\}$ . Таким образом, количество участвующих множеств уменьшится, что противоречит выбору цикла  $\mathcal{C}$ . Итак, утверждение верно, а вместе с ним выполняется и свойство 3.

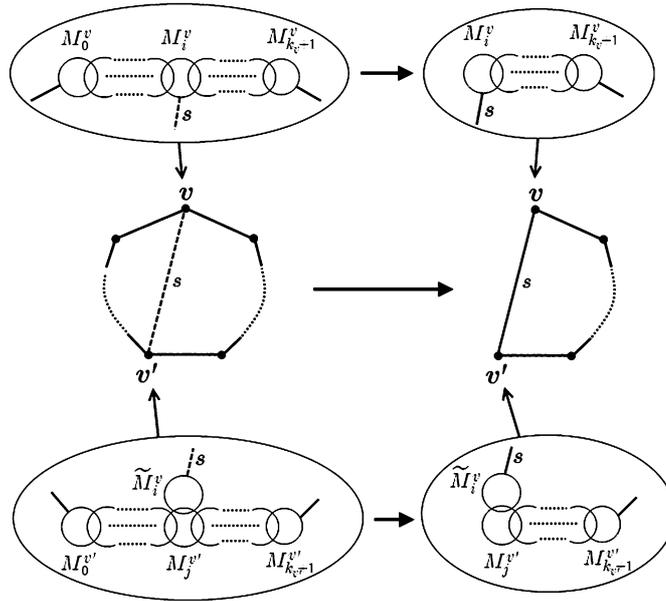


Рис. 13.

Теперь все готово для того, чтобы выбрать набор индексов  $D$ . Выберем по одному индексу из множеств  $M_j^v \cap M_{j+1}^v$ ,  $v \in \mathcal{C}$ ,  $j = 0, 1, \dots, k_v$ . Свойства 1-3 гарантируют, что такой выбор возможен, причем все индексы будут различны, то есть будет выбрано множество индексов  $B' \subseteq B$  мощности  $|B'| = \sum_{v \in \mathcal{C}} (k_v + 1)$ . Каждое из участвующих в цикле  $\mathcal{C}$  множеств  $M_i^v$  соответствует некоторому индексу  $s \in \mathbb{N}_{|A|}$  (для которого  $M_i^v = M_+^s$  или же  $M_i^v = M_-^s$ ). Обозначим через  $B''$  множество всех таких индексов. Свойства 1-3 гарантируют, что все индексы, соответствующие внутренним множествам  $M_i^v$ ,  $v \in \mathcal{C}$ ,  $i = 1, \dots, k_v$ , будут различны. Наоборот, крайние множества ( $M_0^v$  и  $M_{k_v+1}^v$ ) дают в два раза меньше индексов, которые приписаны ребрам цикла  $\mathcal{C}$ . Поэтому для мощности множества  $B''$  верно  $|B''| = \sum_{v \in \mathcal{C}} (k_v + 1)$  (рис. 14). Заметим также, что каждое внутреннее множество  $M_i^v$  содержит не меньше 2 индексов (в силу свойств 1 и 2), а крайние множества непустые (свойство 1) и образуют пары  $M_+^s, M_-^s$ . Отсюда следует, что ни один из индексов  $s \in B''$  не принадлежит симплексному набору  $B$ , так как для индексов из симплексного набора обязательно  $|M_+^s| = 1$ ,  $M_-^s = \emptyset$ . Таким образом,  $B' \subseteq B$ ,  $B' \cap B'' = \emptyset$ ,  $|B'| = |B''|$ , и в качестве набора  $D$  можно взять  $D = (B \setminus B') \cup B''$ , так как  $|D| = |B| - |B'| + |B''| = |B| = n + 1$ .

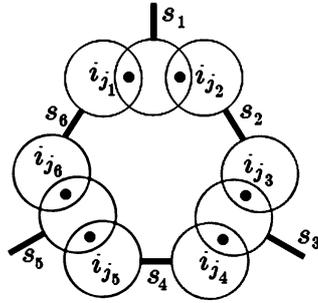


Рис. 14.

Далее, рассмотрим элементы  $\mu$ -кодов  $\mu_B^D$  и  $\hat{\mu}_B^D$  и покажем, что  $|\mu_B^D| \neq |\hat{\mu}_B^D|$ . Для этого воспользуемся формулой (2) и выразим  $\mu_B^D, \hat{\mu}_B^D$  через ключевые подмножества  $\mu_B$  и  $\hat{\mu}_B$ :

$$\mu_{s_1 \dots s_{n+1}}^{r_1 \dots r_{n+1}} = \frac{\begin{vmatrix} \mu_1^{r_1} & \dots & \mu_{n+1}^{r_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1^{r_{n+1}} & \dots & \mu_{n+1}^{r_{n+1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mu_1^{s_1} & \dots & \mu_{n+1}^{s_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1^{s_{n+1}} & \dots & \mu_{n+1}^{s_{n+1}} \end{vmatrix}}$$

Для индексов  $i_m \in B = \{i_1, \dots, i_{n+1}\}$  выполнено:

$$\mu_j^{i_m} = \hat{\mu}_j^{i_m} = \begin{cases} 1, & m = j; \\ 0, & m \neq j. \end{cases}$$

Поэтому знаменатель в формуле (2), примененной к  $\mu_B^D$  и  $\hat{\mu}_B^D$ , равен 1 как определитель единичной матрицы. Рассмотрим определитель в числителе. Строки, соответствующие индексам из  $B \setminus B'$ , по той же причине имеют ровно одну единицу и нули на остальных позициях, причем все такие строки различны. Это наблюдение позволяет вычеркнуть эти строки и столбцы, соответствующие единицам. После этого останутся только те элементы, которые стоят на пересечении строк, соответствующих индексам из  $B''$ , со столбцами, соответствующими индексам из  $B'$ , то есть  $\mu_j^s$  ( $\hat{\mu}_j^s$ ), для которых  $s \in B''$ ,  $i_j \in B' \subseteq B = \{i_1, \dots, i_{n+1}\}$  (рис. 15).

Рассмотрим два возможных случая (рис. 16 и 17):

- 1) Индекс  $s \in B''$  соответствует внутреннему множеству  $M_i^v$ ,  $v \in \mathcal{C}$ ,  $i = 1, \dots, k_v$ . По свойству 3 ни один из индексов  $i_j \in B'$  не лежит в  $\widetilde{M}_i^v$ , а по свойству 2 только два индекса из  $B'$  лежат в  $M_i^v$  (один из  $M_{i-1}^v \cap M_i^v$  и еще один из  $M_i^v \cap M_{i+1}^v$ ). Поэтому для этих двух индексов имеем  $\mu_j^s = \hat{\mu}_j^s \neq 0$  в случае  $M_i^v = M_+^s$ , и  $\mu_j^s = -\hat{\mu}_j^s \neq 0$  в случае  $M_i^v = M_-^s$ . Для остальных индексов  $i_j \in B'$  имеем  $\mu_j^s = \hat{\mu}_j^s = 0$ .
- 2) Индекс  $s \in B''$  соответствует крайнему множеству  $M_0^v$  (или  $M_{k_v+1}^v$ ),  $v \in \mathcal{C}$ . Этот же индекс соответствует множеству  $\widetilde{M}_0^v$  ( $\widetilde{M}_{k_v+1}^v$ ), которое является одним из множеств  $M_0^{v'}$  или  $M_{k_{v'}+1}^{v'}$  для соседней вершины  $v'$  из цикла  $\mathcal{C}$ . Аналогично получаем,

	$B \setminus B'$	$B \setminus B'$	$B'$				
	$B \setminus B'$	E	0				
$B''$	0	$\mu_{j_1}^{s_1}$	$\mu_{j_2}^{s_1}$	0	0	0	0
		0	$\mu_{j_2}^{s_2}$	$\mu_{j_3}^{s_2}$	0	0	0
		0	0	$\mu_{j_3}^{s_3}$	$\mu_{j_4}^{s_3}$	0	0
		0	0	0	$\mu_{j_4}^{s_4}$	$\mu_{j_5}^{s_4}$	0
		0	0	0	0	$\mu_{j_5}^{s_5}$	$\mu_{j_6}^{s_5}$
		$\mu_{j_1}^{s_6}$	0	0	0	0	$\mu_{j_6}^{s_6}$

Рис. 15.

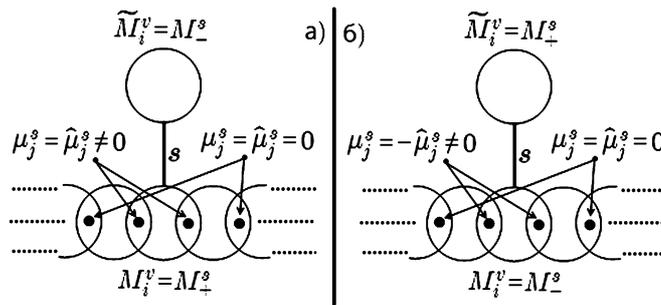


Рис. 16.

что элементы ключевых множеств отличны от нуля только для двух индексов. Но теперь эти два индекса будут лежать каждый в своем множестве  $M_+^s$  или  $M_-^s$ , поэтому, в отличие от предыдущего случая, будем иметь  $\mu_j^s = \hat{\mu}_j^s$  для одного индекса и  $\mu_j^s = -\hat{\mu}_j^s$  для другого индекса.

Итак, в оставшемся определителе каждая строка и каждый столбец имеет ровно два ненулевых элемента, причем все строки и столбцы попарно различны. Поэтому при разложении определителя выбор одного из двух ненулевых элементов в какой-нибудь строке полностью определяет выбор ненулевых элементов в оставшихся строках

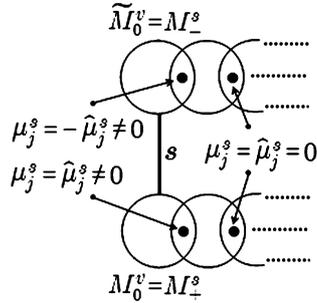


Рис. 17.

(рис. 18). Это наблюдение позволяет записать элементы  $|\mu_B^D|$  и  $|\hat{\mu}_B^D|$  в виде  $|a + b|$  и  $|\hat{a} + \hat{b}|$  соответственно, где  $a$  и  $\hat{a}$  имеют вид  $\delta_a \prod_{M_a} \mu_j^s$  и  $\delta_a \prod_{M_a} \hat{\mu}_j^s$ ,  $b$  и  $\hat{b}$  имеют вид  $\delta_b \prod_{M_b} \mu_j^s$  и  $\delta_b \prod_{M_b} \hat{\mu}_j^s$ ,  $\delta_a, \delta_b = \pm 1$ ,  $M_a, M_b$  — соответствующие множества пар  $(s, j)$ , определяющие выбор элементов в определителе.

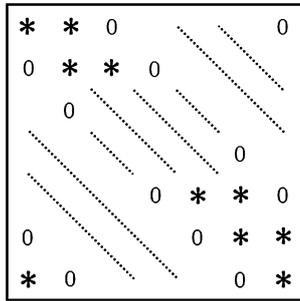


Рис. 18.

Как уже было показано, для индексов  $s$ , соответствующих внутренним множествам  $M_i^v$ ,  $v \in \mathcal{C}$ ,  $i = 1, \dots, k_v$ , множители  $\mu_{j_a}^s, \mu_{j_b}^s$  либо оба совпадают с  $\hat{\mu}_{j_a}^s, \hat{\mu}_{j_b}^s$ , либо оба отличаются от них знаком. Поэтому и произведения по всем таким индексам  $s$  обладают этим же свойством:  $\prod \mu_{j_a}^s, \prod \mu_{j_b}^s$  либо оба совпадают с  $\prod \hat{\mu}_{j_a}^s, \prod \hat{\mu}_{j_b}^s$ , либо оба отличаются от них знаком.

В то же время, для индексов  $s$ , соответствующих крайним множествам  $M_0^v (M_{k_v+1}^v)$ ,  $v \in \mathcal{C}$ , из множителей  $\mu_{j_a}^s, \mu_{j_b}^s$  один совпадает, а второй отличается знаком от соответствующего множителя из  $\hat{\mu}_{j_a}^s, \hat{\mu}_{j_b}^s$ . Но число таких индексов  $s$  нечетно, так как цикл  $\mathcal{C}$  нечетной длины. Поэтому и произведения по всем таким индексам  $s$  обладают этим же свойством: из  $\prod \mu_{j_a}^s, \prod \mu_{j_b}^s$  одно совпадает, а второе отличается знаком от соответствующего  $\prod \hat{\mu}_{j_a}^s, \prod \hat{\mu}_{j_b}^s$ .

Но тогда это последнее свойство будет верно и для произведения по всем индексам  $s \in B''$ , а потому либо  $a = \hat{a}$ ,  $b = -\hat{b}$ , либо  $a = -\hat{a}$ ,  $b = \hat{b}$ . Но тогда имеем  $|\hat{a} + \hat{b}| = |a - b|$  и если предположить, что  $|\mu_B^D| = |\hat{\mu}_B^D|$ , то и  $|a+b| = |a-b|$ . Последнее равенство возможно только при  $ab = 0$ , но все присутствующие в  $a$  и  $b$  множители отличны от нуля, откуда и получаем противоречие.

Итак,  $\rho_B^D = |\mu_B^D| \neq |\hat{\mu}_B^D| = \hat{\rho}_B^D$  и коды изображений  $A$  и  $\hat{A}$  различны. Теорема доказана.

## 5. Геометрическая интерпретация

В данном разделе устанавливается геометрическая интерпретация теоремы 2: однозначное восстановление изображения по его коду возможно только в классе *допустимых* изображений (теорема 3).

**Определение 8.** Рассмотрим произвольную аффинную систему координат в  $\mathbb{R}^n$ . Пусть  $M = \{\mathbf{x}^{s_1}, \dots, \mathbf{x}^{s_m}\}$  — некоторое множество точек. Гранью  $\langle M \rangle$  называется аффинная оболочка множества  $M$ , то есть  $\langle M \rangle = \{\alpha_1 \mathbf{x}^{s_1} + \dots + \alpha_m \mathbf{x}^{s_m} \mid \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1\}$  (рис. 19).

Будем использовать обозначение  $\langle M \rangle$  и в случае множества индексов  $M = \{s_1, \dots, s_m\}$ , понимая под этим грань, образованную соответствующим множеством точек.

**Лемма 4.** Рассмотрим изображение  $A$ . Пусть  $B$  — симплексный набор индексов. Тогда для любых подмножеств симплексного набора  $B_1 \subseteq B$ ,  $B_2 \subseteq B$  верно:  $\langle B_1 \rangle \cap \langle B_2 \rangle = \langle B_1 \cap B_2 \rangle$ .

**Доказательство.** Пусть для удобства  $B_1 = \{a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l\}$ ,  $B_2 = \{b_1, \dots, b_l, c_1, \dots, c_m\}$ , то есть  $B_1 \cap B_2 = \{b_1, \dots, b_l\}$ .

$$M = \{\mathbf{x}^{s_1}, \mathbf{x}^{s_2}\}$$

$$M = \{\mathbf{x}^{s_1}, \mathbf{x}^{s_2}, \mathbf{x}^{s_3}\}$$

$$M = \{\mathbf{x}^{s_1}, \mathbf{x}^{s_2}, \mathbf{x}^{s_3}, \mathbf{x}^{s_4}\}$$

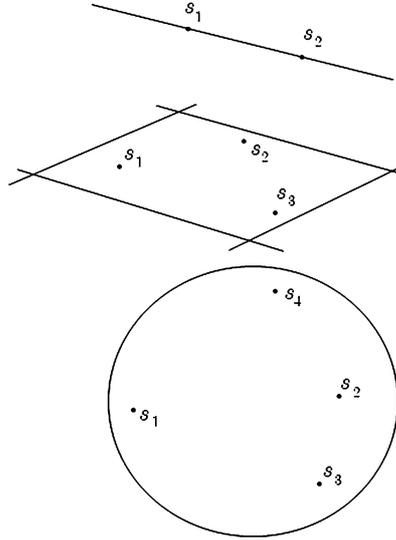


Рис. 19.

Пусть  $\mathbf{x} \in \langle B_1 \rangle \cap \langle B_2 \rangle$ . Это означает, что

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}^{a_i} + \sum_{j=1}^l \beta_j \mathbf{x}^{b_j} = \sum_{j=1}^l \beta'_j \mathbf{x}^{b_j} + \sum_{t=1}^m \gamma_t \mathbf{x}^{c_t},$$

где  $\sum \alpha_i + \sum \beta_j = 1, \quad \sum \beta'_j + \sum \gamma_t = 1.$

В силу условий на коэффициенты это равенство останется верным и для векторов  $(\mathbf{x}, 1), (\mathbf{x}^{a_i}, 1), (\mathbf{x}^{b_j}, 1), (\mathbf{x}^{c_t}, 1)$ . Но эти вектора линейно-независимы как часть векторов симплексного набора. Поэтому такое равенство возможно только при  $\alpha_i = 0, i = 1, \dots, k, \beta_j = \beta'_j, j = 1, \dots, l, \gamma_t = 0, t = 1, \dots, m$ , то есть когда  $\mathbf{x} \in \langle B_1 \cap B_2 \rangle$ . Итак, получаем включение  $\langle B_1 \rangle \cap \langle B_2 \rangle \subseteq \langle B_1 \cap B_2 \rangle$ . Обратное включение очевидно, поэтому верно равенство  $\langle B_1 \rangle \cap \langle B_2 \rangle = \langle B_1 \cap B_2 \rangle$ . Лемма доказана.

**Лемма 5.** Рассмотрим изображение  $A$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Пусть  $B = \{i_1, \dots, i_{n+1}\}$  — симплексный набор индексов,  $\mu_B$  — ключевое подмножество  $\mu$ -кода относительно  $B$ . Тогда для элементов  $\mu_j^p \in \mu_B$  верно:  $\mu_j^p = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}^p \in \langle B \setminus i_j \rangle$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mu_j^p = 0$ . По определению элемента  $\mu_j^p$  получаем, что определитель, составленный из векторов  $(\mathbf{x}^p, 1)$ ,  $(\mathbf{x}^{i_k}, 1)$ ,  $i_k \in B \setminus i_j$ , равен нулю. Это равносильно линейной зависимости данных векторов. В то же время вектора  $(\mathbf{x}^{i_k}, 1)$ ,  $i_k \in B \setminus i_j$ , линейно независимы как часть векторов, соответствующих симплексу набору индексов. Поэтому линейная зависимость всей совокупности векторов равносильна выразимости вектора  $(\mathbf{x}^p, 1)$  через аффинную комбинацию (за счет последней координаты) векторов  $(\mathbf{x}^{i_k}, 1)$ ,  $i_k \in B \setminus i_j$ . Другими словами, точка  $p$  лежит в грани  $\langle B \setminus i_j \rangle$ . Так как все переходы равносильны, имеем  $\mu_j^p = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}^p \in \langle B \setminus i_j \rangle$ . Лемма доказана.

**Лемма 6.** Рассмотрим изображение  $A$  в  $\mathbb{R}^n$ , представленное в виде  $A = M_1 \sqcup M_2$ . Пусть  $B = \{i_1, \dots, i_{n+1}\}$  — симплексный набор индексов,  $B_1 = B \cap M_1$ ,  $B_2 = B \cap M_2$  и  $\{\mu_j^s | s \in \mathbb{N}_{|A|}, j \in \mathbb{N}_{n+1}\}$  — ключевое подмножество  $\mu$ -кода относительно  $B$ . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) Грань  $\langle M_1 \rangle$  не пересекается с гранью  $\langle M_2 \rangle$ ;
- 2) Для каждой точки  $\mathbf{x}^p \in M_1$  имеет место

$$\sum_{i_j \in B_1} \mu_j^p = 1, \quad \sum_{i_j \in B_2} \mu_j^p = 0$$

Для каждой точки  $\mathbf{x}^p \in M_2$  имеет место

$$\sum_{i_j \in B_1} \mu_j^p = 0, \quad \sum_{i_j \in B_2} \mu_j^p = 1.$$

**Доказательство.** Для любого индекса  $p \in \mathbb{N}_{|A|}$  выполняется соотношение (1) для ключевого подмножества:  $\sum_{i_j \in B} \mu_j^p = 1$ . Отсюда имеем

$$\sum_{i_j \in B_1} \mu_j^p = 1 \Leftrightarrow \sum_{i_j \in B_2} \mu_j^p = 0.$$

По определению ключевого подмножества  $\mu$ -кода каждый элемент  $\mu_j^p$  является отношением двух определителей. Определитель  $V$

в знаменателе одинаков для всех элементов и отличен от нуля, поэтому в равенстве  $\sum_{i_j \in B_2} \mu_j^p = 0$  на него можно умножить обе части и в дальнейшем не учитывать. Останется сумма определителей из числителей соответствующих элементов. Обозначим эти определители через  $V_j$ . Каждый  $V_j$  отличается от  $V$  одной строкой  $(\mathbf{x}^p, 1)$  на  $j$ -м месте, соответствующем индексу  $i_j \in B_2$ . Рассмотрим новый определитель  $V'$ , прибавив к каждой строке определителя  $V$ , соответствующей индексу  $i_j \in B_2$ , строку  $(\mathbf{x}^p, 1)$ . Нетрудно убедиться, что  $V' = \sum_{i_j \in B_2} V_j + V$ . Таким образом, верно:

$$\sum_{i_j \in B_2} \mu_j^p = 0 \Leftrightarrow \sum_{i_j \in B_2} V_j = 0 \Leftrightarrow V' = V.$$

Положим для удобства  $B_1 = \{a_1, \dots, a_k\}$ ,  $B_2 = \{b_1, \dots, b_m\}$ , и получим:

$$\begin{aligned} V' = V &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{x}^{a_1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}^{a_k} & 1 \\ \mathbf{x}^{b_1} + \mathbf{x}^p & 1 + 1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}^{b_m} + \mathbf{x}^p & 1 + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}^{a_1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}^{a_k} & 1 \\ \mathbf{x}^{b_1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}^{b_m} & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{x}^{a_1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}^{a_k} & 1 \\ \mathbf{x}^{b_1} - \mathbf{x}^{b_m} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}^{b_{m-1}} - \mathbf{x}^{b_m} & 0 \\ \mathbf{x}^{b_m} + \mathbf{x}^p & 1 + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}^{a_1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}^{a_k} & 1 \\ \mathbf{x}^{b_1} - \mathbf{x}^{b_m} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}^{b_{m-1}} - \mathbf{x}^{b_m} & 0 \\ \mathbf{x}^{b_m} & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{x}^{a_1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}^{a_k} & 1 \\ \mathbf{x}^{b_1} - \mathbf{x}^{b_m} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}^{b_{m-1}} - \mathbf{x}^{b_m} & 0 \\ \mathbf{x}^p & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда строки линейно зависимы:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\mathbf{x}^{a_1}, 1) + \dots + \varphi_k(\mathbf{x}^{a_k}, 1) + \gamma_1((\mathbf{x}^{b_1}, 1) - (\mathbf{x}^{b_m}, 1)) + \dots \\ \dots + \gamma_{m-1}((\mathbf{x}^{b_{m-1}}, 1) - (\mathbf{x}^{b_m}, 1)) + \psi(\mathbf{x}^p, 1) = 0 \end{aligned}$$

где не все коэффициенты  $\psi, \varphi_i, \gamma_j$  равны нулю.

$2 \Rightarrow 1$ . В силу линейной независимости векторов  $(\mathbf{x}^{a_i}, 1), (\mathbf{x}^{b_j}, 1)$ , коэффициент  $\psi \neq 0$  и вектор  $(\mathbf{x}^p, 1)$  выражается через остальные вектора:

$$(\mathbf{x}^p, 1) = \sum_{i=1}^k \alpha_i (\mathbf{x}^{a_i}, 1) + \sum_{j=1}^m \beta_j (\mathbf{x}^{b_j}, 1),$$

где  $\alpha_i = -\frac{\varphi_i}{\psi}, i = 1, \dots, k, \beta_j = -\frac{\gamma_j}{\psi}, j = 1, \dots, m-1, \beta_m = \frac{\sum_{j=1}^{m-1} \gamma_j}{\psi}$ .

Легко видеть, что  $\sum \alpha_i = 1, \sum \beta_j = 0$ . Такое выражение верно для каждого вектора  $(\mathbf{x}^p, 1)$ , где  $\mathbf{x}^p \in M_1$ , а потому тем же свойством будет обладать любая их аффинная комбинация, то есть для любой точки  $\mathbf{x} \in \langle M_1 \rangle$  имеем:

$$(\mathbf{x}, 1) = \sum_{i=1}^k \alpha_i (\mathbf{x}^{a_i}, 1) + \sum_{j=1}^m \beta_j (\mathbf{x}^{b_j}, 1), \text{ где } \sum \alpha_i = 1, \sum \beta_j = 0.$$

Аналогично получаем, что для любой точки  $\mathbf{x} \in \langle M_2 \rangle$  верно:

$$(\mathbf{x}, 1) = \sum_{i=1}^k \alpha'_i (\mathbf{x}^{a_i}, 1) + \sum_{j=1}^m \beta'_j (\mathbf{x}^{b_j}, 1), \text{ где } \sum \alpha'_i = 0, \sum \beta'_j = 1.$$

Но тогда грани  $\langle M_1 \rangle$  и  $\langle M_2 \rangle$  не пересекаются, так как в противном случае вектор  $(\mathbf{x}, 1)$  представляется через вектора  $(\mathbf{x}^{a_i}, 1), (\mathbf{x}^{b_j}, 1)$  двумя различными способами (в первом случае  $\sum \alpha_i = 1, \sum \beta_j = 0$ ; во втором случае  $\sum \alpha'_i = 0, \sum \beta'_j = 1$ ), что невозможно в силу линейной независимости последних векторов.

$1 \Rightarrow 2$ . Пусть, наоборот, грани  $\langle M_1 \rangle$  и  $\langle M_2 \rangle$  не пересекаются. Рассмотрим точку  $\mathbf{x}^p \in M_1$ . Так как  $\mathbf{x}^p \in \langle B \rangle$ , то

$$\mathbf{x}^p = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}^{a_i} + \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbf{x}^{b_j}$$

для некоторых наборов  $\alpha_i, \beta_j$ , таких что  $\sum \alpha_i + \sum \beta_j = 1$ .

Предположим, что  $\sum_{j=1}^m \beta_j \neq 0$ . Тогда для некоторого  $\theta \neq 0$  имеем:

$$\sum_{j=1}^m \beta_j = \frac{1}{\theta}, \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 - \frac{1}{\theta}.$$

Положим  $\varepsilon_j = \theta\beta_j$ ,  $\eta_i = -\theta\alpha_i$ . Тогда выполняется:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \varepsilon_j &= \sum_{j=1}^m (\theta\beta_j) = \theta \sum_{j=1}^m \beta_j = 1, \\ \theta + \sum_{i=1}^k \eta_i &= \theta + \sum_{i=1}^k (-\theta\alpha_i) = \theta - \theta(1 - \frac{1}{\theta}) = 1. \end{aligned}$$

Так как грани  $\langle M_1 \rangle$  и  $\langle M_2 \rangle$  не пересекаются и точка  $\mathbf{x}^p$  лежит в грани  $\langle M_1 \rangle$ , то верно:

$$\theta\mathbf{x}^p + \sum_{i=1}^k \eta_i \mathbf{x}^{a_i} \neq \sum_{j=1}^m \varepsilon_j \mathbf{x}^{b_j}$$

для любых наборов  $\theta, \eta_i, \varepsilon_j$ , таких что  $\theta + \sum \eta_i = 1$ ,  $\sum \varepsilon_j = 1$ . Таким образом, для выбранных наборов  $\varepsilon_j = \theta\beta_j$ ,  $\eta_i = -\theta\alpha_i$  эти условия выполнены и верна цепочка равенств:

$$\mathbf{x}^p \neq \sum_{j=1}^m \frac{\varepsilon_j}{\theta} \mathbf{x}^{b_j} - \sum_{i=1}^k \frac{\eta_i}{\theta} \mathbf{x}^{a_i} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}^{a_i} + \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbf{x}^{b_j} = \mathbf{x}^p.$$

Это противоречие доказывает, что  $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ ,  $\sum_{j=1}^m \beta_j = 0$ . Но вектор  $(\mathbf{x}^p, 1)$  выражается через вектора  $(\mathbf{x}^{i_j}, 1)$  с теми же коэффициентами:

$$(\mathbf{x}^p, 1) = \sum_{i=1}^k \alpha_i (\mathbf{x}^{a_i}, 1) + \sum_{j=1}^m \beta_j (\mathbf{x}^{b_j}, 1).$$

Положим  $\varphi_i = -\psi\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $\gamma_j = -\psi\beta_j$ ,  $j = 1, \dots, m - 1$ , для некоторого  $\psi \neq 0$ . Тогда последнее выражение переписывается в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(\mathbf{x}^{a_1}, 1) + \dots + \varphi_k(\mathbf{x}^{a_k}, 1) + \gamma_1((\mathbf{x}^{b_1}, 1) - (\mathbf{x}^{b_m}, 1)) + \dots \\ \dots + \gamma_{m-1}((\mathbf{x}^{b_{m-1}}, 1) - (\mathbf{x}^{b_m}, 1)) + \psi(\mathbf{x}^p, 1) = 0 \end{aligned}$$

А это эквивалентно равенствам  $\sum_{i_j \in B_1} \mu_j^p = 1$ ,  $\sum_{i_j \in B_2} \mu_j^p = 0$ . Аналогичное доказательство проводится и для точки  $\mathbf{x}^p \in M_2$ . Лемма доказана.

Как известно [4], для любой точки  $\mathbf{x}^a \in \langle M \rangle$  множество  $\langle M \rangle - \mathbf{x}^a$  является линейным пространством. Размерностью грани  $\langle M \rangle$  (обозначение:  $\dim(\langle M \rangle)$ ) называется размерность пространства  $\langle M \rangle - \mathbf{x}^a$ . Под размерностью множества  $M$  будем понимать размерность соответствующей грани  $\langle M \rangle$ , и потому в обоих случаях будем использовать обозначение  $\dim(M)$ . По определению точки изображения  $A$  первого или второго рода в  $\mathbb{R}^n$  не лежат в одной гиперплоскости, что эквивалентно условию  $\dim(A) = n$ .

**Определение 9.** Изображение  $A$  называется допустимым, если для любых двух непересекающихся граней  $\langle M_1 \rangle$  и  $\langle M_2 \rangle$ , содержащих все точки изображения  $A$ , выполняется:  $\dim(M_1) + \dim(M_2) = \dim(A) - 1$ .

В случае изображений в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , имеем  $\dim(A) = n$ , и соотношение из определения допустимости можно записать в виде  $\dim(M_1) + \dim(M_2) = n - 1$ .

**Теорема 3.** Коду соответствует единственное изображение второго рода тогда и только тогда, когда изображение является допустимым.

**Доказательство. Необходимость.** Предположим, что изображение  $A$  в  $\mathbb{R}^n$  не является допустимым. Покажем, что в этом случае коду соответствует более одного изображения второго рода.

По предположению найдутся такие две непересекающиеся грани  $\langle M_1 \rangle$  и  $\langle M_2 \rangle$ , содержащие все точки изображения  $A$ , что выполняется:  $\dim(M_1) + \dim(M_2) \geq n$ . Выберем какой-нибудь симплексный набор индексов  $B = \{i_1, \dots, i_{n+1}\}$  и пусть  $B_1 = B \cap M_1$ ,  $B_2 = B \cap M_2$ , а  $\mu_B = \{\mu_j^s | s \in \mathbb{N}_{|A|}, j \in \mathbb{N}_{n+1}\}$  — ключевое подмножество  $\mu$ -кода изображения  $A$  относительно симплексного набора  $B$ . Согласно лемме 6 для точки  $\mathbf{x}^s \in M_1$  имеет место:  $\sum_{i_j \in B_1} \mu_j^s = 1$ ,  $\sum_{i_j \in B_2} \mu_j^s = 0$ . Наоборот, для любой точки  $\mathbf{x}^s \in M_2$  верно  $\sum_{i_j \in B_1} \mu_j^s = 0$ ,  $\sum_{i_j \in B_2} \mu_j^s = 1$ . Образует новое множество  $\hat{\mu}_B$ :

$$\hat{\mu}_j^s = \begin{cases} \mu_j^s, & \text{при } \mathbf{x}^s \in M_1, i_j \in B_1 \text{ и при } \mathbf{x}^s \in M_2, i_j \in B_2; \\ -\mu_j^s, & \text{при } \mathbf{x}^s \in M_1, i_j \in B_2 \text{ и при } \mathbf{x}^s \in M_2, i_j \in B_1. \end{cases}$$

Для построенного множества  $\hat{\mu}_B = \{\hat{\mu}_j^s | s \in \mathbb{N}_{|A|}, j \in \mathbb{N}_{n+1}\}$  выполняется соотношение (1) и по лемме 3 оно является ключевым подмножеством  $\mu$ -кода некоторого изображения  $\hat{A}$ . Легко видеть, что  $(B_1, B_2)$  является разделяющим разбиением, и, согласно теореме 2, получаем, что коды изображений  $A$  и  $\hat{A}$  совпадают.

Покажем, что изображения  $A$  и  $\hat{A}$  различны. Согласно теореме 1, достаточно показать различие их  $\mu$ -кодов. По построению множества  $\hat{\mu}_B$  различие проявляется на ненулевых элементах  $\hat{\mu}_j^s = -\mu_j^s$ , где  $\mathbf{x}^s \in M_1, i_j \in B_2$  или  $\mathbf{x}^s \in M_2, i_j \in B_1$ . Предположим, что при  $\mathbf{x}^s \in M_1, i_j \in B_2$  имеет место  $\mu_j^s = 0$ . Тогда, согласно лемме 5, любая точка  $\mathbf{x}^s \in M_1$  лежит в каждой из граней  $\langle B \setminus i_j \rangle, i_j \in B_2$ , а потому и в их пересечении, которое, согласно лемме 4, равно  $\langle B \setminus B_2 \rangle = \langle B_1 \rangle$ . Аналогично, если при  $\mathbf{x}^s \in M_2, i_j \in B_1$  имеет место  $\mu_j^s = 0$ , то любая точка  $\mathbf{x}^s \in M_2$  лежит в грани  $\langle B_2 \rangle$ . По предположению  $\dim(M_1) + \dim(M_2) \geq n$ . В то же время  $\dim(B_1) + \dim(B_2) = n - 1$ , поэтому должна существовать точка  $\mathbf{x}^s$ , не лежащая в гранях  $\langle B_1 \rangle$  и  $\langle B_2 \rangle$ . Значит, для этой точки имеем  $\mu_j^s \neq 0$ , причем  $\mathbf{x}^s \in M_1, i_j \in B_2$  или  $\mathbf{x}^s \in M_2, i_j \in B_1$ . Поэтому  $\hat{\mu}_j^s = -\mu_j^s \neq \mu_j^s$ , то есть  $\mu$ -коды изображений  $A$  и  $\hat{A}$  различны, а потому и сами изображения  $A$  и  $\hat{A}$  различны как изображения второго рода.

Таким образом, если изображение не является допустимым, коду соответствует более одного изображения второго рода. Другими словами, если коду соответствует единственное изображение второго рода, то оно является допустимым.

*Достаточность.* Предположим, что коду соответствует более одного изображения второго рода. Покажем, что в этом случае каждое такое изображение не является допустимым.

Выберем любые два различных изображения  $A$  и  $\hat{A}$ , соответствующих данному коду. Ясно, что они состоят из одинакового числа точек  $|A| = |\hat{A}|$ . Пусть  $B = \{i_1, \dots, i_{n+1}\}$  — симплексный набор индексов,  $\mu_B$  и  $\hat{\mu}_B$  — ключевые подмножества  $\mu$ -кодов изображений  $A$  и  $\hat{A}$  соответственно. Изображения  $A$  и  $\hat{A}$  удовлетворяют условиям

теоремы 2 и поэтому существует разбиение  $(B_1, B_2)$  симплексного набора  $B$ , разделяющее семейство  $\mathbb{M}_{A, \hat{A}}$ . Для любого индекса  $s \in \mathbb{N}_{|A|}$  по определению верно:

$$\mu_j^s = \hat{\mu}_j^s \text{ при } i_j \in M_+^s, \quad \mu_j^s = -\hat{\mu}_j^s \text{ при } i_j \in M_-^s.$$

В то же время соотношение (1) дает:

$$\sum_{i_j \in M_+^s} \mu_j^s + \sum_{i_j \in M_-^s} \mu_j^s = 1 \text{ и } \sum_{i_j \in M_+^s} \hat{\mu}_j^s + \sum_{i_j \in M_-^s} \hat{\mu}_j^s = 1.$$

Складывая и вычитая, получаем:

$$\sum_{i_j \in M_+^s} \mu_j^s = \sum_{i_j \in M_+^s} \hat{\mu}_j^s = 1 \text{ и } \sum_{i_j \in M_-^s} \mu_j^s = \sum_{i_j \in M_-^s} \hat{\mu}_j^s = 0.$$

Рассмотрим множество индексов  $M_1$  таких, что для  $s \in M_1$  выполнено  $M_+^s \subseteq B_1$ ,  $M_-^s \subseteq B_2$ . Очевидно,  $M_1 \supseteq B_1$ . Так как  $\mu_j^s = \hat{\mu}_j^s = 0$  при  $i_j \in B \setminus (M_+^s \cup M_-^s)$ , то

$$\begin{aligned} \sum_{i_j \in B_1} \mu_j^s &= \sum_{i_j \in M_+^s} \mu_j^s = \sum_{i_j \in M_+^s} \hat{\mu}_j^s = \sum_{i_j \in B_1} \hat{\mu}_j^s = 1, \\ \sum_{i_j \in B_2} \mu_j^s &= \sum_{i_j \in M_-^s} \mu_j^s = \sum_{i_j \in M_-^s} \hat{\mu}_j^s = \sum_{i_j \in B_2} \hat{\mu}_j^s = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим также множество индексов  $M_2$  таких, что для  $s \in M_2$  выполнено  $M_+^s \subseteq B_2$ ,  $M_-^s \subseteq B_1$ . Очевидно,  $M_2 \supseteq B_2$ . Аналогично доказывается, что для любого индекса  $s \in M_2$  имеет место

$$\sum_{i_j \in B_1} \mu_j^s = \sum_{i_j \in M_-^s} \mu_j^s = 0, \quad \sum_{i_j \in B_2} \mu_j^s = \sum_{i_j \in M_+^s} \mu_j^s = 1.$$

Согласно лемме 6, из полученных равенств следует, что грани  $\langle M_1 \rangle$  и  $\langle M_2 \rangle$  не пересекаются. Покажем, что сумма их размерностей не меньше, чем  $n$ . Так как изображения  $A$  и  $\hat{A}$  различны, существует индекс  $s$ , для которого множество  $M_-^s$  не пусто. Это означает, что для некоторого  $i_j \in B$  имеем  $\hat{\mu}_j^s = -\mu_j^s \neq 0$ . Согласно лемме 5, это означает, что точка  $\mathbf{x}^s$  не лежит в грани  $\langle B \setminus i_j \rangle$ . При этом,

если  $\mathbf{x}^s \in M_1$ , то  $i_j \in B_2$  и потому  $\langle B_1 \rangle \subsetneq \langle B \setminus i_j \rangle$ . Тогда  $\mathbf{x}^s$  тем более не лежит в грани  $\langle B_1 \rangle$ , то есть  $\dim(M_1) > \dim(B_1)$ . Аналогично, если  $\mathbf{x}^s \in M_2$ , то  $\dim(M_2) > \dim(B_2)$ . Итак, в обоих случаях получаем  $\dim(M_1) + \dim(M_2) > \dim(B_1) + \dim(B_2) = n - 1$ , то есть  $\dim(M_1) + \dim(M_2) \geq n$ . Но это означает, что изображение  $A$  (и  $\hat{A}$ ) не является допустимым.

Таким образом, если коду соответствует более одного изображения второго рода, то каждое такое изображение не является допустимым. Другими словами, если изображение является допустимым, то коду соответствует единственное изображение второго рода. Теорема доказана.

## 6. Случай двух граней

В данном разделе вопрос однозначного восстановления изображения рассматривается более детально — для случая, когда все точки изображения лежат в двух непересекающихся гранях. Известно достаточное условие для однозначного восстановления изображения по его коду с точностью до  $a'$ -эквивалентности: точки изображения не должны лежать в двух параллельных гиперплоскостях. Достаточность этого условия следует также из теоремы 3. В то же время рассматриваемое условие не является необходимым. Доказываемое ниже утверждение полностью разрешает данный вопрос.

Далее рассматриваются изображения без ссылки на размерность основного пространства  $\mathbb{R}^n$ , поэтому вместо записи  $B = \{i_1, \dots, i_{n+1}\}$  для симплексного набора индексов будем использовать короткое обозначение  $B$ . При этом под  $B$  будем понимать наименьшее множество индексов или соответствующих точек, для которого  $\dim(B) = \dim(A)$ . Из минимальности множества  $B$  следует, что для любого  $B' \subseteq B$  верно  $\dim(B') = |B'| - 1$ . Отсюда следует используемое в дальнейшем соотношение  $\dim(B_1) + \dim(B_2) = \dim(B_1 \sqcup B_2) - 1$ , если  $B_1$  и  $B_2$  — непересекающиеся подмножества симплексного набора  $B$ .

**Утверждение 1.** Пусть для изображения  $A$  выполняется:  $A = A_1 \sqcup A_2$  и грани  $\langle A_1 \rangle$ ,  $\langle A_2 \rangle$  не пересекаются. Изображение  $A$  является допустимым тогда и только тогда, когда  $\dim(A_1) +$

$\dim(A_2) = \dim(A) - 1$  и изображения  $A_1$  и  $A_2$  также являются допустимыми.

**Доказательство. Необходимость.** Пусть изображение  $A$  допустимо. По определению допустимости для любых двух непересекающихся граней  $\langle M_1 \rangle$  и  $\langle M_2 \rangle$ , которые содержат все точки изображения  $A$ , выполняется соотношение  $\dim(M_1) + \dim(M_2) = \dim(A) - 1$ . Выберем какой-нибудь симплексный набор  $B$ . Обозначим через  $B_i^M$  множество  $B \cap M_i$ ,  $i = 1, 2$ . Имеет место соотношение:

$$\dim(B_1^M) + \dim(B_2^M) = \dim(B) - 1 = \dim(A) - 1.$$

Ясно, что  $\dim(B_i^M) \leq \dim(M_i)$ ,  $i = 1, 2$ , и потому верно:

$$\dim(A) - 1 = \dim(B_1^M) + \dim(B_2^M) \leq \dim(M_1) + \dim(M_2) = \dim(A) - 1.$$

Но это возможно только в случае равенства  $\dim(B_i^M) = \dim(M_i)$ , что эквивалентно равенству  $\langle B_i^M \rangle = \langle M_i \rangle$ ,  $i = 1, 2$ .

Из доказанного следует, в частности, что

$$A_i \subseteq \langle B_i^A \rangle, \quad M_j \subseteq \langle B_j^M \rangle,$$

откуда следует включение

$$A_i \cap M_j \subseteq \langle B_i^A \rangle \cap \langle B_j^M \rangle = \{ \text{по лемме 4} \} = \langle B_i^A \cap B_j^M \rangle.$$

Поэтому верно  $\langle A_i \cap M_j \rangle \subseteq \langle B_i^A \cap B_j^M \rangle$ , и вместе с очевидным обратным включением получаем равенство

$$\langle A_i \cap M_j \rangle = \langle B_i^A \cap B_j^M \rangle, \quad i, j = 1, 2.$$

А это означает, что

$$\begin{aligned} \dim(A_i \cap M_1) + \dim(A_i \cap M_2) &= \dim(B_i^A \cap B_1^M) + \\ &+ \dim(B_i^A \cap B_2^M) = \dim(B_i^A) - 1 = \dim(A_i) - 1 \end{aligned}$$

Пусть теперь  $A_1 = C \sqcup D$  и грани  $\langle C \rangle$  и  $\langle D \rangle$  не пересекаются. Положим  $M_1 = C$ ,  $M_2 = A_2 \sqcup D$ . Покажем, что грани  $\langle M_1 \rangle$  и  $\langle M_2 \rangle$  не пересекаются. В противном случае с учетом  $A_2 \subseteq \langle B_2^A \rangle$  имеем

$$\sum_{s \in C} \alpha_s \mathbf{x}^s = \sum_{p \in B_2^A} \beta_p \mathbf{x}^p + \sum_{q \in D} \gamma_q \mathbf{x}^q$$

для некоторых наборов  $\alpha_s, \beta_p, \gamma_q$  таких, что  $\sum \alpha_s = 1, \sum \beta_p + \sum \gamma_q = 1$ . Если для некоторого  $p_0 \in B_2^A$  имеем  $\beta_{p_0} \neq 0$ , то

$$\mathbf{x}^{p_0} = \frac{1}{\beta_{p_0}} \left( \sum_{s \in C} \alpha_s \mathbf{x}^s - \sum_{p \in B_2^A \setminus p_0} \beta_p \mathbf{x}^p - \sum_{q \in D} \gamma_q \mathbf{x}^q \right).$$

Заметим, что сумма коэффициентов в правой части соотношения равна 1, то есть это аффинная комбинация. С учетом того, что  $C, D \subseteq \langle B_1^A \rangle$ , получаем

$$\mathbf{x}^{p_0} \in \langle B \setminus p_0 \rangle,$$

что невозможно. Поэтому для всех  $p \in B_2^A$  имеем  $\beta_p = 0$ . Но тогда

$$\sum_{s \in C} \alpha_s \mathbf{x}^s = \sum_{q \in D} \gamma_q \mathbf{x}^q,$$

что невозможно, так как грани  $\langle C \rangle$  и  $\langle D \rangle$  не пересекаются. Таким образом, грани  $\langle M_1 \rangle$  и  $\langle M_2 \rangle$  также не пересекаются и для них можно применить найденную формулу

$$\dim(A_i \cap M_1) + \dim(A_i \cap M_2) = \dim(A_i) - 1.$$

Имеем  $A_1 \cap M_1 = C, A_1 \cap M_2 = D$  и формула принимает вид

$$\dim(C) + \dim(D) = \dim(A_1) - 1.$$

А это и означает, что изображение  $A_1$  является допустимым. Аналогично доказывается допустимость изображения  $A_2$ .

*Достаточность.* Пусть изображения  $A_1, A_2$  допустимы и выполняется равенство  $\dim(A_1) + \dim(A_2) = \dim(A) - 1$ . Чтобы доказать допустимость изображения  $A$ , нужно проверить аналогичное равенство для остальных пар непересекающихся граней  $\langle M_1 \rangle, \langle M_2 \rangle, A = M_1 \sqcup M_2$ .

Выберем некоторый симплексный набор индексов  $B$ . Для множеств  $M_1, M_2, A = M_1 \sqcup M_2$  введем, как и раньше, обозначение  $B_i^M = B \cap M_i, i = 1, 2$ . Как уже было показано выше, из соотношения

$$\dim(A_1) + \dim(A_2) = \dim(A) - 1$$

следуют равенства  $\langle A_i \rangle = \langle B_i^A \rangle$ ,  $i = 1, 2$ .

Из допустимости изображений  $A_1$  и  $A_2$  аналогичным образом следуют равенства

$$\langle A_i \cap M_j \rangle = \langle B_i^A \cap B_j^M \rangle, \quad i, j = 1, 2.$$

Отсюда, в частности, получаем  $A_i \cap M_j \subseteq \langle B_i^A \cap B_j^M \rangle$ , а потому

$$\begin{aligned} M_j &= (A_1 \cap M_j) \sqcup (A_2 \cap M_j) \subseteq \langle B_1^A \cap B_j^M \rangle \sqcup \langle B_2^A \cap B_j^M \rangle \subseteq \\ &\subseteq \langle (B_1^A \cap B_j^M) \sqcup (B_2^A \cap B_j^M) \rangle = \langle B_j^M \rangle \end{aligned}$$

Поэтому верно включение  $\langle M_j \rangle \subseteq \langle B_j^M \rangle$ ,  $j = 1, 2$ . Обратное включение очевидно, поэтому имеем равенство  $\langle M_j \rangle = \langle B_j^M \rangle$ ,  $j = 1, 2$ . Но тогда

$$\dim(M_1) + \dim(M_2) = \dim(B_1^M) + \dim(B_2^M) = \dim(B) - 1 = \dim(A) - 1.$$

Итак,  $\dim(M_1) + \dim(M_2) = \dim(A) - 1$ . Утверждение доказано.

Доказанное утверждение позволяет выяснить допустимость изображения, лежащего в двух параллельных гиперплоскостях. В свою очередь, согласно теореме 3, допустимость изображения равносильна однозначности восстановления изображения по его коду с точностью до  $a'$ -эквивалентности. Используем полученные результаты для классификации изображений, лежащих в двух параллельных гиперплоскостях, в случае  $\dim(A) = 2, 3, 4$ .

**Случай  $\dim(A) = 2$ .** В данном случае изображение лежит на двух параллельных прямых. Согласно доказанному утверждению, сумма размерностей изображений на прямых должна быть равна 1. Таким образом, возможен единственный вариант:  $1 = 0 + 1$ . Это означает, что все точки на одной из прямых совпадают, а на второй прямой имеется не менее двух различных точек. Условие допустимости изображений на прямых всегда выполняется.

**Случай  $\dim(A) = 3$ .** В данном случае изображение лежит на двух параллельных плоскостях. Согласно доказанному утверждению, сумма размерностей изображений на плоскостях должна быть равна 2. Таким образом, возможно два варианта:

- 1)  $2 = 0 + 2$ . Это означает, что все точки на одной из плоскостей совпадают, а на второй плоскости имеется не менее трех различных точек. Условие допустимости для изображения на первой плоскости всегда выполняется, а для изображения на второй плоскости снова возможны два варианта:
  - а) Точки не лежат на двух параллельных прямых.
  - б) Часть точек лежит на одной прямой (среди них не менее двух различных), оставшиеся точки совпадают и не лежат на этой прямой.
- 2)  $2 = 1 + 1$ . Это означает, что все точки изображения лежат на двух скрещивающихся прямых, причем на каждой прямой имеется не менее двух различных точек.

Заметим, что 1.(б) является частным случаем 2. Таким образом, имеется только два существенно различных варианта.

**Случай  $\dim(A) = 4$ .** В данном случае изображение лежит в двух параллельных гиперплоскостях размерности 3. Согласно доказанному утверждению, сумма размерностей изображений на гиперплоскостях должна быть равна 3. Таким образом, возможно два варианта:

- 1)  $3 = 0 + 3$ . Это означает, что все точки на одной из гиперплоскостей совпадают, а на второй гиперплоскости имеется не менее четырех различных точек. Условие допустимости для изображения на первой гиперплоскости всегда выполняется, а для изображения на второй гиперплоскости снова возможны варианты:
  - а) Точки не лежат на двух параллельных плоскостях.
  - б) Часть точек лежит на одной плоскости (среди них не менее трех различных), оставшиеся точки совпадают и не лежат на этой плоскости. При этом для точек на первой плоскости выполняется один из двух вариантов:
    - Точки не лежат на двух параллельных прямых.
    - Часть точек лежит на одной прямой (среди них не менее двух различных), оставшиеся точки совпадают и не лежат на этой прямой.
  - в) Точки лежат на двух скрещивающихся прямых, причем на каждой прямой имеется не менее двух различных точек.

- 2)  $3 = 1 + 2$ . Это означает, что все точки одной из гиперплоскостей лежат на прямой (среди них не менее двух различных), а все точки второй гиперплоскости лежат на плоскости (среди них не менее трех различных). Условие допустимости для изображения на первой гиперплоскости всегда выполняется, а для изображения на второй гиперплоскости снова возможны два варианта:
- а) Точки не лежат на двух параллельных прямых.
  - б) Часть точек лежит на одной прямой (среди них не менее двух различных), оставшиеся точки совпадают и не лежат на этой прямой.

Заметим, что 1.(б).i является частным случаем 2.(а); 1.(в) совпадает с 2.(б); 1.(б).ii является частным случаем 1.(в) = 2.(б). Таким образом, имеется только три существенно различных варианта.

Автор выражает благодарность Козлову Вадиму Никитовичу за постановку задачи и научное руководство, а также Алексееву Дмитрию Владимировичу и Носову Михаилу Васильевичу за ценные замечания.

## Список литературы

- [1] Козлов В. Н. Элементы математической теории зрительного восприятия. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2001.
- [2] Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 2, Геометрия. М.: Наука, 1987.
- [3] Михалев А. А., Михалев А. В. Начала алгебры. Часть I. М.: Интернет-университет информационных технологий, 2005.
- [4] Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. М.: Просвещение, 1980.