О конструктивной характеризации пороговых функций, инвариантных относительно групп перестановок

А. П. Соколов

В работе рассматриваются классы пороговых функций, инвариантных относительно групп перестановок. Получено полное описание данных классов в терминах групп перестановок, сохраняющих разбиения. Показано, что «почти все» пороговые функции являются несимметрическими, то есть инвариантными относительно лишь тождественной перестановки. Рассматриваются вопросы сложности задания пороговых функций целочисленными линейными формами. Введено понятие размаха пороговой функции. Получены верхняя и нижняя оценки на величину размаха для пороговых функций, инвариантных относительно групп перестановок. Исследуется сложность взаимной перестройки пороговых функций, инвариантных относительно групп перестановок, путем пошагового изменения коэффициентов линейных форм. Получены верхняя и нижняя оценки сложности перестройки в худшем случае.

Ключевые слова: пороговые функции, сложность обучения нейросетей.

Введение

Пороговые функции алгебры логики являются математической моделью нейронов. Они представляют интерес благодаря своим универсальным вычислительным возможностям, а также благодаря возможности их обучения. Последнее свойство с успехом применяется на практике при решении плохо формализуемых задач.

В качестве средства задания пороговых функций в работе рассматриваются линейные формы вида $x_1w_1 + \ldots + x_nw_n - \sigma$ с целочисленными коэффициентами и свободным членом.

В работе рассматриваются классы пороговых функций, инвариантных относительно групп перестановок. Получено полное описание данных классов в терминах групп перестановок, сохраняющих разбиение на множестве переменных. Также показано, что «почти все» пороговые функции являются несимметрическими, то есть инвариантными относительно лишь тождественной перестановки.

Рассматриваются вопросы сложности задания пороговых функций целочисленными линейными формами. Для характеризации сложности линейных форм введено понятие размаха. Получены верхняя и нижняя оценки на величину размаха для пороговых функций, инвариантных относительно групп перестановок.

Исследуется сложность преобразования одной пороговой функции, заданной линейной формой, к другой, путем пошагового изменения коэффициентов линейной формы. В качестве меры сложности данного процесса принимается изменение коэффициента или свободного члена линейной формы на единицу. Данный процесс может интерпретироваться как процесс обучения нейрона с пороговой функцией активации.

В работе [2], для характеризации сложности обучения в классе всех пороговых функций исследовалась шенноновская функция $\rho(n)$. Она говорит о том, сколько минимально достаточно выполнить единичных модификаций исходной линейной формы от n переменных для задания желаемой пороговой функции. Было показано, что при стремлении n к бесконечности величина $\log_2 \rho(n)$ растет по порядку как $n \log_2 n$. В работе [4] показано, что для почти всех пар пороговых функций от n переменных сложность перестройки одной пороговой функции, заданной линейной формой, в другую с ростом n растет экспоненциально.

В данной работе рассмотрен вопрос о сложности взаимной перестройки внутри классов пороговых функций, инвариантных относительно групп перестановок, заданных на множестве переменных. Получены верхняя и нижняя оценки сложности перестройки в худшем случае.

1. Основные понятия, постановки и результаты

Пусть $U = \{u_1, u_2, \ldots\}$ — счетный алфавит переменных. Каждое из переменных u_i может принимать значения из множества $E_2 = \{0, 1\}$. В дальнейшем во избежание употребления сложных индексов мы будем использовать для обозначения букв алфавита U метасимволы x_i с индексами или без них.

Введем определения линейной формы и пороговой функции. *Линейной формой* назовем функцию вида

$$l_{\vec{w},\sigma}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i - \sigma,$$

где w_i и σ суть целые числа при $i = 1, \ldots, n$. Вектор $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ называют вектором весовых коэффициентов, а σ — порогом. Для простоты иногда будем обозначать линейную форму $l_{\vec{w},\sigma}(x_1, \ldots, x_n)$ соответствующим набором весовых коэффициентов и порога — $(w_1, \ldots, w_n, \sigma)$.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n) : E_2^n \to E_2$, называется *пороговой*, если существует линейная форма $l_{\vec{w},\sigma}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 w_1 + \ldots + x_n w_n - \sigma$ такая, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, \text{ если } \sum\limits_{i=1}^{n} x_i w_i - \sigma \geqslant 0; \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

В этом случае говорим, что *линейная форма $l_{\vec{w},\sigma}$ задает пороговую функцию* $f(x_1, \ldots, x_n)$, и записывается это так:

$$l_{\vec{w},\sigma} \to f(x_1, \ldots, x_n),$$

или просто $f_{\vec{w},\sigma}$.

Множество всех пороговых функций от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ обозначим T^n.

В связи с тем, что линейные формы с целочисленными коэффициентами и порогом позволяют задать любую пороговую функцию, далее в работе рассматриваются только такие линейные формы.

Рассмотрим перестановку $\pi \in S_n$, где S_n — группа перестановок над множеством $\Omega_n = \{1, \dots, n\}$. Будем называть пороговую функцию f *инвариантной относительно перестановки* π, если

$$f(x_1, \dots, x_n) = f\left(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}\right).$$

Легко видеть, что если f инвариантна относительно перестановок π_1 и π_2, то она также инвариантна относительно перестановки $\pi_1 \cdot \pi_2$, получающейся в результате последовательного применения перестановок π_2 и π_1. Отсюда следует, что для каждой подгруппы G группы перестановок S_n существует множество пороговых функций T_G^n, инвариантных относительно перестановок из G. Возникает естественный вопрос: сколько существует различных классов T_G^n и как они описываются?

Элементы $a, b \in \Omega_n$ назовем *π-эквивалентными*, если $a = \pi^r(b)$ для некоторого целого r. Отношение π-эквивалентности рабивает множество Ω_n на попарно непересекающиеся классы $O_1, \dots, O_k$, которые принято называть *π-орбитами.*

Далее, пусть $R = \{R_1, \dots, R_k\}$ — некоторое разбиение множества Ω_n. Говорят, что элементы $a, b \in \Omega_n$ *эквивалентны относительно разбиения* R, если a и b принадлежат одному и тому же подмножеству R_i разбиения R, и обозначается это так: $a \sim b \pmod R$.

Будем говорить, что перестановка π сохраняет разбиение R, если для всякого $a \in \Omega_n$ выполнено $a \sim \pi(a) \pmod R$.

Теорема 1. *Если пороговая функция $f \in T^n$ инвариантна относительно перестановки $\pi \in S_n$, и $O_1, \dots, O_k$ — π-орбиты, то f инвариантна относительно всякой перестановки $\pi' \in S_n$, сохраняющей разбиение $O_1, \dots, O_k$.*

Пусть $R = \{R_1, \dots, R_k\}$ — разбиение множества Ω_n. Пороговую функцию f назовем R-симметрической, если она инвариантна относительно всякой перестановки, сохраняющей разбиение R. Из теоремы 1 следует, что каждый класс пороговых функций, инвариантых относительно некоторой группы перестановок, однозначно задается соответствующим разбиением R множества переменных. Верно и обратное: всякому разбиению R множества переменных соответствует класс R-симметрических пороговых функций, инвариантных относительно перестановок, сохраняющих разбиение R.

Переменные R-симметрической функции, принадлежащие одному классу эквивалентности R_i, будем называть *симметричными.*

Пороговую функцию называют *симметрической*, если она инвариантна относительно всякой перестановки. Назовем пороговую функцию *несимметрической*, если она инвариантна относительно лишь тождественной перестановки.

Рассмотрим следующие меры сложности линейных форм и пороговых функций

$$L\left(l_{\vec{w},\sigma}\right) = \max\left(|w_1|, \ldots, |w_n|, |\sigma|\right),$$
$$L\left(f\right) = \min_{l_{\vec{w},\sigma} \to f} L\left(l_{\vec{w},\sigma}\right),$$

где минимум берется по всем целочисленным линейным формам $l_{\vec{w},\sigma}$, задающим функцию f. Величину $L\left(f\right)$ назовем размахом функции f.

Рассмотрим множество $T_{m,k}$ пороговых функций от n переменных, где $n \leqslant m \cdot k$, таких, что для каждой функции f из $T_{m,k}$ существует разбиение $R = \{R_1, \ldots, R_k\}$ множества $\Omega_n = \{1, \ldots, n\}$ такое, что $\max\left(|R_1|, \ldots, |R_k|\right) = m$ и f является R-симметрической. Параметр m характеризует максимальный размер класса симметрии: если $m = 1$, то функция — несимметрическая, если же $m = n$, то симметрическая. Параметр k характеризует число независимых классов симметрии.

Определим величину $L\left(m,k\right)$ следующим образом

$$L\left(m,k\right) = \max_{f \in T_{m,k}} L\left(f\right),$$

где максимум берется по всем пороговым функциям f из класса $T_{m,k}$. Содержательно данная величина характеризует возможный размах пороговой функций с максимальным размером класса симметрии — m и числом независимых классов симметрии — k.

Имеет место следующий результат, характеризующий величину $L\left(m,k\right)$.

Теорема 2. *Если $k \to \infty$, то*

$$2^{\frac{1}{2}k\log k + o(k)} \leqslant L\left(m,k\right) \leqslant m^{k+1} \cdot 2^{\frac{1}{2}k\log k + o(k)}.$$

Введем понятие расстояния между линейными формами и пороговыми функциями.

Пусть $l_{\vec{w}',\sigma'}$ и $l_{\vec{w}'',\sigma''}$ — линейные формы от n переменных. Расстоянием между линейными формами $l_{\vec{w}',\sigma'}$ и $l_{\vec{w}'',\sigma''}$ назовем следующую величину

$$\rho\left(l_{\vec{w}',\sigma'}; l_{\vec{w}'',\sigma''}\right) = \left|\sigma' - \sigma''\right| + \sum_{i=1}^{n} \left|w_i' - w_i''\right|.$$

Эту величину интерпретируем как необходимость сделать ρ последовательных единичных изменений компонент одной линейной формы, чтобы получить другую. *Расстоянием между пороговыми функциями* $f'(x_1, \ldots, x_n)$ и $f''(x_1, \ldots, x_n)$ назовем величину

$$\rho\left(f'; f''\right) = \min_{\substack{l_{\vec{w}',\sigma'} \to f' \\ l_{\vec{w}'',\sigma''} \to f''}} \rho\left(l'; l''\right).$$

Определим величину $\rho\,(m,k)$ следующим образом

$$\rho\,(m,k) = \max_{f',f'' \in T_{m,k}} \rho\left(f', f''\right),$$

где максимум берется по всем парам пороговых функций f', f'' из класса $T_{m,k}$. Данная величина характеризует расстояние между наиболее удаленными пороговыми функциями, не более чем с m взаимно симметричными переменными, и числом классов симметрии — k.

Имеет место следующая теорема, характеризующая сложность взаимной перестройки внутри классов пороговых функций, инвариантных относительно групп перестановок.

Теорема 3. *Если* $k \to \infty$, *то*

$$m \cdot 2^{\frac{1}{2} k \log k + o(k)} \leqslant \rho\,(m,k) \leqslant m^{k+2} \cdot 2^{\frac{1}{2} k \log k + o(k)}.$$

Рассмотрим две последовательности множеств: $A_1, A_2, \ldots$ и $A_1', A_2', \ldots$, где $A_i \supseteq A_i'$ для всех i. Говорят, что «почти все» элементы A_i совпадают с элементами A_i', если

$$\lim_{i \to \infty} \frac{|A_i|}{|A_i'|} = 1.$$

Имеет место следующая теорема, характеризующая долю несимметрических пороговых функций.

Теорема 4. *Почти все пороговые функции несимметрические.*

2. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим случай, когда

$$\begin{aligned} O_1 &= \{1, \ldots, k\}\,, \\ O_2 &= \{k+1\}\,, \\ &\ldots \\ O_1 &= \{n\}\,. \end{aligned}$$

Иными словами, перестановка π содержит единственный цикл, состоящий из элементов множества $\{1, \ldots, k\}$. Покажем, что в таком случае для всякой перестановки $\pi' \in S_k$ выполнено

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f\left(x_{\pi'(1)}, \ldots, x_{\pi'(k)}, x_{k+1}, \ldots, x_n\right).$$

Так как всякая перестановка $\pi \in S_n$ однозначно раскладывается в произведение независимых циклов, то отсюда будет следовать утверждение теоремы.

Положим

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= a_{k+1}, \\ &\ldots \\ x_n &= a_n, \end{aligned}$$

и рассмотрим пороговую функцию

$$g(x_1, \ldots, x_k) = f(x_1, \ldots, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)\,.$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что g является симметрической функцией. То есть для всякой перестановки $\pi' \in S_k$ выполнено

$$g(x_1, \ldots, x_k) = g\left(x_{\pi'(1)}, \ldots, x_{\pi'(k)}\right).$$

Предположим противное: пусть найдется перестановка $\pi' \in S_k$, такая что
$$g(x_1, \ldots, x_k) \neq g\left(x_{\pi'(1)}, \ldots, x_{\pi'(k)}\right).$$
То есть для некоторого набора $\alpha = (a_1, \ldots, a_k)$
$$g(a_1, \ldots, a_n) \neq g\left(a_{\pi'(1)}, \ldots, a_{\pi'(k)}\right).$$
Без ограничения общности положим, что $g(\alpha) = 1$.

По условию теоремы имеем
$$g(x_1, \ldots, x_k) = g\left(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(k)}\right).$$

Рассмотрим множество наборов $P = \left\{\alpha, \pi(\alpha), \ldots, \pi^{s-1}(\alpha)\right\}$, где s — порядок перестановки π. Множество P представляет собой все наборы, получающихся из α применением перестановки π во всех возможных степенях. Так как g инвариантна относительно перестановки π, то для всякого набора $\gamma \in P$ верно $g(\gamma) = 1$.

Следовательно, для линейной формы $(w_1, \ldots, w_n, \sigma)$, задающей функцию f, имеет место следующая система неравенств
$$\begin{cases} \bar{w} \cdot \alpha - \sigma \geqslant 0, \\ \bar{w} \cdot \pi(\alpha) - \sigma \geqslant 0, \\ \ldots \\ \bar{w} \cdot \pi^{s-1}(\alpha) - \sigma \geqslant 0. \end{cases}$$
Сложив все неравенства вместе, получим
$$\bar{w} \cdot \sum_{i=0}^{s-1} \pi^i(\alpha) - s \cdot \sigma \geqslant 0.$$

Легко видеть, что
$$\sum_{i=0}^{s-1} \pi^i(\alpha) = (l(\alpha), \ldots, l(\alpha)),$$
где $l(\alpha)$ — число единиц в наборе α.

Следовательно,

$$\bar{w} \cdot (l(\alpha), \ldots, l(\alpha)) - s \cdot \sigma \geqslant 0.$$

Далее, рассмотрим набор $\beta = \left(a_{\pi'(1)}, \ldots, a_{\pi'(k)}\right)$. По предположению $g(\beta) = 0$.

Рассмотрим множество наборов $P' = \left\{\beta, \pi(\beta), \ldots, \pi^{s-1}(\beta)\right\}$. Так как функция g инвариантна относительно перестановки π, то для всякого набора $\gamma \in P'$ верно

$$g(\gamma) = 0.$$

Следовательно, имеет место система неравенств

$$\begin{cases} \bar{w} \cdot \beta - \sigma < 0, \\ \bar{w} \cdot \pi(\beta) - \sigma < 0, \\ \ldots \\ \bar{w} \cdot \pi^{s-1}(\beta) - \sigma < 0. \end{cases}$$

Аналогичным образом приходим к выводу, что

$$\bar{w} \cdot (l(\beta), \ldots, l(\beta)) - s \cdot \sigma < 0.$$

Осталось заметить, что $l(\beta) = l(\alpha)$, так как β получается из α при помощи перестановки π'. Пришли к противоречию. Следовательно функция g — симметрическая.

Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Рассмотрим разбиение $R = \{R_1, \ldots, R_k\}$ множества $\Omega_n = \{1, \ldots, n\}$. Множество всех R-симметрических пороговых функций от n переменных обозначим T_R^n. Имеет место следующая лемма, характеризующая особенности задания R-симметрических пороговых функций линейными формами.

Лемма 1 (Об осреднении коэффициентов). *Если $R = \{R_1, \ldots, R_k\}$ — разбиение множества $\Omega_n = \{1, \ldots, n\}$, пороговая функция f*

является R-симметрической и линейная форма $l_{\bar{w},\sigma} = (w_1, \ldots, w_n, \sigma)$ задает f, то линейная форма $l_{\bar{w}',\sigma} = \left(w'_{h(1)}, \ldots, w'_{h(n)}, \sigma\right)$, где $h(a) = i$, если $a \in R_i$, и

$$w'_i = \frac{1}{|R_i|} \sum_{r \in R_i} w_r.$$

также задает функцию f.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $R = \{\{1, \ldots, l\}, \{l+1\}, \{l+2\}, \ldots, \{n\}\}$. Положим

$$\begin{aligned} x_{l+1} &= a_{l+1}, \\ &\ldots \\ x_n &= a_n. \end{aligned}$$

В таком случае

$$l_{\bar{w},\sigma}(x_1, \ldots, x_l, a_{l+1}, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{l} x_i \cdot w_i + \sum_{j=l+1}^{n} a_j \cdot w_j - \sigma.$$

Рассмотрим линейную форму $l_{\bar{w}'',\sigma}(x_1, \ldots, x_l) = (w_1, \ldots, w_l, \theta)$, где

$$\theta = -\sum_{j=l+1}^{n} a_j \cdot w_j + \sigma,$$

и задаваемую ей пороговую функцию f''. Очевидно, что

$$f''(x_1, \ldots, x_l) = f(x_1, \ldots, x_l, a_{l+1}, \ldots, a_n).$$

Так как пороговая функция f является R-симметрической, то по теореме 1 функция f'' является симметрической. Покажем, что линейная форма $l_{\bar{w}',\sigma}(x_1, \ldots, x_l) = (w', \ldots, w', \theta)$, где $w' = \frac{1}{l} \sum\limits_{j=1}^{l} w_j$, также задает пороговую функцию f''.

Если $f''(b_1, \ldots, b_l) = 1$ на некотором наборе $(b_1, \ldots, b_l)$, то

$$\sum_{j=1}^{l} b_j \cdot w_j - \theta \geqslant 0.$$

Покажем, что
$$\sum_{j=1}^{l} b_j \cdot w' - \theta \geqslant 0.$$

Рассмотрим набор $(b'_1, \ldots, b'_l)$, такой что количество единиц в нем совпадает с количеством единиц в наборе $(b_1, \ldots, b_l)$ и, при этом, сумма
$$\sum_{j=1}^{l} b'_j \cdot w_i$$
принимает минимальное значение среди всех двоичных наборов с таким же числом единиц. Так как функция f'' — симметрическая, то $f''(b'_1, \ldots, b'_l) = 1$.

Очевидно, что
$$\sum_{j=1}^{l} b'_j \cdot w' \geqslant \sum_{j=1}^{l} b'_j \cdot w_i.$$

Следовательно, $\sum\limits_{j=1}^{l} b'_j \cdot w' - \theta \geqslant 0$.

Случай, когда $f''(b_1, \ldots, b_l) = 0$, рассматривается аналогичным образом, за тем лишь исключением, что набор $(b'_1, \ldots, b'_l)$ выбирается так, чтобы сумма
$$\sum_{j=1}^{l} b'_j \cdot w_i$$
принимала максимальное значение.

Таким образом, линейная форма
$$l_{\bar{w}',\sigma}(x_1, \ldots, x_n) = \left(\underbrace{w', \ldots, w'}_{l}, w_{l+1}, \ldots, w_n, \sigma\right)$$
задает исходную функцию f.

Для доказательства леммы осталось заметить, что описанная процедура осреднения коэффициентов линейной формы может быть проведена независимо для каждого класса эквивалентности R_i. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.

Докажем верхнюю оценку.

Заметим, что всякая пороговая функция f от n переменных однозначно определяется своими значениями на наборах из E_2^n. Всего таких наборов имеется 2^n. Рассмотрим следующую систему из 2^n неравенств

$$\begin{cases} \underset{\alpha_i \in N_f}{\&} (\alpha_i \cdot \vec{w} - \sigma \geqslant 0)\,, \\ \underset{\alpha_i \in E_2^n \setminus N_f}{\&} (\alpha_i \cdot \vec{w} - \sigma < 0)\,. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\alpha_i = (a_1, \ldots, a_n) \in E_2^n$; $i = 1, \ldots, 2^n$; $N_f = \{\alpha \in E_2^n \,:\, f(\alpha) = 1\}$ — множество наборов, на которых функция f принимает значение 1.

Очевидно, что всякая линейная форма $(w_1, \ldots, w_n, \sigma)$, удовлетворяющая данной системе, будет задавать f.

Рассмотрим вектора $\alpha_i', \alpha_i'' \in E_2^{n+1}$, такие что

$$\begin{aligned} \alpha_i' &= (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}, 1) \text{ для всех } \alpha_i \in E_2^n, \\ \alpha_i'' &= \alpha_i', \text{ если } \alpha_i \in N_f \text{ и} \\ \alpha_i'' &= -\alpha_i', \text{ иначе.} \end{aligned}$$

Рассмотрим следующую систему из 2^n неравенств

$$\underset{\alpha_i \in E_2^n}{\&} \left(\alpha_i'' \cdot \vec{w}' \geqslant 1\right), \tag{2}$$

где $\vec{w}' = \left(w_1', \ldots, w_{n+1}'\right)$.

Легко видеть, что всякая линейная форма $\vec{w}'$, являющеаяся решением системы (2), также является решением системы (1). Для этого достаточно положить $\vec{w} = (w_1', \ldots, w_n')$, а $\sigma = -w_{n+1}'$.

По условию теоремы f является R-симметрической пороговой функцией, где $R = \{R_1, \ldots, R_k\}$ — некоторое разбиение множества $\Omega_n = \{1, \ldots, n\}$. При этом,

$$\max\left(|R_1|, \ldots, |R_k|\right) = m.$$

Без ограничения общности положим, что

$$\begin{aligned} R_1 &= \{1, \ldots, r_1\}\,, \\ &\ldots \\ R_k &= \{n - r_k + 1, \ldots, n\}\,, \end{aligned}$$

где $r_i = |R_i|$, $i = 1, \ldots, k$.

В таком случае, по лемме 1 найдется линейная форма

$$\Bigg(\underbrace{w_1'', \ldots, w_1''}_{r_1}, \ldots, \underbrace{w_k'', \ldots, w_k''}_{r_k}, \sigma\Bigg),$$

где

$$w_i'' = \frac{1}{|R_i|} \sum_{j \in R_i} w_j,$$

также задающая f.

Следовательно, всякое решение системы из 2^n неравенств

$$\mathop{\&}_{\alpha_i \in E_2^n} \left(\alpha_i'' \cdot \bar{w}'' \geqslant 1\right), \tag{3}$$

где $\bar{w}'' = \left(w_1'', \ldots, w_k'', w_{k+1}''\right)$, также задает решение системы (1). Для этого достаточно положить $\vec{w} = (w_1'', \ldots, w_k'')$, а $\sigma = -w_{k+1}''$. Отметим также, что по лемме 1, система (3) имеет хотя бы одно решение.

Заметим, что вектор $\bar{w}''$ содержит не более $k+1$ различных компонент. Следовательно, множество всех решений системы (3) представляет собой выпуклый многогранник M в пространстве $\mathbb{R}^{k+1}$. В экстремальных точках M некоторые $k+1$ неравенств обращаются в строгие равенства. Пусть $\left(w_1'', \ldots, w_{k+1}''\right)$ — некоторая экстремальная точка многогранника M. В таком случае набор $\bar{w}''$ удовлетворяет следующей системе уравнений

$$A \cdot \left(w_1'', \ldots, w_{k+1}''\right)^T = (1, \ldots, 1)^T,$$

где $A = \|a_{ij}\|_{(k+1)\times(k+1)}$ — матрица, коэффициенты a_{ij} которой по модулю не превосходят m — мощность максимального класса эквивалентности R_i.

По правилу Крамера данная система имеет следующее решение

$$w_i'' = \frac{\Delta_i}{\Delta};\ i = 1, \ldots, k+1,$$

где Δ — определитель матрицы A, а Δ_i — определитель матрицы A_i, получаемой из A заменой i-го столбца на единичный вектор. Видно, что при делении на Δ компоненты w_i'' могут получиться нецелыми, однако, легко видеть, что при домножении всех компонент линейной формы $\left(w_1'', \ldots, w_{k+1}''\right)$ на Δ задаваемая ей пороговая функция не изменится, а значения компонент w_i'' станут целыми. Поэтому можно полагать, что

$$w_i'' = \Delta_i,\ i = 1, \ldots, k+1.$$

Как уже отмечалось ранее, элементы матрицы A по модулю не превосходят m, поэтому по теореме Адамара [1] имеем

$$\Delta_i^2 \leqslant \prod_{i=1}^{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} a_{ij}^2.$$

Следовательно,

$$\Delta_i^2 \leqslant \left((k+1) \cdot m^2\right)^{k+1} = (k+1)^{k+1} \cdot m^{2(k+1)}.$$

В итоге, получим

$$w_i'' \leqslant m^{k+1} \cdot 2^{\frac{1}{2} k \log k + o(k)}.$$

Верхняя оценка доказана, докажем нижнюю оценку.

В работе [3] было показано, что при $k \to \infty$ найдется такая пороговая функция $g \in T^k$, что

$$L\left(g\right) \geqslant 2^{\frac{1}{2} k \log k + o(k)}.$$

Рассмотрим R-симметрическую пороговую функцию $f \in T^n$, такую, что $n = k \cdot m$,

$$\begin{array}{rcl} R_1 & = & \left\{1, \ldots, m\right\}, \\ & & \ldots \\ R_k & = & \left\{(k-1) \cdot m + 1, \ldots, k \cdot m\right\} \end{array}$$

и

$$f\left(\underbrace{x_1, 0, \ldots, 0}_{|R_1|}, \ldots, \underbrace{x_k, 0, \ldots, 0}_{|R_k|}\right) = g\left(x_1, \ldots, x_k\right).$$

Очевидно, что $L\left(f\right) \geqslant L\left(g\right)$. Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 3

Для доказательства верхней оценки достаточно заметить, что $n \leqslant k \cdot m$ и
$$\rho(m,k) \leqslant 2 \cdot (n+1) \cdot L(m,k).$$
Следовательно,
$$\rho(m,k) \leqslant 2 \cdot (m \cdot k + 1) \cdot m^{k+1} \cdot 2^{\frac{1}{2}k\log k + o(k)}.$$
Раскрыв скобки, получим
$$\rho(m,k) \leqslant m^{k+2} \cdot 2^{\frac{1}{2}k\log k + o(k)}.$$

Докажем нижнюю оценку.

В работе [3] было показано, что при $k \to \infty$ найдется такая пара пороговых функций $g', g'' \in T^k$, что
$$\rho\left(g', g''\right) \geqslant 2^{\frac{1}{2}k\log k + o(k)}.$$

Рассмотрим R-симметрические пороговые функции $g', g'' \in T^n$, где $n = k \cdot m$,
$$\begin{aligned} R_1 &= \{1, \ldots, m\}, \\ &\ldots \\ R_k &= \{(k-1)\cdot m + 1, \ldots, k \cdot m\} \end{aligned}$$
такие, что
$$f'\left(\underbrace{x_1, 0, \ldots, 0}_{|R_1|}, \ldots, \underbrace{x_k, 0, \ldots, 0}_{|R_k|}\right) = g'(x_1, \ldots, x_k),$$
$$f''\left(\underbrace{x_1, 0, \ldots, 0}_{|R_1|}, \ldots, \underbrace{x_k, 0, \ldots, 0}_{|R_k|}\right) = g''(x_1, \ldots, x_k).$$

Очевидно, что $\rho(f', f'') \geqslant m \cdot \rho(g', g'')$. Следовательно,
$$\rho(m,k) \geqslant m \cdot 2^{\frac{1}{2}k\log k + o(k)}.$$

Теорема доказана.

5. Доказательство теоремы 4

Обозначим NST^n — множество несимметрических пороговых функций от n переменных, то есть функций, которые инвариантны относительно лишь тождественной перестановки.

Пороговую функцию, которая не является несимметрической, назовем *частично симметрической*. Обозначим $PST^n = T^n \backslash NST^n$ — множество частично симметрических пороговых функций от n переменных.

Заметим, что всякая частично симметрическая пороговая функция f по лемме 1 может быть задана линейной формой $(w_1, \ldots, w_n, \sigma)$ не более, чем с $n-1$ различными весовыми коэффициентами. Таким образом, найдутся по крайней мере два равных весовых коэффициента. Без ограничения общности положим, что переменные x_1 и x_2 симметричны, то есть $w_1 = w_2$.

Разложим функцию f по первым двум переменным

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \cdot f_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}(x_3, \ldots, x_n) \vee x_1 \bar{x}_2 \cdot f_{x_1 \bar{x}_2}(x_3, \ldots, x_n) \vee \\ \vee \bar{x}_1 x_2 \cdot f_{\bar{x}_1 x_2}(x_3, \ldots, x_n) \vee x_1 x_2 \cdot f_{x_1 x_2}(x_3, \ldots, x_n),$$

где

$$\begin{aligned} f_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}(x_3, \ldots, x_n) &= f(0, 0, x_3, \ldots, x_n), \\ f_{x_1 \bar{x}_2}(x_3, \ldots, x_n) &= f(1, 0, x_3, \ldots, x_n), \\ f_{\bar{x}_1 x_2}(x_3, \ldots, x_n) &= f(0, 1, x_3, \ldots, x_n), \\ f_{x_1 x_2}(x_3, \ldots, x_n) &= f(1, 1, x_3, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Заметим, что функции $f_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}$, $f_{x_1 \bar{x}_2}$, $f_{\bar{x}_1 x_2}$ и $f_{x_1 x_2}$ также являются пороговыми, так как они задаются линейными формами

$$\begin{gathered} (w_3, \ldots, w_n, \sigma), \\ (w_3, \ldots, w_n, \sigma - w_1), \\ (w_3, \ldots, w_n, \sigma - w_2), \\ (w_3, \ldots, w_n, \sigma - w_1 - w_2), \end{gathered}$$

соответственно.

Так как переменные x_1 и x_2 симметричны, то $f_{x_1\bar{x}_2} = f_{\bar{x}_1 x_2}$.

На рис. 1 изображен булев куб E_2^n, на котором задана функция f. Жирные пунктирные линии обозначают гиперплоскости $l_{\bar{x}_1\bar{x}_2}$, $l_{x_1\bar{x}_2}$, $l_{\bar{x}_1 x_2}$ и $l_{x_1 x_2}$, задающие пороговые функции $f_{\bar{x}_1\bar{x}_2}$, $f_{x_1\bar{x}_2}$, $f_{\bar{x}_1 x_2}$ и $f_{x_1 x_2}$, соответственно.

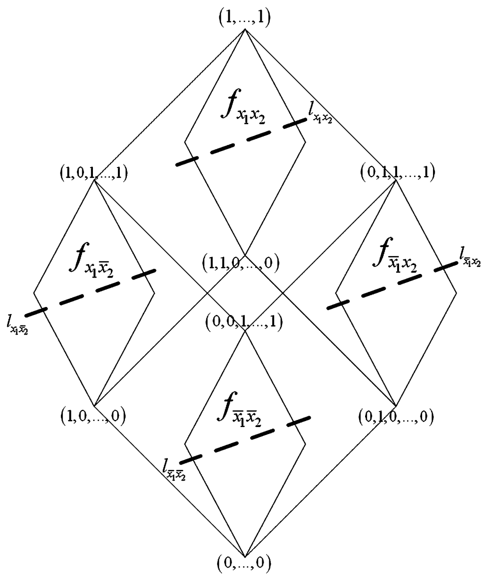

Рис. 1. Разложение пороговой функции f по переменным x_1 и x_2.

Рассмотрим множество $S(f)$ пороговых функций, которые задаются всевозможными линейными формами вида $(w_1', w_2', w_3, ..., w_n, \sigma)$, где $w_1' + w_2' = w_1 + w_2$. Легко видеть, что для всякой функции g из множества $S(f)$ выполнено

$$\begin{aligned} g(0,0,x_3,\dots,x_n) &= f(0,0,x_3,\dots,x_n); \\ g(1,1,x_3,\dots,x_n) &= f(1,1,x_3,\dots,x_n). \end{aligned}$$

Вариация весовых коэффициентов w_1' и w_2' приводит к параллельному сдвигу гиперплоскостей $l_{x_1\bar{x}_2}$ и $l_{\bar{x}_1 x_2}$, но не меняет положение плоскостей $l_{x_1 x_2}$ и $l_{\bar{x}_1\bar{x}_2}$.

Заметим, что малыми вариациями весовых коэффициентов w_1' и w_2' можно получить по крайней мере 2^{n-2} различные пороговые функции, последовательно отделяя точки одного из подкубов $\{(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,1,1,\ldots,1)\}$ или $\{(1,0,0,\ldots,0),\ldots,(1,0,1,\ldots,1)\}$.

Таким образом, каждой частично симметрической пороговой функции однозначно соответствует по крайней мере 2^{n-2} несимметрические пороговые функции. Следовательно,

$$|T^n| \geqslant 2^{n-2} \cdot |PST^n|\,.$$

В итоге получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|PST^n|}{|T^n|} = 0.$$

Теорема доказана.

Благодарности

Автор благодарит профессора Валерия Борисовича Кудрявцева за постановку задачи, а также участников семинара «Кибернетика и информатика» за ценные обсуждения, возникавшие по ходу работы.

Список литературы

[1] Виноградов И. М. Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1985.

[2] Соколов А. П. О конструктивной характеризации пороговых функций // Интеллектуальные системы. 2008. Т. 12, вып. 1–4. С. 363–388.

[3] Соколов А. П. Асимптотика логарифма сложности перестройки нейронов // Интеллектуальные системы. 2009. Т. 13, вып. 1–4. С. 119–128.

[4] Соколов А. П. О сложности взаимной обучаемости почти всех нейронов // Интеллектуальные системы. 2010. Т. 14, вып. 1–4. С. 503–514.