

Об одновременной минимизации объемной и временной сложности контактных и вентильных схем

Ю. С. Шуткин

Рассматривается задача одновременной минимизации объемной и временной сложности контактных и вентильных схем. Под объемной сложностью контактной или вентильной схемы понимается ее стандартная сложность, определяемая числом ребер в схеме. Под временной сложностью понимается среднее время работы алгоритма, моделирующего контактную или вентильную схему. Модель схемы строится в виде информационного графа, для которого алгоритм функционирования определяется уже формально. Получено асимптотически наилучшее решение задачи одновременной минимизации временной и объемной сложности контактных и вентильных схем.

Ключевые слова: контактные схемы, информационные графы, временная сложность контактных схем.

1. Введение

Проблема синтеза контактных и вентильных схем с оптимальной объемной сложностью хорошо изучена, и Лупановым [1] было получено асимптотически наилучшее решение этой задачи в полном базисе, то есть для контактных и вентильных схем с замыкающими и размыкающими контактами.

Сравнительно недавно появился новый взгляд на проблему реализации булевых функций с помощью контактных и вентильных схем, который на первое место ставит вопрос о сложности моделирования схемы на компьютере. Для этого задача была формализована в терминах теории информационных графов [2], и было введено понятие временной сложности контактной и вентильной схемы [3], которая характеризует время работы алгоритма, вычисляющего булеву

функцию, реализуемую схемой. Моделью контактной или вентильной схемы служит информационный граф, который уже формально задает алгоритм вычисления булевой функции, а сложность информационного графа определяет временную сложность контактной и вентильной схемы.

В работе [4] были получены оценки сложности реализации булевых функций с помощью информационных графов. Для класса информационных графов с базовым множеством из переменных и их отрицаний была получена точная оценка функции Шеннона и асимптотика временной сложности для почти всех булевых функций.

В данной работе исследуется задача одновременной минимизации объемной и временной сложности контактных и вентильных схем. Приведен метод синтеза, асимптотически оптимальный одновременно для обоих функционалов сложности.

2. Постановка задачи и формулировка результатов

Напомним базовые понятия, используемые в данной работе.

Булевыми функциями (б. ф.) будем называть функции вида $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

Контактной (вентильной) схемой называется неориентированная (ориентированная) сеть (то есть связный неориентированный (ориентированный) граф с выделенными вершинами — полюсами), каждому ребру которой приписана некоторая булева переменная с отрицанием или без него [1]. Ребро вместе с приписанной ему переменной x^σ называется *контактом (вентилем)* переменной x , а точнее, *замыкающим контактом (вентилем)*, если $\sigma = 1$, и *размыкающим контактом (вентилем)*, если $\sigma = 0$. Контакт (вентиль) x^σ считается *замкнутым*, когда $x^\sigma = 1$, и *разомкнутым*, когда $x^\sigma = 0$. Если контакт (вентиль) x_i^σ замкнут на наборе $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$, то есть $a_i^\sigma = 1$, то говорим, что он *проводит* набор α .

Путем в вентильной схеме называем ориентированную цепь. Путем в контактной схеме называем цепь.

По определению, путь контактной (вентильной) схемы *проводит* набор α тогда и только тогда, когда все его контакты (вентили) проводят этот набор.

Говорим, что одна вершина достижима из другой на наборе α , если существует путь из первой вершины во вторую, который проводит набор α .

Каждой паре полюсов схемы ставится в соответствие булева функция (проводимость между этими полюсами), определенная на наборах значений всех переменных, приписанных контактам (вентильям) схемы, и равная 1 в точности на тех наборах, которые проводят хотя бы одним путем между этими полюсами. Говорят также, что схема реализует сопоставленные ей функции. Двуполюсная схема реализует единственную функцию, называемую иначе *проводимостью* схемы.

Объемной сложностью контактной (вентильной) схемы S называется число контактов (вентилей) в этой схеме. Обозначим ее через $Q(S)$.

Для произвольной вентильной схемы S через $K(S)$ будем обозначать контактную схему, получающуюся из вентильной схемы S заменой вентилей на контакты, то есть ориентированных ребер на неориентированные.

Заметим, что если вентильная схема S реализует некоторую функцию f , то контактная схема $K(S)$ реализует функцию g , которая, возможно, отличается от f .

Пусть контактная (вентильная) схема S реализует булеву функцию f . Моделью схемы S будем называть алгоритм, вычисляющий значение функции f на произвольном входном наборе α .

Далее все определения вводятся только для вентильных схем. Для контактных схем при необходимости могут быть введены аналогичные определения.

Объемной сложностью б. ф. f (или сложностью реализации б. ф. f вентильными схемами) назовем величину

$$Q(f) = \min_{S \in H(f)} Q(S),$$

где $H(f)$ — множество всех вентильных схем, реализующих функцию f .

Через $P_2^{(n)}$ будем обозначать класс всех n -местных булевых функций.

Функцией Шеннона сложности реализации булевых функций вентиляльными схемами назовем величину

$$Q(n) = \max_{f \in P_2^{(n)}} Q(f).$$

Информационным графом для вентиляльной схемы S (обозначаем $G(S)$) будем называть модель схемы S , определенную на структуре схемы следующим образом.

Входной полюс вентиляльной схемы будем называть корнем информационного графа. Выходной полюс будем называть концевой вершиной информационного графа.

Вершины и ребра вентиляльной схемы S будем называть соответственно вершинами и ребрами информационного графа $G(S)$.

Определим функционирование информационного графа $G(S)$ для некоторой схемы S .

Пусть дан некоторый набор α .

Сначала корень информационного графа добавляется в множество активных вершин A .

Далее, для каждой вершины v из множества A , для каждого ребра e , выходящего из вершины v , вычисляется значение переменной, приписанной ребру e , на наборе α . Если значение переменной равно 1 на этом наборе, и вершина, в которую ведет ребро e , не помечена как посещенная, то эта вершина добавляется в множество A . Когда для всех исходящих из v ребер данная процедура выполнена, вершина v помечается как посещенная.

Если после завершения работы данного алгоритма концевая вершина оказалась посещенной, то считаем, что информационный граф выдает на выход значение 1. Иначе считаем, что он выдает значение 0.

Очевидно, что информационный граф $G(S)$ выдает значение 1 в точности на тех наборах, на которых функция f , реализуемая вентиляльной схемой S , равна 1. Говорим, что информационный граф $G(S)$ реализует функцию f .

Количество переменных, вычисленных на наборе α в информационном графе G обозначим через $T(G, \alpha)$.

Легко проверить, что

$$T(G, \alpha) = \sum_{v \in \theta_{v_0}(\alpha)} \psi(v),$$

где $\psi(v)$ — количество ребер, выходящих из v (полустепень исхода вершины v), а $\theta_{v_0}(\alpha)$ — множество вершин, достижимых из корня на наборе α .

Величина $T(G, \alpha)$ называется сложностью информационного графа G на наборе α . Здесь и далее, если не сказано обратное, под сложностью информационного графа понимаем временную сложность, а под сложностью контактной или вентильной схемы понимаем объемную сложность.

Пусть на множестве наборов введено вероятностное пространство $(\{0, 1\}^n, \sigma, P)$, где σ — множество всех подмножеств булева куба $\{0, 1\}^n$, а P — вероятностная мера на этом множестве. Сложностью информационного графа назовем величину

$$T(G) = \sum_{\alpha \in \{0, 1\}^n} T(G, \alpha)P(\alpha),$$

где $P(\alpha)$ — вероятность набора α в данном вероятностном пространстве.

Вероятностью ребра назовем вероятность прохождения набора в вершину, из которой это ребро выходит. Это есть вероятность, с которой данное ребро вычисляется. Эту величину также будем называть сложностью ребра.

Далее будем по умолчанию считать, что распределение наборов равномерное, то есть вероятности появления всех наборов равны.

Временной сложностью вентильной схемы будем называть сложность информационного графа, моделирующего эту схему,

$$T(S) = T(G(S)).$$

Такое определение корректно, так как информационный граф однозначно задается вентильной схемой.

Пусть дана контактная схема K . Пусть $\mathcal{O}(K)$ — множество всех вентильных схем, получающихся из K путем ориентации ребер.

Пусть $\mathcal{P}(K)$ — множество вентильных схем $S \in \mathcal{O}(K)$, которые реализуют ту же самую булеву функцию, что и K .

Временной сложностью контактной схемы K будем называть величину

$$T(K) = \min_{S \in \mathcal{P}(K)} T(S),$$

причем считаем, что $T(K) = \infty$, если $\mathcal{P}(K) = \emptyset$.

Временной сложностью б. ф. f (или сложностью реализации б. ф. f информационными графами) называется следующая величина.

$$T(f) = \inf_{G \in \mathcal{G}(f)} T(G),$$

где $\mathcal{G}(f)$ — множество информационных графов, реализующих функцию f .

В [3] было показано, что нижняя грань в определении сложности достигается, то есть в $\mathcal{G}(f)$ существует информационный граф, сложность которого в точности равна временной сложности функции f . Такие графы будем называть *оптимальными* для функции f , и говорить, что они реализуют функцию f оптимально.

Функцией Шеннона сложности реализации булевых функций информационными графами назовем величину

$$T(n) = \max_{f \in P_2^{(n)}} T(f).$$

Под объемной сложностью информационного графа будем понимать объемную сложность моделируемой им схемы.

В работах [1, 4] были получены следующие оценки.

Теорема 1. *При $n \rightarrow \infty$ выполнено*

$$Q(n) \sim \frac{2^n}{n}$$

и для любого натурального n имеет место

$$T(n) = 2n - 1.$$

Теорема 2. *Для почти всех б. ф. $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ при $n \rightarrow \infty$ выполнено*

$$Q(f) \sim \frac{2^n}{n}, \quad T(f) \sim 2n.$$

В данной работе построен метод синтеза контактных и вентилярных схем, являющийся асимптотически оптимальным одновременно по объему и по времени.

Теорема 3. *Существует метод синтеза, который каждой б. ф. $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2^{(n)}$ ставит в соответствие вентиляльную и контактную схемы $S(f)$ и $K(S(f))$, реализующие эту функцию, причем при $n \rightarrow \infty$ выполнено*

$$Q(S(f)) \lesssim \frac{2^n}{n}, \quad T(S(f)) \lesssim 2n.$$

3. Одновременная минимизация сложности

В данном разделе мы докажем теорему 3, построив метод синтеза контактных и вентиляльных схем, объемная и временная сложность которых асимптотически оптимальна.

Все построения будут проведены для контактных схем, которые допускают очевидную ориентацию ребер от входных полюсов к выходным, при которой вентиляльные схемы реализуют те же самые функции. Это позволит получить метод синтеза одновременно для обоих типов схем.

Метод синтеза Лупанова контактных схем [1] дает нужную объемную оценку, однако имеет слишком большую (экспоненциальную) временную сложность из-за сильного ветвления схемы около обоих ее полюсов.

Мы избавимся от этого путем разделения множества всех наборов на части, а также объединения общих частей схемы Лупанова в одну подсхему, которая будет иметь приемлемую временную сложность.

Дальнейшие определения взяты из [1].

(i, o) -полюсником будем называть контактную схему с i входными и o выходными полюсами.

Вспомним, в чем заключается метод Лупанова.

Одна из основных идей в нем состоит в построении оптимального $(1, 2^{n-k})$ -полюсника, реализующего все конъюнкции $n - k$ переменных, путем разбиения множества всех булевых наборов на так называемые сферы и построении контактных деревьев отдельно для каждой сферы.

Единичной сферой в булевом кубе B^r с центром в $(\beta_1, \dots, \beta_r)$ назовем множество всех наборов, удаленных от центра на 1, то есть множество $\{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r), (\beta_1, \bar{\beta}_2, \dots, \beta_r), \dots, (\beta_1, \beta_2, \dots, \bar{\beta}_r)\}$.

Контактным деревом $D(x_1, \dots, x_q)$ назовем $(1, 2^q)$ -полюсник, имеющий вид бинарного дерева, из каждой вершины которого выходят

два противоположных контакта x_i и \bar{x}_i , причем каждой переменной соответствует ровно один слой в дереве, где она встречается. Между входным и выходными полюсами контактного дерева, тем самым, реализуются всевозможные конъюнкции от переменных x_1, \dots, x_q . Объемная сложность контактного дерева равна $2 \cdot 2^q - 2$.

Универсальным многополюсником $U(x_1, \dots, x_q)$ будем называть $(2^{2^q}, 1)$ -полюсник, между входными и выходным полюсами которого реализованы всевозможные функции от переменных x_1, \dots, x_q . В [1] показано, что такую схему можно реализовать с объемной сложностью не более, чем $2 \cdot 2^{2^q}$.

Фиксируем множество переменных x_1, \dots, x_r , где число $r = 2^p$ будет выбрано позже. Множество наборов 2^r , соответствующее этим переменным разобьем на единичные сферы (такое разбиение существует согласно лемме 3 из [1], глава II, §9).

Теперь, если схема $S_\Phi(x_1, \dots, x_r)$ реализует характеристическую функцию сферы Φ с центром в $(\beta_1, \dots, \beta_r)$, к ее выходному полюсу прикреплено контактное дерево, реализующее все конъюнкции от переменных x_{r+1}, \dots, x_{n-k} , и наконец ко всем выходным полюсам дерева прикреплены пучки контактов $x_1^{\bar{\beta}_1}, \dots, x_r^{\bar{\beta}_r}$, то такая схема $(\Phi, n - k - r)$ реализует все конъюнкции, соответствующие наборам (a_1, \dots, a_{n-k}) , лежащим в сфере Φ (считаем, что набор (a_1, \dots, a_{n-k}) лежит в сфере Φ , если его проекция на первые r переменных (a_1, \dots, a_r) лежит в сфере Φ). Описанная схема изображена на рисунке 1.

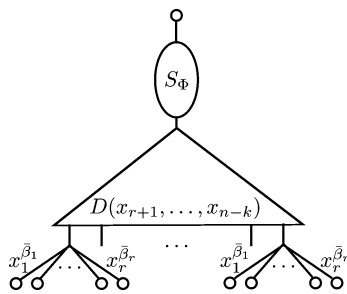


Рис. 1. Схема $(\Phi, n - k - r)$.

Объемная сложность данной схемы при реализации характеристической функции сферы согласно ее д.н.ф., то есть пучком параллельных цепочек, не больше $r^2 + 2^{n-k-r}(r + 2)$.

Очевидно, что параллельное соединение всех таких схем для различных сфер дает многополюсник $Q(n - k)$, который реализует все конъюнкции от переменных x_1, \dots, x_{n-k} .

Количество сфер равно $\frac{2^r}{r}$, следовательно, объемная сложность полученного многополюсника равна $\frac{2^r}{r}(r^2 + 2^{n-k-r}(r + 2))$. Однако временная сложность будет не меньше $\frac{2^r}{r}$, что дает экспоненциальный рост при $r \gtrsim n^\alpha$.

Уйдем от параллельного соединения схем, реализующих характеристические функции сфер, заменив их одним многополюсником, между входным и выходными полюсами которого будут реализованы эти характеристические функции.

Для этого построим контактное дерево $D(x_1, \dots, x_r)$ и склеим выходные полюса, соответствующие одной сфере, вместе. Получим схему, изображенную на рисунке 2.

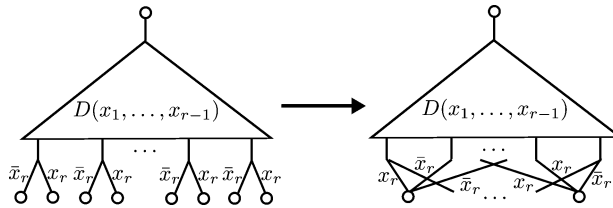


Рис. 2. Разбиение на сферы.

Очевидно, что если мы ориентируем все ребра схемы от входного полюса к выходным (то есть сверху вниз на рисунке), то проводимость между входным и любым выходным полюсом будет как раз равна характеристической функции соответствующей сферы. Однако для неориентированной схемы необходимо также проверить, что неориентированных путей, проводящих лишние наборы, не существует. Действительно, любой путь в схеме начинается с отрезка из r ребер, ведущих от входного полюса в один из выходных, то есть совпадает с ориентированным путем. Если же путь продолжается дальше, то значит в нем есть обратный ход (от выходного полюса к входному), а потом снова прямой. Значит в этот момент в пути рядом будут два ребра x_i и \bar{x}_i , что гарантирует нулевую проводимость такого пути.

Таким образом, мы показали, что данный многополюсник реализует все характеристические функции сфер.

Далее прикрепим к каждому выходному полюсу данной схемы по контактному дереву с пучками контактов, как это было проделано ранее. Полученную схему обозначим через S_1 .

Невозможность обратного хода в путях такой схемы гарантирует, что она реализует всевозможные конъюнкции от переменных x_1, \dots, x_{n-k} . Объемная сложность такой схемы равна $2^{r+1} + \frac{2^r}{r}(2^{n-k-r}(r+2))$, что даже меньше сложности, полученной предыдущим методом.

Временная же сложность данной схемы равна $2(n-k)+r$. Действительно, в любой вершине схемы (кроме последнего яруса) мы имеем 2 исходящих ребра, которым приписаны противоположные предикаты. Это означает, что любой набор пройдет ровно по одному пути до последнего яруса, и на последнем ярусе пройдет тоже только по одному из r ребер, так как каждый набор проходит ровно в один выходной полюс. Итого, в каждой вершине пути, кроме последней, будет вычислено по 2 предиката, а в последней вершине — r предикатов.

Вторая идея метода Лупанова заключается в следующем.

Мы построили многополюсник, который реализует всевозможные конъюнкции от переменных x_1, \dots, x_{n-k} , поэтому согласно разложению исходной функции

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigcup_{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-k}} x_1^{\sigma_1} \dots x_{n-k}^{\sigma_{n-k}} f(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n),$$

достаточно реализовать все подфункции $f(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n)$, и присоединить их к соответствующим выходным полюсам первой схемы. Однако реализация их с помощью универсального многополюсника не дает нужной асимптотики, поэтому Лупановым было предложено решение разбить множество всех наборов, соответствующих переменным x_{n-k+1}, \dots, x_n , на полосы, и каждую функцию $f(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n)$ реализовать как дизъюнкцию функций $f_i(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n)$, которые отличны от 0 только в одной из этих полос.

Пусть в каждой полосе (кроме, может быть, последней) ровно s наборов. В последней полосе $s' \leq s$ наборов. Тогда число полос равно $p = \lceil \frac{2^k}{s} \rceil$.

Тогда различных функций $f_i(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n)$ для каждого i не более, чем 2^s .

Теперь, если к схеме S_1 мы присоединим многополюсник, реализующий все функции $f_i(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n)$ для фиксированного i , то получим схему, реализующую функцию $f_i(x_1, \dots, x_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n)$, такую, что $f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{i=1, \dots, p} f_i(x_1, \dots, x_n)$.

Поэтому параллельное соединение всех таких схем для различных i дает искомую схему. Объемная сложность такой схемы дает необходимую асимптотику, однако временная сложность опять таки не достаточно мала, а именно, при $k = \lceil 2 \log_2 n \rceil$ и $s = \lceil n - 2\sqrt{n} \rceil$ (параметры, при которых получается объемная асимптотика) она будет не меньше, чем $p \cdot T(S_1) \asymp n^2$.

Данный эффект возникает из-за того, что объединение схем происходит параллельно, и вычисления идут во всех схемах одновременно. Этого можно избежать путем предварительного разбиения схемы на части таким образом, чтобы каждый набор проходил только в одну схему S_1 , а не во все сразу, как это было сделано ранее.

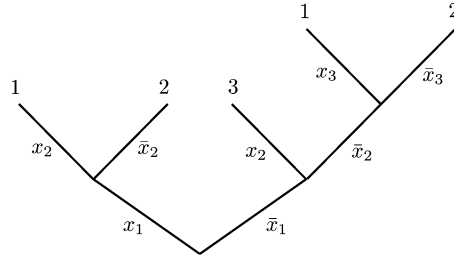
Для этого несколько изменим разбиение множества наборов для переменных x_{n-k+1}, \dots, x_n на полосы. Сейчас полосы не будут сплошными, то есть будут просто множествами наборов, однако это никак не влияет на результат. Делить мы будем по-прежнему на $p = \lfloor \frac{2^k}{s} \rfloor$ [множеств, однако количество наборов в каждом множестве будет равно либо s , либо $s - 1$].

Для этого будем строить бинарное дерево T_k^p следующим образом.

Из корня бинарного дерева выходит два ребра с пометками x_n и \bar{x}_n , далее из каждой вершины на следующем уровне выходит опять по два ребра с пометками x_{n-1} и \bar{x}_{n-1} , и т. д. Если на каком-то уровне количество вершин становится не меньше p , то первые p из них нумеруются с 1 до p и дальше не делятся. Если дерево доросло до уровня k , то есть на последнем уровне ребрам приписаны пометки x_{n-k+1} и \bar{x}_{n-k+1} , то все вершины на последнем ярусе нумеруются с 1 до t , где t — число этих вершин.

Пример описанного дерева T_k^p для $k = 3$ и $p = 3$ приведен на рисунке 3 (нумерация переменных заменена на более наглядную, так как не играет особой роли).

Далее склеим все вершины в этом дереве, помеченные одинаковым числом i , и объявим полученную вершину i -м выходным полю-

Рис. 3. Разделительное дерево T_3^3 .

сом (для всех $i = 1, \dots, p$). Корень дерева объявим входным полюсом. Полученную схему обозначим через S_{pre} .

Объемная сложность такой схемы будет не больше объемной сложности полного бинарного дерева, то есть не более 2^{k+1} . Ее временная сложность также, очевидно, не больше $2k$, причем схема является разделительной, то есть проводимость между ее выходными полюсами равна 0, следовательно, любой набор проходит лишь в одну из выходных вершин.

Это означает, что если мы присоединим к выходным полюсам схемы S_{pre} по экземпляру схемы S_1 (обозначим их соответственно S_1^i), то полученная схема будет иметь временную сложность не больше $T(S_{pre}) + T(S_1)$. Объемная же сложность ее будет равна $Q(S_{pre}) + p \cdot Q(S_1)$.

Далее, разобьем множество наборов, соответствующих переменным x_{n-k+1}, \dots, x_n , на p множеств в соответствии с построенной схемой S_{pre} , а именно, каждое i -е множество M_i будет равно множеству тех наборов, которые проходят в i -й выходной полюс схемы S_{pre} . Очевидно, что если мощности таких множеств различаются для разных i , то не более, чем на 1, так как присваивание номеров вершинам дерева T_k^p проходило равномерно, кроме, может быть, последнего яруса, на котором в каждую вершину проходит ровно по одному набору.

Поэтому мы получили искомое разбиение наборов, соответствующих переменным x_{n-k+1}, \dots, x_n , на множества.

Каждому i -му множеству ставится в соответствие функция $f_i(x_1, \dots, x_n)$, равная 0 на других множествах, такая, что дизъюнкция всех функций f_i дает исходную функцию $f(x_1, \dots, x_n)$. Осталось лишь реализовать всевозможные функции $f_i(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-k}$,

x_{n-k+1}, \dots, x_n) для каждого i и для каждой сферы Φ . Пусть для некоторого i для j -й сферы есть t_{ij} различных функций такого вида. Реализуем их бинарными деревьями, у которых склеены концевые вершины, соответствующие единицам функции, а остальные пути удалены. Обозначим эти схемы через $\hat{S}_1^{ij}, \dots, \hat{S}_{t_{ij}}^{ij}$, они будут прикреплены к соответствующим выходным полюсам схемы S_1^i (некоторые из выходных полюсов схемы S_1^i будут склеены). Объемная сложность каждого такого дерева не больше $k \cdot s$, так как у каждой такой функции не более s единиц, а высота дерева равна числу переменных функции, то есть k .

Общая схема S приведена на рисунке 4.

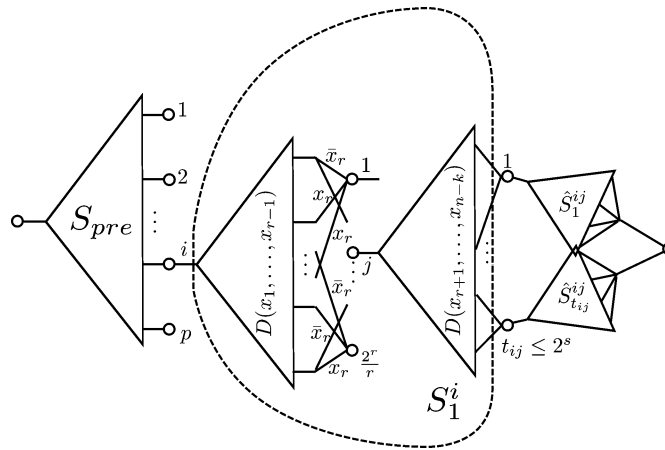


Рис. 4. Полная схема S .

Леммы 2 и 2' из [1], главы II гарантируют, что полученная схема S реализует функцию f .

Объемную сложность такой схемы можно оценить как

$$\begin{aligned}
 Q(S) &= Q(S_{pre}) + \sum_{i=1}^p (Q(S_1^i) + \sum_{j=1}^{\frac{2^r}{r}} \sum_{k=1}^{t_{ij}} Q(\hat{S}_k^{ij})) \leq \\
 &\leq 2^{k+1} + p \cdot (2^{r+1} + \frac{2^r}{r} (2^{n-k-r} (r+2))) + \frac{2^r}{r} \cdot 2^s \cdot sk.
 \end{aligned}$$

Посчитаем временную сложность схемы.

Легко заметить, что любой набор проходит только по одному пути, то есть для каждого уровня существует ровно одна вершина, в которую он проходит.

В схеме S_{pre} из каждой вершины выходит по 2 ребра, следовательно суммарно в схеме S_{pre} будет вычислено не более $2 \cdot k$ предикатов. Далее, в схеме S_1^i будет вычислено $2(n - k) + r$ предикатов. И наконец в одной из схем $S_{\sigma_j}^i$ будет вычислено не более $2k$ предикатов.

Итого получаем

$$T(S) \leq 2k + 2(n - k) + r + 2k.$$

Осталось положить $r = 2^{\lceil \frac{1}{2} \log_2 n \rceil}$, $k = \lfloor 2 \log_2 n \rfloor$, $s = \lfloor n - 2\sqrt{n} \rfloor$. Тогда $\frac{\sqrt{n}}{2} \leq r \leq \sqrt{n}$,

$$Q(S) \leq 2^{k+1} + \left(\frac{2^k}{s} + 1\right) \cdot \left(2^{r+1} + \frac{2^r}{r} (2^{n-k-r} (r+2)) + \frac{2^r}{r} \cdot 2^s \cdot sk\right) \sim \frac{2^n}{s} \sim \frac{2^n}{n},$$

$$T(S) \leq 2k + 2(n - k) + \sqrt{n} + 2k \sim 2n, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема 3 доказана.

С учетом теоремы 2 имеем, что предложенный метод синтеза для почти всех булевых функций строит вентильные и контактные схемы с асимптотически оптимальной временной и объемной сложностью.

Список литературы

- [1] Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.
- [2] Гасанов Э. Э., Кудрявцев В. Б. Теория хранения и поиска информации. М.: Физматлит, 2002.
- [3] Шуткин Ю. С. О реализации булевых функций информационными графами // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 4. С. 31–41.
- [4] Шуткин Ю. С. Асимптотически оптимальная реализация булевых функций информационными графами // Дискретная математика. В печати.