

О кодировании дискретных фигур отрезками

А. А. Муравьева

В работе изучается кодировка фигур, состоящих из конечного числа точек, упорядоченным по величине набором всех попарных расстояний между их точками (спектром). Приводится условный алгоритм построения всех фигур с заданным спектром в пространстве любой размерности. Изучаются свойства спектров и способы продолжения подспектра, являющегося конечной последовательностью чисел, до спектра путем добавления новых элементов.

Ключевые слова: распознавание образов, дискретная геометрия.

Реальные геометрические образы аппроксимируются конечным множеством точек, и «похожесть» этих образов можно изучать на основе таких аппроксимаций. В качестве характеристики таких дискретных аппроксимаций возьмем множество попарных расстояний между точками. Отличие такой характеристики фигур от подробной, но более емкой характеристики с помощью симплексов состоит в том, что здесь в качестве кодов фигур выступают их одномерные характеристики. В случае характеристики симплексами и производными от них, возникает кодировка, восстанавливающая фигуры с точностью до аффинной эквивалентности [1].

Назовем множество A из n точек в евклидовом пространстве \mathbb{R}^m , где m — фиксированная размерность пространства, n -образом и через $|A|$ обозначим мощность A . Выпишем все попарные расстояния между точками A в порядке убывания. Получим упорядоченный набор $S(A) = (d_1, \dots, d_{C_n^2})$, $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_{C_n^2}$, который назовем спектром A . Графиком назовем произвольную невозрастающую конечную

последовательность Γ положительных действительных чисел. Говорим, что A — модель для Γ , если спектр A совпадает с Γ , то есть $S(A) = \Gamma$. Модели будем рассматривать с точностью до изометрических преобразований.

Теорема 1. *Число неизометричных моделей для графика Γ из C_m^2 элементов не превосходит $(C_m^2 - 1)!$, и существует условный алгоритм построения по графику всех его моделей в пространстве заданной размерности.*

Доказательство. Пусть $\Gamma = (d_1, \dots, d_l)$, где $l = C_m^2$. Будем строить модель в пространстве \mathbb{R}^n .

Сопоставим каждому элементу графика Γ пару точек, расстояниями между которыми он является. Для этого введем биективную функцию NUM и однозначно определяемую по ней функцию φ , полагая

$$NUM : \{(1, 2), \dots, (m-1, m)\} \rightarrow \{1, \dots, l\} \text{ и}$$

$$\varphi : \{(1, 2), \dots, (m-1, m)\} \rightarrow \{d_1, \dots, d_l\} : \varphi(i, j) = d_{NUM(i, j)}.$$

Число различных функций NUM равно $(C_m^2)!$, но нам достаточно рассмотреть лишь такие, для которых $NUM(1, 2) = 1$, то есть будем использовать $(C_m^2 - 1)!$ функций.

Необходимым условием для существования модели при фиксированном сопоставлении NUM пары точек элементам графика является выполнение для каждых трех различных натуральных чисел i, j, k , не превосходящих m , следующих неравенств:

$$\varphi(i, j) \leq \varphi(i, k) + \varphi(j, k),$$

где функция φ определена выше.

Для каждой функции NUM , для которой это условие выполняется, проводим построение модели.

Пусть $Base[i] = [Base[0], Base[1], \dots, Base[n-1]]$ — массив натуральных чисел длины n , заполненный нулями; $rang$ — некоторая величина, принимающая целые значения, изначально равная нулю.

Зафиксируем в пространстве некоторый ортогональный базис. Координаты точки с номером 1 полагаем равными $(0, \dots, 0)$.

Шаг s ($1 \leq s \leq m - 1$). Координаты точки с номером $s + 1$, то есть $(x_{s,1}, x_{s,2}, \dots, x_{s,rang+1}, 0, \dots, 0)$, находим по формулам:

$$x_{s,i} = \frac{1}{2} \left(x_{Base[i],i} + \frac{\varphi^2(Base[i-1]+1, s+1) - \varphi^2(Base[i]+1, s+1)}{x_{Base[i],i}} - \frac{\sum_{j=1}^{i-1} ((x_{s,j} - x_{Base[i-1],j})^2 - (x_{s,j} - x_{Base[i],j})^2)}{x_{Base[i],i}} \right), \quad i = 1, \dots, rang;$$

$$x_{s,rang+1} = \sqrt{\varphi^2(1, s+1) - \sum_{j=1}^{rang} x_{s,j}^2},$$

если подкоренное выражение неотрицательно, иначе говорим, что модели с данным соответствием NUM пар точек и расстояний нет, и берем другую функцию NUM .

Если $x_{s,rang+1} \neq 0$ и $rang < n - 1$, то $rang := rang + 1$, $Base[rang] := s$.

Шаг s.1. Для каждого натурального числа j , не превосходящего s , такого, что $j \neq Base[i]$ для всех $i = 1, \dots, rang$, вычисляем

$$\rho(j, s + 1) = \sum_{r=1}^{rang} (x_{s,r} - x_{j-1,r})^2.$$

Если $\rho(j, s + 1) \neq \varphi^2(j, s + 1)$, то:

1) если $x_{s,rang} > 0$, то меняем его знак на противоположный и возвращаемся к *Шагу s.1*.

2) иначе прекращаем построение для данной функции NUM и говорим, что нет модели с таким соответствием пар точек и расстояний.

Если $s + 1 \neq m$, то переходим к *Шагу s+1*.

Если $s + 1 = m$, то мы построили модель для данной функции NUM .

Переходим к построению модели для следующей функции NUM . Этот алгоритм называем C -алгоритмом.

Покажем, что в результате работы C -алгоритма мы действительно построим все модели для Γ в пространстве \mathbb{R}^n , с точностью до изометрических преобразований в данном пространстве. Действительно,

для каждого фиксированного соответствия элементов графика номерам точек, расстояниями между которыми эти элементы являются, существует не более одной модели, с точностью до изометрических преобразований в пространстве. Это следует из работы [1]. Легко видеть, что в результате работы алгоритма такая модель, если она существует, будет построена, иначе будет дан ответ, что ее нет, причем для этого понадобится не более m шагов работы алгоритма. Так как алгоритм запускается для всевозможных сопоставлений точек элементам графика, а их, как было показано выше, не более $(C_m^2 - 1)!$, то очевидно, что все модели заданной размерности для графика Γ будут построены в результате работы C -алгоритма за конечное число шагов. Теорема доказана.

Замечание 1. В результате работы C -алгоритма получаются модели, некоторые из которых могут быть изометричными.

Замечание 2. Существует условный алгоритм проверки изометричности двух фигур, состоящих из конечного числа точек.

Доказательство. Пусть A и B — фигуры мощности m в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n . Занумеруем точки в каждой из фигур номерами от 1 до m . Фигуры A и B изометричны тогда и только тогда, когда существует перестановка $\varphi \in S_m$, такая, что $\rho_1(i, j) = \rho_2(\varphi(i), \varphi(j))$ для всех $1 \leq i < j \leq m$, где $\rho_1(i, j)$ — расстояние между точками с номерами i и j в фигуре A , а ρ_2 — аналогичное расстояние в фигуре B . Таким образом, условный алгоритм проверки изометричности фигур A и B выглядит так.

Фиксируем перестановку $\varphi : \{1, \dots, m\} \mapsto \{1, \dots, m\}$ и для каждого $i = 1, \dots, m - 1$ вычисляем $\rho_1(i, j)$ и $\rho_2(\varphi(i), \varphi(j))$, где $j = i + 1, \dots, m$. Если для какого-то j выполнено $\rho_1(i, j) \neq \rho_2(\varphi(i), \varphi(j))$, то:

1) если были рассмотрены все перестановки $\varphi \in S_n$, говорим, что фигуры A и B не изометричны.

2) иначе переходим к следующей перестановке $\varphi \in S_n$.

Если для всех $1 \leq i < j \leq m$ выполнено $\rho_1(i, j) = \rho_2(\varphi(i), \varphi(j))$, то говорим, что A и B изометричны. Доказательство окончено.

Рассмотрим два способа продолжения графика до спектра путем добавления в него новых элементов. При первом способе элементы приписываются к началу графика, а при втором разрешено добавлять элементы «внутри» графика. Введем величину J_Γ , равную минимальному числу элементов, которые необходимо приписать к Γ для продолжения его до спектра. Аналогично введем величину N_Γ , равную минимальному числу элементов, которые необходимо добавить в Γ для продолжения его до спектра. Положим

$$J(m) = \max_{|\Gamma|=m} J_\Gamma, \quad N(m) = \max_{|\Gamma|=m} N_\Gamma.$$

Найдем точные значения этих величин.

Теорема 2. *Имеет место $J(m) = C_{2(m-1)}^2 - m$.*

Доказательство. Рассмотрим график $\Gamma = (d_1, \dots, d_m)$, в котором

$$d_k > \sum_{i=k+1}^m d_i, \quad k = 1, \dots, m-2,$$

тогда фигура, спектром которой является продолженный график, состоит как минимум из $2(m-1)$ точек, так как никакие из отрезков длин d_2, \dots, d_m , соответствующих попарным расстояниям между точками фигуры, не могут иметь общих концов.

Покажем, что любой график $\Gamma = (d_1, \dots, d_m)$ всегда можно продолжить до спектра фигуры A из $2(m-1)$ точек.

Фиксируем в пространстве \mathbb{R}^n декартову систему координат и полагаем

$$A = \left\{ (x_{i,1}, \dots, x_{i,n}) \mid x_{i,1} = [(i-1)/2] \cdot d_1 + \sum_{k=2}^{[i/2]+1} d_k, \right. \\ \left. x_{i,j} = 0, j = 2, \dots, n, i = 1, \dots, 2(m-1) \right\}$$

Очевидно, что спектр A является продолжением Γ . Теорема доказана.

Теорема 3. *Имеет место $N(m) = C_{m+1}^2 - m$.*

Доказательство. Рассмотрим график $\Gamma = (d_1, \dots, d_m)$, в котором

$$d_k > \sum_{i=k+1}^m d_i, \quad k = 1, \dots, m-2. \quad (*)$$

Покажем, что фигура A , спектром которой является продолженный график, состоит не менее, чем из $m+1$ точки. Рассмотрим граф, ребрами которого являются попарные расстояния между точками A , соответствующие элементам графика Γ , а вершинами — само множество A . Очевидно, что в построенном графе нет циклов, а, следовательно, число вершин больше числа ребер, то есть $|A| \geq m+1$.

Покажем, что любой график $\Gamma = (d_1, \dots, d_m)$ всегда можно продолжить до спектра фигуры A из $m+1$ точки.

Фиксируем в пространстве \mathbb{R}^n декартову систему координат и полагаем

$$A = \left\{ (x_{i,1}, \dots, x_{i,n}) \mid x_{i,1} = \sum_{k=1}^{i-1} d_k, \right. \\ \left. x_{i,j} = 0, j = 2, \dots, n, i = 1, \dots, m+1 \right\}$$

Очевидно, что спектр A является продолжением Γ . Теорема доказана.

Следствие 1. Если в графике Γ из C_n^2 элементов найдётся подграфик вида (*) из n элементов, то Γ не является спектром.

Далее рассмотрим некоторые свойства графиков, являющихся спектрами. В качестве характеристики графиков рассмотрим отношение максимального элемента графика к минимальному. Оказывается, что в графиках, являющихся спектрами, на значение этого отношения накладываются некоторые ограничения. Положим

$$R_m(n) = \inf_{A \subseteq \mathbb{R}^m: |A|=n} \frac{d_1(A)}{d_{C_n^2}(A)}, \quad \text{где } S(A) = (d_1(A), \dots, d_{C_n^2}(A)).$$

Оценки для этой величины в случае плоскости и трехмерного пространства содержатся в следующих теоремах.

Теорема 4. *Имеет место $R_2(n) > \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{\pi}}\sqrt{n} - \frac{4}{3}$.*

Доказательство. Пусть максимальное из попарных расстояний между точками множества A ($|A| < \infty$) равно R , а минимальное равно 1. Оценим мощность множества $|A|$ сверху, из чего и будет вытекать искомая оценка. Нетрудно видеть, что площадь выпуклой оболочки множества A ($T(A)$) не превосходит площади круга диаметра R . Построим множество кругов радиуса 0,5 с центрами в точках множества A . Эти круги не пересекаются и расположены в области $T(A, \frac{1}{2})$, которая является оболочкой ширины 0,5 фигуры $T(A)$. Площадь $T(A, \frac{1}{2}) = T(A) + \frac{L}{2} + \frac{\pi}{4}$, где L — периметр $T(A)$. В силу оценок $T(A) \leq \frac{\pi R^2}{4}$, $L < \frac{4}{3}\pi R$, получаем

$$T(A, \frac{1}{2}) < \frac{\pi R^2}{4} + \frac{2}{3}\pi R + \frac{\pi}{4}.$$

Так как плотность любой системы равных, не перекрывающихся кругов не превосходит $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$, число кругов (а, следовательно, и точек фигуры A) радиуса $\frac{1}{2}$, расположенных в области $T(A, \frac{1}{2})$, не превосходит $T(A, \frac{1}{2}) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$.

$$|A| < \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi R^2}{4} + \frac{2}{3}\pi R + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}R^2 + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Отсюда $R(n) > \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{\pi}}\sqrt{n} - 4/3$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если в графике $\Gamma = (d_1, d_2, \dots, d_{C_n^2})$ выполнено $\frac{d_1}{d_{C_n^2}} < \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{\pi}}\sqrt{n} - \frac{4}{3}$, то Γ не является спектром на плоскости.*

Теорема 5. *Существует возрастающая подпоследовательность $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ натуральных чисел, для которой*

$$R(n_k) \sim \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{\pi}}\sqrt{n_k} \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Построим образ A следующего вида. На диагонали круга натурального радиуса k разместим $2k + 1$ точку на расстоянии 1 друг от друга, на полученных отрезках как на основаниях построим правильные треугольники; распространив подобное построение далее, получим покрытие круга правильными непересекающимися треугольниками со стороной 1; объявим все вершины треугольников, попавших в исходный круг, точками образа A . Очевидно, что отношение максимального попарного расстояния в A к минимальному равно $2k$. Найдем $|A|$.

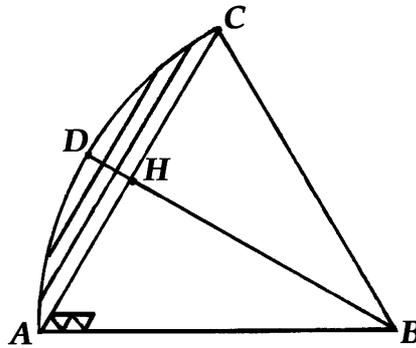


Рис. 1.

На рис. 1 $BADC$ — сектор исходного круга радиуса k , $AB = k$, $BH = \frac{k\sqrt{3}}{2}$, $DH = k(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$. Число слоев, на которые разбивается сегмент ADC сторонами треугольников, параллельными AC , равно $[k(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1)]$. Занумеруем получившиеся полосы номерами $1, \dots, [k(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1)]$, отсчитывая по направлению от H к D .

Длина l_i отрезка, ограничивающего полосу с номером i , равна

$$\sqrt{k^2 - 6ik - 3i^2}, \quad i = 1, 2, \dots, \left[k\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) \right].$$

Пусть k_i — число точек образа A на таком отрезке. Тогда

$$k_i = 2 \left[\sqrt{\frac{k^2}{4} - \frac{3ik}{2} - \frac{3}{4}i^2} - \frac{1}{2} \right] + 2 \quad \text{для } i \text{ той же четности, что и } k,$$

$$k_i = 2 \left[\sqrt{\frac{k^2}{4} - \frac{3ik}{2} - \frac{3}{4}i^2} \right] + 1 \quad \text{для } i \text{ отличной от } k \text{ четности.}$$

Ясно, что имеет место

$$k_i \geq \sqrt{k^2 - 6ik - 3i^2} - 1, \quad i = 1, \dots, \left[k\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) \right].$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |A| &\geq 3k^2 + 3k + 1 + 6 \sum_{i=1}^{\left[k\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) \right]} (\sqrt{k^2 - 6ik - 3i^2} - 1) > \\ &> 3k^2 + k(9 - 4\sqrt{3}) + 6 \sum_{i=1}^{\left[k\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) \right]} \sqrt{k^2 - 6ik - 3i^2} \quad (**) \end{aligned}$$

Так как функция $f(x) = \sqrt{k^2 - 6kx - 3x^2}$ монотонно убывает на отрезке $[1, k(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1)]$, то

$$\sum_{i=1}^{\left[k\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) \right]} \sqrt{k^2 - 6ik - 3i^2} > \int_1^{k\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)} \sqrt{k^2 - 6kx - 3x^2} dx.$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} &\int_1^{k\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)} \sqrt{k^2 - 6kx - 3x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left((x+k)\sqrt{k^2 - 6kx - 3x^2} + \frac{4}{\sqrt{3}}k^2 \arcsin \frac{\sqrt{3}(x+k)}{2k} \right) \Big|_1^{k\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}k^2\pi - (k+1)\sqrt{k^2 - 6k - 3} - \frac{4}{\sqrt{3}}k^2 \arcsin \frac{\sqrt{3}(k+1)}{2k} \right) > \\ &> k^2 \left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \right) + C_1k, \end{aligned}$$

где C_1 — некоторая константа. Подставив найденную оценку для суммы в неравенство (**), получаем

$$|A| > 3k^2 + 6k^2\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right) + C_2k = k^2\frac{2\pi}{\sqrt{3}} + C_2k,$$

где C_2 — некоторая константа. Обозначая $|A|$ через n_k , а отношение максимального попарного расстояния между точками A к минимальному через $R(A)$, получаем:

$$R(n_k) \leq R(A) = 2k = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{\pi}}\sqrt{n_k} + o(\sqrt{n_k}) \quad \text{при } n_k \rightarrow \infty.$$

С учетом нижней оценки для $R(n)$ из Теоремы 4 следует искомое утверждение. Теорема доказана.

Теорема 6. *Имеет место $R_3(n) > \frac{4}{5}\sqrt[3]{n} - \frac{4}{5}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную фигуру A в пространстве \mathbb{R}^3 , состоящую из n точек. Без ограничения общности считаем, что наименьшее попарное расстояние между ее точками (то есть $d_{C_n^2}(A)$) равно 1. Максимальное попарное расстояние ($d_1(A)$) обозначим через R , пусть оно реализуется между точками C и D фигуры A . Зафиксируем произвольную плоскость в пространстве \mathbb{R}^3 , содержащую прямую (CD) , и построим в этой плоскости два круга радиуса $R + \frac{1}{2}$ с центрами в точках C и D . Пересечение построенных кругов обозначим через μ . Трехмерную фигуру, образуемую вращением фигуры μ относительно прямой (CD) , обозначим через M . Построим теперь шары радиуса $\frac{1}{2}$ с центрами в каждой точке множества A . Очевидно, что построенные шары не пересекаются (но могут касаться) и целиком содержатся в фигуре M . Оценим число непересекающихся шаров, содержащихся в M , откуда и будет вытекать доказываемая нами оценка для $R_3(n)$. Ясно, что

$$n \leq \frac{6}{\pi}V\rho, \quad (***)$$

где V — объем фигуры M , а ρ — плотность самой плотной упаковки шаров одинакового радиуса в \mathbb{R}^3 . Для ρ известна оценка сверху [2]:

$$\rho \leq \sqrt{2}(3 \arccos(1/3) - \pi) < 0.78$$

Имеет место

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_0^{\frac{R}{2} + \frac{1}{2}} \left(\left(R + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(x + \frac{R}{2} \right)^2 \right) dx = \\
 &= 2\pi \left(\left(R + \frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{R}{2} + \frac{1}{2} \right) - \frac{\left(x + \frac{R}{2} \right)^3}{3} \Big|_0^{\frac{R}{2} + \frac{1}{2}} \right) = \\
 &= \pi \left(\left(R + \frac{1}{2} \right)^2 (R + 1) - \frac{2}{3} \left(\left(R + \frac{1}{2} \right)^3 - \frac{R^3}{8} \right) \right) = \\
 &= \pi \left(R^3 + 2R^2 + \frac{5}{4}R + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} (7R^3 + 12R^2 + 6R + 1) \right) = \\
 &= \pi \left(\frac{5}{12}R^3 + R^2 + \frac{3}{4}R + \frac{1}{6} \right).
 \end{aligned}$$

Подставив в неравенство (***) найденное значение V и оценку для ρ , получаем

$$n \leq (2.5R^3 + 6R^2 + 4.5R + 1) \cdot 0.78 < 1.95(R + 0.8)^3.$$

Отсюда $R > \sqrt[3]{\frac{20}{39}n} - 0.8 > 0.8\sqrt[3]{n} - 0.8$.

Так как полученное неравенство выполняется для любой фигуры из n точек, то справедлива оценка для $R_3(n)$ из утверждения теоремы. Теорема доказана.

Следствие 1. Если в графике $\Gamma = (d_1, d_2, \dots, d_{C_n^2})$ выполнено условие $\frac{d_1}{d_{C_n^2}} < \frac{4}{5}\sqrt[3]{n} - \frac{4}{5}$, то Γ не является спектром в пространстве.

Замечание 3. $R_3(n) \asymp \sqrt[3]{n}$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Покажем, что $R_3(n) < \sqrt{3}\sqrt[3]{n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда, с учетом нижней оценки для $R_3(n)$ из Теоремы 6, и получим искомое утверждение.

Для доказательства неравенства для каждого n построим фигуру A , состоящую из n точек, следующим образом.

Находим натуральное k , такое, что $k^3 < n \leq (k+1)^3$. Фиксируем в \mathbb{R}^3 декартову систему координат. Пусть

$$A \subseteq \{(x_1, x_2, x_3) | x_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq x_i \leq k, i = 1, 2, 3\}.$$

Тогда $R_3(n) \leq \frac{d_1(A)}{d_{C_n^2}(A)} \leq k\sqrt{3} < \sqrt{3}\sqrt[3]{n}$. Утверждение доказано.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю академику Кудрявцеву В. Б. за постановку задачи, внимание к работе и ценные обсуждения.

Список литературы

- [1] Козлов В. Н. Математическое моделирование зрительного восприятия // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука, 1996. С. 321–338.
- [2] Роджерс К. Укладки и покрытия. М.: Мир, 1968.
- [3] Муравьева А. А. Распознавание n -точечников // Интеллектуальные системы. Т. 11, вып. 1–4. 2007. С. 777–780.