Порядок сложности укладки деревьев на плоскость

В. А. Ли

В работе рассматривается задача укладки деревьев на 2-х мерную прямоугольную решетку. Предложено несколько алгоритмов укладки, оптимальных по порядку, как для суммарной длины ребер, так и для площади укладки.

Ключевые слова: укладка дерева, укладка в прямоугольную решетку, длина укладки, площадь укладки, минимальная укладка, алгоритм укладки.

1. Введение

Основной задачей теории синтеза управляющих систем (см., например, [1, 2, 3]) является изучение вопросов оптимальной структурной реализации дискретных функций и, в частности, функций алгебры логики (ФАЛ) или, иначе, булевских функций в различных классах схем. Во многих случаях схема, вычисляющая заданную функцию, подвергается дальнейшей «геометрической» реализации, то есть вложению в некоторую геометрическую структуру. При этом критерием оптимальности схемы, как правило, является не ее «обычная» сложность, а функционал, отражающий минимальную размерность геометрической структуры, в которую данную схему удалось вложить. Основными классами схем, в которых обычно реализуются ФАЛ, являются контактные схемы и схемы из функциональных элементов (СФЭ) [1], а в последнее время — двоичные решающие диаграммы (BDD) [4]. В качестве структур, в которых происходит геометрическая реализация схем, выступают, как правило, 2-х и 3-х мерные прямоугольные решетки ($\mathbb{N}^2$ и $\mathbb{N}^3$) [5], клеточные схемы [6, 7], гиперкуб, или, иначе, единичный булев куб [8].

Имеется большое число работ посвященных вложениям графов в различные геометрические структуры (см., например, [9, 10, 11]). Так, исследовано вложение одномерных (линейка, кольцо) [12] и двумерных (решетка, тор) [13] структур параллельных программ в регулярные структуры. В работах [14, 15, 16], например, получены оценки некоторых параметров прямоугольных решеток, допускающих вложение в них гиперкубов, и рассмотрена проблема вложения n-мерного куба в прямоугольные решетки с $2n$ вершинами.

Исследование вопросов сложности реализации алгоритмов укладки на 2-х мерную прямоугольную решетку ($\mathbb{N}^2$) различных деревьев имеет ярко выраженное практическое значение. Архитектура 2-х мерной прямоугольной решетки хорошо подходит для моделирования различных алгоритмов, а укладки различных деревьев на нее могут быть полезны в области синтеза схем, химии и нанотехнологиях. Так, например, в [17] исследованы вложения некоторых реализованных на плоскости планарных графов, применяемых в химии, в кубические решетки с сохранением или же удвоением всех расстояний.

В настоящей работе рассматривается задача алгоритмизации процесса укладки различных видов деревьев на 2-х мерную прямоугольную решетку ($\mathbb{N}^2$). Рассматриваются две меры сложности укладки: суммарная длина ребер при укладке и площадь укладки. Предложены несколько алгоритмов укладки, применимые к разным классам деревьев и имеющих разные соотношения длины и площади укладки. Все предложенные алгоритмы оптимальны по порядку для обеих мер сложности, а один из них асимптотически оптимален по площади укладки.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю д.ф.-м.н., профессору Э. Э. Гасанову за постановку задачи и поддержку при ее решении, а также А. П. Пивоварову за оказанную помощь в работе.

2. Основные понятия и формулировка результатов

Дано множество $\mathbb{N}^2$ — всевозможные пары (x, y), где $x, y \in \mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Пары $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ назовем *координатами*. Множество $\mathbb{N}^2$ будем называть *координатной сеткой*, она представляет собой прямоугольную решетку, ячейки которой есть координаты (x, y).

Рассмотрим граф $G = \{V, W\}$, где $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — множество вершин графа, $V^{(2)}$ — множество двухэлементных подмножеств V, $W \subseteq V^{(2)}$ — множество ребер.

Укладкой графа $G = \{V, W\}$ на плоскость будем называть отображение $\varphi : V \to \mathbb{N}^2$, которое сопоставляет вершинам данного графа некоторые координаты $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, причем разным вершинам соответствуют разные координаты, то есть отображение множества вершин на плоскость является инъективным. Через $\Phi(G)$ обозначим множество всех укладок графа G.

Пусть дан граф $G = \{V, W\}$ и задана его укладка φ, введем следующие характеристики.

Длиной ребра $w = (v_1, v_2)$ графа G, при укладке φ будем называть величину

$$L(\varphi(w)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|,$$

где (x_1, y_1) и (x_2, y_2) координаты вершин v_1 и v_2 ребра w, соответственно.

Длина укладки φ *графа* G есть сумма длин всех уложенных ребер графа при данной укладке φ

$$L(\varphi(G)) = \sum_{w \in W} L(\varphi(w)).$$

Площадь укладки φ *графа* G есть площадь минимального прямоугольника, содержащего все вершины уложенного графа, такого, что стороны прямоугольника параллельны осям координат сетки, а левая нижняя точка совпадает с началом координат $(0, 0)$. Обозначается $S(\varphi(G))$.

Минимальной длиной укладки графа будем называть величину

$$L(G) = \min_{\varphi \in \Phi(G)} L(\varphi(G)).$$

Поскольку длины укладок графа являются натуральными числами, то минимум достигается, и укладку, на которой минимум достигается, будем называть *минимальной укладкой* графа G.

Укладывая граф в прямоугольник $(1 \times |V|)$ получаем минимально возможную площадь графа, равную мощности множества его вершин $|V|$.

Обозначим $\Phi(G,l) = \{\varphi \in \Phi(g) : L(\varphi(G)) \leqslant l\}$, то есть это множество укладок графа G, длина которых не больше l.

Минимальной площадью укладки графа для длины l будем называть величину

$$S(G,l) = \min_{\varphi \in \Phi(G,l)} S(\varphi(G)).$$

Деревом называется любой ациклический граф. Вершина дерева называется *листом (или висячей вершиной)*, если степень ее инцидентности равна единице. *Корневым деревом* называется дерево с выделенной вершиной. *Расстояние* между вершинами v_1 и v_2 дерева есть количество ребер в пути, соединяющем v_1 и v_2. *Радиусом дерева с корнем* будем обозначать максимальное расстояние от корневой вершины дерева до какого-либо листа.

n-ичным деревом будем называть дерево у которого степень инцидентности корневой вершины не более n, а степень инцидентности остальных вершин не более $n+1$.

Полным n-ичным деревом будем называть дерево у которого степень инцидентности корневой вершины равна n, степень инцидентности висячих вершин равна единице, а остальные вершины имеют степень инцидентности $n+1$, и расстояние между корневой вершиной и любой из висячих одинаково, и соответственно равно радиусу дерева.

Обозначим через D_n^r — полное n-ичное дерево радиуса r.

Теорема 1. *Для любого натурального r выполнено*

$$N - 1 \leqslant L(D_2^r) < \frac{23}{16} \cdot N,$$

$$N \leqslant S(D_2^r, 23N/16) < \frac{9}{4} \cdot N,$$

где $N = 2^{r+1} - 1$ *— число вершин в полном бинарном дереве радиуса* r.

Теорема 2. *Для любых натуральных* n *и* r *выполнено*

$$N - 1 \leqslant L(D_n^r) < n \cdot N,$$
$$N \leqslant S(D_n^r, n \cdot N) < \frac{n}{n-1} \cdot N,$$

где $N = \frac{n^{r+1}-1}{n-1}$ *— число вершин в полном* n*-ичном дереве радиуса* r.

Теорема 3. *Для любого натурального* n*, любого* n*-ичного дерева* D *и любого параметра* $C > n + 1$ *выполнено*

$$N - 1 \leqslant L(D) \leqslant c_1 \cdot N - c_2 \cdot \sqrt{N},$$
$$N \leqslant S(D, c_1 \cdot N - c_2 \cdot \sqrt{N}) \leqslant N + c_3\sqrt{N},$$

где N *— число вершин в дереве* D*,* $c_1 = (C+1)(4 + \frac{12}{C-(n+1)}) + c_2$*,* $c_2 = \frac{4C\sqrt{n+2}}{1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}}$*,* $c_3 = 3(C+1)$.

3. Класс полных бинарных деревьев

Введем некоторые вспомогательные определения.

Для положительного вещественного числа a через $]a[$ обозначим наименьшее целое, не меньшее чем a.

Алгоритмом укладки графов из $\mathcal{G}$ будем называть отображение $\mathcal{A}$, задаваемое на множестве $\mathcal{G}$, которое каждому графу $G \in \mathcal{G}$ сопоставляет определенную его укладку $\varphi_{\mathcal{A}}(G)$.

Длиной укладки графа $G \in \mathcal{G}$ при заданном алгоритме $\mathcal{A}$ называется величина

$$L_{\mathcal{A}}(G) = L(\varphi_{\mathcal{A}}(G))$$

и *площадь укладки графа* $G \in \mathcal{G}$ при заданном алгоритме $\mathcal{A}$ есть величина

$$S_{\mathcal{A}}(G) = S(\varphi_{\mathcal{A}}(G)).$$

По определению $L(G) \leqslant L_{\mathcal{A}}(G)$, поэтому, получая оценку длины укладки при заданном алгоритме $\mathcal{A}$, мы автоматически получаем оценку минимальной длины укладки и оценку минимальной площади укладки для полученной длины.

Исследуем полные бинарные деревья произвольного радиуса.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Существует алгоритм укладки $\mathcal{A}^1$, с помощью которого полное бинарное дерево радиуса r можно уложить в прямоугольник со сторонами a_r и b_r следующим образом:*

- $a_r = b_r = 3 \cdot 2^{\frac{r-1}{2}} - 1$, *если r — нечетное;* $b_r = 3 \cdot 2^{\frac{r-2}{2}} - 1$, $a_r = 2 \cdot b_r + 1 = 3 \cdot 2^{\frac{r}{2}} - 1$, *если r — четное;*
- *корень дерева находится в точке* $((a_r+1)/2, (b_r+1)/2)$*;*
- *длина инцидентных корневой вершине ребер при $r \leqslant 3$ равна 1, а при $r > 3$ равна* $3 \cdot 2^{]\frac{r-3}{2}[} - 1$*;*
- *для длины укладки дерева справедливы соотношения:* $L_{\mathcal{A}^1}(D_2^1) = 2$, $L_{\mathcal{A}^1}(D_2^2) = 6$, $L_{\mathcal{A}^1}(D_2^3) = 14$,

$$L_{\mathcal{A}^1}(D_2^r) = 23 \cdot 2^{r-3} - 6 \cdot 2^{]\frac{r-3}{2}[}$$

при $r > 3$ четном и

$$L_{\mathcal{A}^1}(D_2^r) = 23 \cdot 2^{r-3} - 9 \cdot 2^{]\frac{r-3}{2}[}$$

при $r > 3$ нечетном.

Доказательство будем вести индукцией по радиусу дерева.

Базис индукции. Укладки для случаев $r \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, приведены на рисунке 1. Легко проверить, что данные укладки удовлетворяют условиям леммы.

Индуктивный переход. Рассмотрим 2 случая:

1. r — нечетное. Согласно предположению индукции, дерево радиуса $r-1$ укладывается в прямоугольник со сторонами

$$a_{r-1} = 3 \cdot 2^{\frac{r-1}{2}} - 1, \quad b_{r-1} = 3 \cdot 2^{\frac{r-3}{2}} - 1.$$

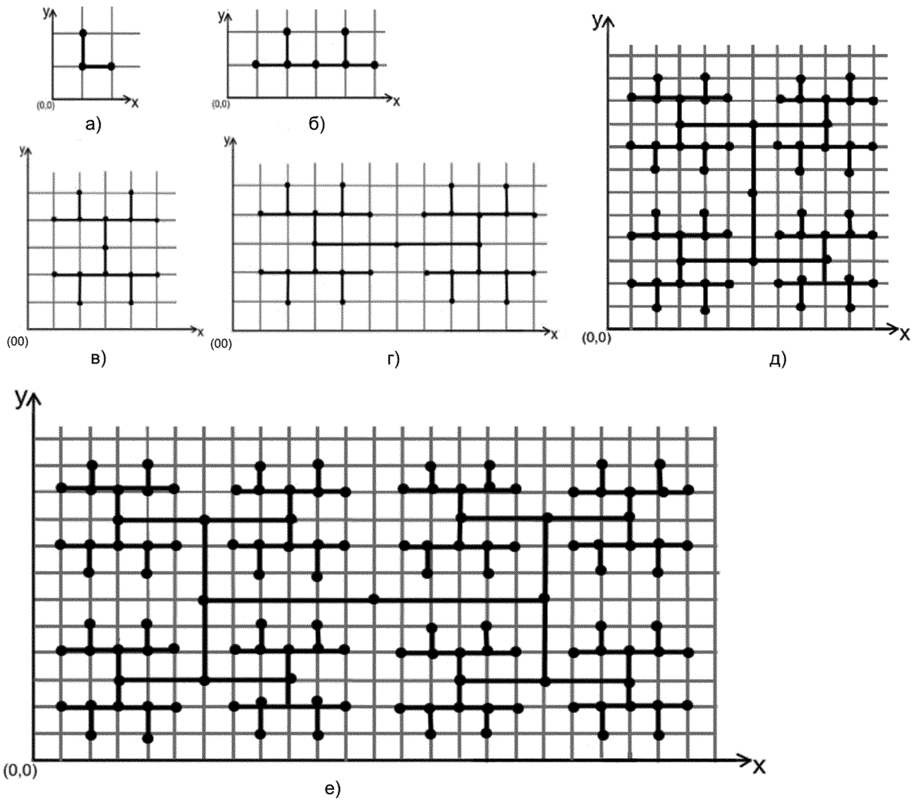

Рис. 1. Примеры укладки полного бинарного дерева на плоскость.

Бинарное дерево радиуса r строим следующим образом. Точку $(b_{r-1}+1, b_{r-1}+1)$ объявляем корнем дерева. Легко проверить, что $(a_r+1)/2 = b_{r-1}+1 = (b_r+1)/2$, то есть второе условие леммы выполняется.

Из корневой вершины выпускаем два вертикальных ребра длины $(b_{r-1}+1)/2 = 3 \cdot 2^{\frac{r-3}{2}-1}$ в противоположные стороны и концы этих ребер будут корневыми для укладок полных бинарных деревьев радиуса $r-1$. Схематично этот шаг изображен на рисунке 2 а).

В итоге получаем, что при нечетном r дерево укладывается в прямоугольник со сторонами

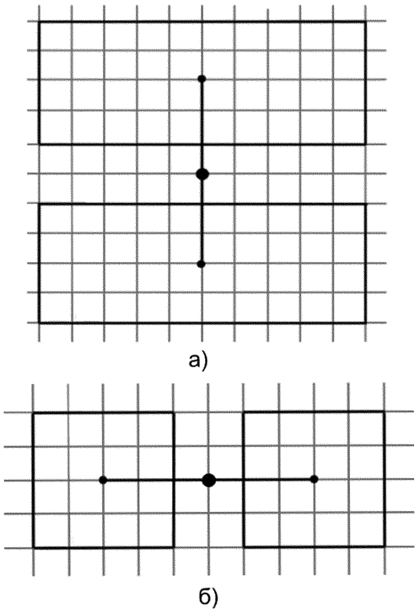

Рис. 2. Пример укладки полного бинарного дерева на плоскость а) нечетного радиуса; б) четного радиуса.

$$a_r = 2 \cdot a_{r-1} + 1 = 3 \cdot 2^{\frac{r-1}{2}} - 1, \quad b_r = b_{r-1} = 3 \cdot 2^{\frac{r-1}{2}} - 1$$

в соответствии с первым условием леммы, причем длина ребер, инцидентных корневой вершине, удовлетворяют третьему условию леммы.

Длина укладки дерева радиуса r находится следующим образом:

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{A}^1}(D_2^r) &= 2 \cdot L_{\mathcal{A}^1}(D_2^{r-1}) + 2 \cdot 3 \cdot 2^{]\frac{r-3}{2}[-1} = \\ &= 2 \cdot (23 \cdot 2^{r-4} - 6 \cdot 2^{]\frac{r-4}{2}[}) + 3 \cdot 2^{]\frac{r-3}{2}[} = \\ &= 23 \cdot 2^{r-3} - 12 \cdot 2^{]\frac{r-3}{2}[} + 3 \cdot 2^{]\frac{r-3}{2}[} = 23 \cdot 2^{r-3} - 9 \cdot 2^{]\frac{r-3}{2}[}. \end{aligned}$$

2. r — четное. Согласно предположению индукции, дерево радиуса $r-1$ укладывается в квадрат со сторонами

$$a_{r-1} = b_{r-1} = 3 \cdot 2^{\frac{r-2}{2}} - 1.$$

Бинарное дерево радиуса r строим следующим образом. Точку $(a_{r-1}+1, (b_{r-1}+1)/2)$ объявляем корнем дерева. Легко проверить, что $a_{r-1}+1 = (a_r+1)/2$ и $(b_{r-1}+1)/2 = 3\cdot 2^{\frac{r-2}{2}-1} = (b_r+1)/2$, то есть второе условие леммы выполняется.

Из корневой вершины выпускаем два горизонтальных ребра длины $(a_{r-1}+1)/2 = 3\cdot 2^{\frac{r-2}{2}-1}$ в противоположные стороны и концы этих ребер будут корневыми для укладок полных бинарных деревьев радиуса $r-1$. Схематично этот шаг изображен на рисунке 2 b).

В итоге получаем, что при нечетном r дерево укладывается в прямоугольник со сторонами

$$a_r = 2\cdot a_{r-1}+1 = 3\cdot 2^{\frac{r}{2}}-1, \quad b_r = b_{r-1} = 3\cdot 2^{\frac{r-2}{2}}-1$$

в соответствии с первым условием леммы, причем длина ребер, инцидентных корневой вершине, удовлетворяют третьему условию леммы.

Длина укладки дерева радиуса r находится следующим образом:

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{A}^1}(D_2^r) = 2\cdot L_{\mathcal{A}^1}(D_2^{r-1}) + 2\cdot 3\cdot 2^{]\frac{r-3}{2}[-1} =& \\ = 2\cdot(23\cdot 2^{r-4} - 9\cdot 2^{]\frac{r-4}{2}[}) + 3\cdot 2^{]\frac{r-3}{2}[} =& \\ = 23\cdot 2^{r-3} - 9\cdot 2^{]\frac{r-3}{2}[} + 3\cdot 2^{]\frac{r-3}{2}[} = 23\cdot 2^{r-3} - 6\cdot 2^{]\frac{r-3}{2}[}.& \end{aligned}$$

Тем самым доказательство леммы 1 полностью завершено.

Доказательство теоремы 1.

Покажем, что справедливы следующие оценки

$$L_{\mathcal{A}^1}(D_2^r) < \frac{23}{16}\cdot N, \quad S_{\mathcal{A}^1}(D_2^r) < \frac{9}{4}\cdot N,$$

где $N = 1+2+2^2+\ldots+2^k+\ldots+2^r = 2^{r+1}-1$ — число вершин в полном бинарном дереве радиуса r.

Справедливость неравенств для $r \leqslant 3$ проверяется непосредственно.

Рассмотрим случай, когда r четное и $r > 3$.

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{A}^1}(D_2^r) = 23\cdot 2^{r-3} - 6\cdot 2^{]\frac{r-3}{2}[} =& \\ = \frac{23}{16}\cdot(2^{r+1}-1) + \frac{23}{16} - 6\cdot 2^{]\frac{r-3}{2}[} < \frac{23}{16}\cdot N.& \end{aligned}$$

$$S_{\mathcal{A}^1}(D_2^r) = a_r \cdot b_r = (3 \cdot 2^{\frac{r}{2}} - 1) \cdot (3 \cdot 2^{\frac{r-2}{2}} - 1) = \\ = \frac{9}{4} \cdot (2^{r+1} - 1) + \frac{9}{4} - 9 \cdot 2^{\frac{r}{2}-1} + 1 < \frac{9}{4} \cdot N.$$

Рассмотрим случай, когда r нечетное и $r > 3$.

$$L_{\mathcal{A}^1}(D_2^r) = 23 \cdot 2^{r-3} - 9 \cdot 2^{]\frac{r-3}{2}[} = \\ = \frac{23}{16} \cdot (2^{r+1} - 1) + \frac{23}{16} - 9 \cdot 2^{]\frac{r-3}{2}[} < \frac{23}{16} \cdot N.$$

$$S_{\mathcal{A}^1}(D_2^r) = a_r \cdot b_r = (3 \cdot 2^{\frac{r-1}{2}} - 1) \cdot (3 \cdot 2^{\frac{r-1}{2}} - 1) = \\ = \frac{9}{4} \cdot (2^{r+1} - 1) + \frac{9}{4} - 6 \cdot 2^{\frac{r-1}{2}} + 1 < \frac{9}{4} \cdot N.$$

Нижние оценки следуют из простых мощностных соображений, что длина укладки графа не может быть меньше числа ребер в графе, а площадь укладки — меньше числа вершин в графе, и того факта, что в дереве с N вершинами будет $N - 1$ ребро.

Тем самым теорема 1 полностью доказана.

4. Класс полных n-ичных деревьев

Исследуем полные n-ичные деревья произвольного радиуса. Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Существует алгоритм укладки $\mathcal{A}^2$, который позволяет полное n-ичное дерево радиуса r прямоугольник со сторонами a_r и b_r укладывать следующим образом:*

- $a_r = b_r = \frac{n^{t+1}-1}{n-1}$, *если радиус $r = 2t$ четный;* $a_r = \frac{n^{t+1}-1}{n-1}$, $b_r = \frac{n^{t+2}-1}{n}$, *если радиус $r = 2t + 1$ нечетный;*
- *корень дерева находится в правом верхнем углу прямоугольника;*
- *справедливы следующие оценки длины и площади укладки полного n-ичного дерева радиуса r:*

$$L_{\mathcal{A}^2}(D_{n,r}^c) < n \cdot N, \quad S_{\mathcal{A}^2}(D_{n,r}^c) < \frac{n}{n-1} \cdot N,$$

где $N = \frac{n^{r+1}-1}{n-1}$ *— число вершин в полном* n*-ичном дереве радиуса* r.

Доказательство будем вести индукцией по радиусу дерева r.

Базис индукции. $r = 1$.

Укладываем дерево в линейку, как показано на рис. 3 а).

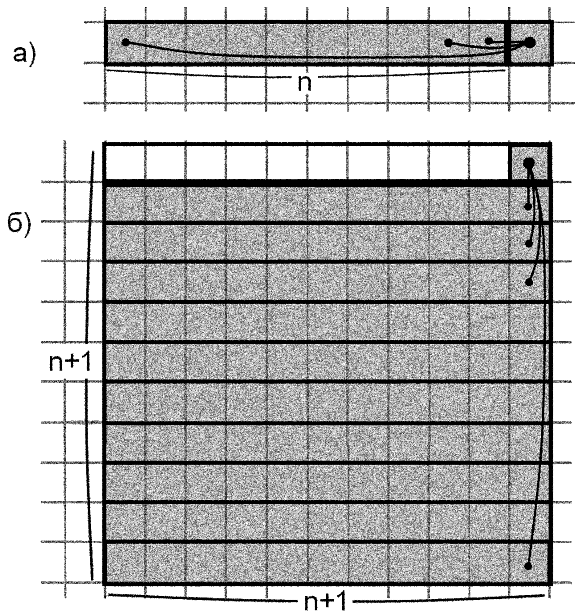

Рис. 3. Пример укладки максимального n-ичного дерева на плоскость: а) $r = 1$; б) $r = 2$.

От корневой вершины откладываем n ребер в ряд. Получаем прямоугольник $1 \times (n+1)$ и корень дерева расположен в его правом верхнем углу. $N = n + 1$ и

$$L_{\mathcal{A}^2}(D_n^1) = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n}{2} \cdot (n+1) < n \cdot (n+1),$$
$$S_{\mathcal{A}^2}(D_n^1) = 1 \times (n+1) < \frac{n}{n-1} \cdot (n+1).$$

Радиус $r = 2$. Укладываем дерево в квадрат (рис. 3 б)). От корневой вершины подряд откладываем n ребер, на концы которых прикрепляем дерево радиуса один, уложенное на предыдущем шаге. Получаем квадрат $(n+1)\times(n+1)$ и корень дерева расположен в его правом верхнем углу. $N = n^2+n+1$ и

$$\begin{aligned}L_{\mathcal{A}^2}(D_n^2) &= n\cdot L_{\mathcal{A}^2}(D_n^1)+(1+2+\ldots+n) = \\ &= n(1+2+\ldots+n)+(1+2+\ldots+n) = \\ &= \frac{1}{2}n(n+1)^2 = \frac{n^3}{2}+n^2+\frac{n}{2} < n\cdot(n^2+n+1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{\mathcal{A}^2}(D_n^2) &= (n+1)(n+1) = \frac{(n-1)(n^2+2n+1)}{n-1} = \\ &= \frac{n^3+n^2-n-1}{n-1} < \frac{n}{n-1}\cdot(n^2+n+1).\end{aligned}$$

Индуктивный переход.

Пусть $r = 2t$. Дерево строим следующим образом: из корневой вершины выпускаем n ребер подряд, причем длина первого ребра равна единице, длина второго равна $a_{r-1}+1$, длина третьего равна $2a_{r-1}+1$, …, длина n-го ребра равна $(n-1)a_{r-1}+1$, где согласно предположению индукции $a_{r-1} = n^{t-1}+n^{t-2}+\ldots+1$, $b_{r-1} = n^t + n^{t-1}+\ldots+1$ и на концы ребер прикрепляем дерево радиуса $r-1$. Тогда дерево радиуса r укладывается в прямоугольник со сторонами $a_r = b_{r-1} = n^t+n^{t-1}+\ldots+1$ и $b_r = n\cdot a_{r-1} = n(n^{t-1}+n^{t-2}+\ldots+1)+1 = n^t+n^{t-1}+\ldots+1$, то есть квадрат. Корень дерева расположен в его правом верхнем углу. Всего вершин в полном n-ичном дереве радиуса r равно

$$N = n^r+n^{r-1}+\ldots+1 = \frac{n^{r+1}-1}{n-1}.$$

Длина вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned}L_{\mathcal{A}^2}(D_n^r) &= n\cdot L_{\mathcal{A}^2}(D_n^{r-1})+1+a_{r-1}+1+2a_{r-1}+1+\ldots+(n-1)a_{r-1}+1 = \\ &= n\cdot L_{\mathcal{A}^2}(D_n^{r-1})+1+(n^{t-1}+n^{t-2}+\ldots+1)+1+2(n^{t-1}+n^{t-2}+\ldots+1)+1+ \\ &\quad +\ldots+(n-1)(n^{t-1}+n^{t-2}+\ldots+1)+1 = \\ &= n^{r-1}(\frac{1}{2}n(n+1))+n^{r-2}(\frac{1}{2}n(n+1))+n^{r-3}((n+1)\frac{1}{2}n(n-1)+n)+\end{aligned}$$

$$+n^{r-4}((n+1)\frac{1}{2}n(n-1)+n)+n^{r-5}((n^2+n+1)\frac{1}{2}n(n-1)+n)+\ldots+$$
$$+n^2((n^{[\frac{r}{2}]-2}+n^{[\frac{r}{2}]-3}+\ldots+1)\frac{1}{2}n(n-1)+n)+$$
$$+n((n^{[\frac{r}{2}]-2}+n^{[\frac{r}{2}]-3}+\ldots+1)\frac{1}{2}n(n-1)+n)+$$
$$+(n^{[\frac{r}{2}]-1}+n^{[\frac{r}{2}]-2}+\ldots+1)\frac{1}{2}n(n-1)+n=$$
$$=n^{r-1}(\frac{1}{2}n(n+1))+n^{r-2}(\frac{1}{2}n(n+1))+$$
$$+\sum_{i=1}^{r-3}n^i(\frac{n(n-1)}{2}(n^{[\frac{r-i}{2}]}+\ldots+1)+n)=$$

для сокращения записи, обозначим $C=n^{r-1}(\frac{1}{2}n(n+1))+n^{r-2}(\frac{1}{2}n(n+1))$, тогда

$$=C+\sum_{i=1}^{r-3}n^i\left(\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{n^{[\frac{r-i}{2}]+1}-1}{\sqrt{n}-1}+n\right)=$$
$$=C+\frac{n(n-1)}{2(\sqrt{n}-1)}\cdot\left(\sum_{i=1}^{r-3}n^{[\frac{r+i}{2}]+1}-\sum_{i=1}^{r-3}n^i\right)+\sum_{i=1}^{r-3}n^{i+1}<$$
$$<C+\frac{n(n-1)}{2(\sqrt{n}-1)}\cdot\sum_{i=1}^{r-3}n^{[\frac{r+i}{2}]+1}=$$
$$=C+\frac{n(n-1)}{2(\sqrt{n}-1)}\cdot(n^{[\frac{r+3}{2}]}+n^{[\frac{r+4}{2}]}+\ldots+n^{[\frac{2r+5}{2}]})=$$
$$=C+\frac{n(n-1)}{2(\sqrt{n}-1)}\cdot\frac{n^{[\frac{r+3}{2}]}(n^{\frac{r-3}{2}}-1)}{\sqrt{n}-1}=$$
$$=n^{r-1}(n(n+1)/2)+n^{r-2}(n(n+1)/2)+\frac{n(n-1)}{2(n-1)}\cdot n^r=$$
$$=\frac{n^{r-1}}{2}(n^2+n+n+1+n^2)<n^{r-1}(n^2+n+1)=n^{r-1}\frac{n^3-1}{n-1}<$$
$$<n\frac{n^{r+1}-1}{n-1}=n\cdot N.$$

Площадь равна

$$S_{\mathcal{A}^2}(D_n^r) = (n^t + n^{t-1} + \ldots + 1) \cdot (n^t + n^{t-1} + \ldots + 1) = \\ = \left(\frac{n^{t+1}-1}{n-1}\right)^2 < \frac{n^{2t+2}-n}{(n-1)^2} = \frac{n}{n-1}N.$$

Пусть $r = 2t + 1$. Дерево строим аналогично четному случаю и согласно предположению индукции, $a_{r-1} = n^t + n^{t-1} + \ldots + 1$. Тогда дерево радиуса r укладывается в прямоугольник со сторонами $a_r = a_{r-1} = n^t + n^{t-1} + \ldots + 1$ и $b_r = n \cdot a_{r-1} = n(n^t + n^{t-1} + \ldots + 1) + 1 = n^{t+1} + n^t + \ldots + 1$. Корень дерева находится в его правом верхнем углу. Всего вершин равно $N = n^r + n^{r-1} + \ldots + 1 = \frac{n^{r+1}-1}{n-1}$. Длина вычисляется по формуле:

$$L_{\mathcal{A}^2}(D_n^r) = n \cdot L_{\mathcal{A}^2}(D_n^{r-1}) + 1 + a_{r-1} + 1 + 2a_{r-1} + 1 + \ldots + (n-1)a_{r-1} + 1.$$

И рассуждая аналогично четному случаю, приходим к тому, что

$$L_{\mathcal{A}^2}(D_n^r) < n \cdot N.$$

Площадь равна

$$S_{\mathcal{A}^2}(D_n^r) = (n^t + n^{t-1} + \ldots + 1) \cdot (n^{t+1} + n^t + \ldots + 1) = \\ = \frac{n^{t+1}-1}{n-1} \cdot \frac{n^{t+2}-1}{n-1} = \frac{n^{2t+3} - n^{t+2} - n^{t+1} + 1}{(n-1)^2} < \\ < \frac{n^{2t+3}-n}{(n-1)^2} = \frac{n}{n-1}N.$$

Тем самым лемма 2 полностью доказана.

Из леммы 2, применяя те же рассуждения о мощностных оценках, что и для теоремы 1, получаем утверждение теоремы 2.

5. Класс произвольных n-ичных деревьев

Весом дерева D назовем величину, равную количеству вершин, содержащихся в данном дереве. Обозначается как $weight(D)$. *Центром тяжести n-ичного дерева* $D = (V, W)$ назовем ребро $w = (v_1, v_2)$, которое делит данное дерево на два поддерева (левое D_l и правое D_r) в соотношении $weight(D_l) \leqslant n \cdot weight(D_r) + 1$.

5.1. Алгоритм нахождения центра тяжести

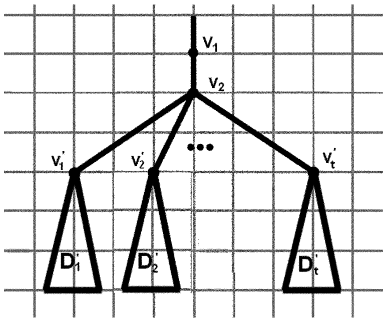

Рис. 4.

Дано дерево $D = (V, W)$, $weight(D) = N$. Выберем в нем произвольным образом ребро $w = (v_1, v_2)$, назовем его *исходным.*

1) исходное ребро $w = (v_1, v_2)$ делит дерево на поддеревья D_1 и D_2. $weight(D_1) = x$, $weight(D_2) = N - x$ и $x \leqslant N - x$.

◦ если $weight(D_2) \leqslant n \cdot weight(D_1) + 1$, то останов и исходное ребро w — есть центр тяжести.

◦ иначе рассмотрим дерево D_2. Пусть $deg(v_2) = t + 1$, тогда D_2 состоит из t поддеревьев, исходящих из вершины v_2, $t \leqslant n$ (рис. 4).

2) считаем вес каждого из D'_i поддерева, $i = 1, \ldots, t$.

3) D'_i — поддерево с наибольшим весом, $i = 1, \ldots, t$, v_i — его корень. Обозначим ребро $w = (v_2, v'_i)$ как исходное, переходим к пункту 1) алгоритма.

Утверждение 1. *Алгоритм нахождения центра тяжести в n-ичном дереве D останавливается за конечное число шагов и выдает результат.*

Доказательство. Доказывать будем от противного.

На каждой итерации исходное ребро, обозначим его как $w = (v_1, v_2)$, делит дерево D на поддеревья D_1 и D_2, $weight(D_1) = x$, $weight(D_2) = N - x$ и $x \leqslant N - x \leqslant \frac{N}{2}$. Допустим алгоритм не останавливается, то есть не достигается условие останова: $weight(D_2) \leqslant$

$n \cdot weight(D_1)+1$. Или другими словами на каждой итерации алгоритма выполняется условие $weight(D_2) > n \cdot weight(D_1) + 1$. Но так как дерево D_2 состоит из t поддеревьев, то верно $\sum_{i=1}^{t} D'_i > n \cdot weight(D_1)$, $t \leqslant n$, что означает, что на каждой итерации существует поддерево D'_i такое, что $weight(D'_i) > weight(D_1)$. То есть вес меньшего поддерева D_1 увеличивается с каждой итерацией и на каком-то шаге превысит значение $\frac{N}{2}$, чего не может быть по условию.

Утверждение доказано.

Алгоритм укладки

Дано произвольное n-ичное дерево $D = (V, W)$, $|V| = N$.

1. Выделяем под укладку исходного дерева прямоугольник со сторонами $a \times b$, обладающий свойствами:

$$a \times b > N, \quad (a-2) \times (b-2) \leqslant N,$$
$$b \leqslant a, \quad a \leqslant C \cdot b,$$

где $C \geqslant 1$, $C \in \mathbb{R}$ — действительный параметр алгоритма укладки.

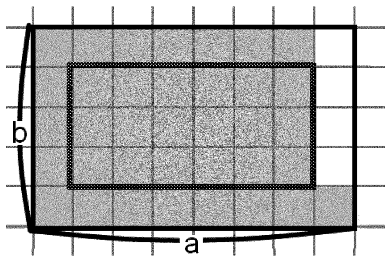

Рис. 5. Прямоугольник с активными вершинами.

2. Определяем активные ячейки выделенной площади. Под *активными*, понимаем ячейки прямоугольника, в которых будут содержаться вершины исходного дерева. Остальные ячейки — *свободные*. Получаем N активных ячеек и $a \cdot b - N$ свободных (рис. 5).

Прямоугольник $a \times b$, содержащий все активные ячейки, будем называть *основным*. Прямоугольник $(a-2) \times (b-2)$, отстоящий от основного на одну ячейку с каждой стороны, назовем *внутренним* и он не должен содержать ни одну свободную ячейку. То есть не может быть случая, как на (рис. 6).

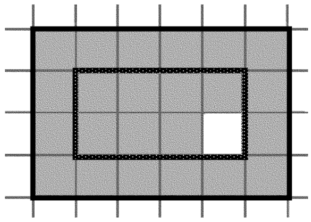

Рис. 6. Неправильное определение активных ячеек в выделенной площади.

3. Ставим в соответствие этому прямоугольнику с активными вершинами матрицу $M = (m_{i,j})$, размерности b на a (b — строк, a — столбцов (рис. 7)), в которой $m_{i,j} = 1$, если соответствующая ячейка (i, j) прямоугольника $a \times b$ активная, и $m_{i,j} = 0$, если ячейка (i, j) свободная.

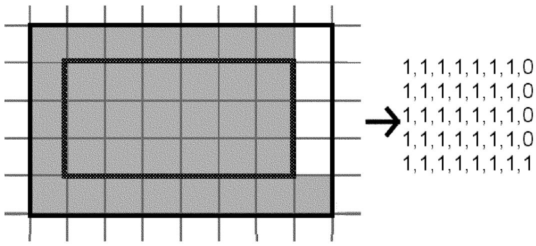

Рис. 7. Матрица, соответствующая прямоугольнику с активными вершинами.

Определение. $M = (m_{i,j})$, $i = \overline{1,b}$, $j = \overline{1,a}$ — матрица, соответствующая прямоугольнику с активными ячейками $a \times b$. Представим ее в виде вектора столбцов $M = (c_1, c_2, \ldots, c_a)$, где c_j — j-ый столбец матрицы M. Две матрицы M_1 и M_2 являются *разрезом* матрицы M, если они имеют вид: ∘ $M_1 = (c_1, \ldots, c_j, c'_{j+1}, \underbrace{\overline{0}, \ldots, \overline{0}}_{a-j-1})$ и

$M_2 = (\underbrace{\overline{0}, \ldots, \overline{0}}_{j}, c''_{j+1}, c_{j+2}, \ldots, c_a)$, где $\overline{0}$ — нулевой столбец матрицы, а $c'_{j+1} = (m_1, \ldots, m_i, \underbrace{0, \ldots, 0}_{b-i})^\top$ и $c''_{j+1} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i}, m_{i+1}, \ldots, m_b)^\top$, m_i — элементы $(j+1)$-го столбца матрицы M, $i = 0, 1, \ldots, b$. Если $i = 0$, то c'_{j+1}-ый столбец также является нулевым.

Образованные матрицы M_1 и M_2 однозначно определяют прямоугольники с активными вершинами $(j+1) \times b$ и $(a-j) \times b$.

Аналогично можно сделать разрез матрицы по строке. Для этого представим матрицу M в виде вектора-столбца строк $M = (s_1, s_2, \ldots, s_b)^\top$, где s_i — i-ая строка матрицы M. Две матрицы M_1 и M_2 являются *разрезом* матрицы M, если они имеют вид: $\circ$ $M_1 = (s_1, \ldots, s_i, s'_{i+1}, \underbrace{\overline{0}, \ldots, \overline{0}}_{b-i-1})^\top$ и $M_2 = (\underbrace{\overline{0}, \ldots, \overline{0}}_{i}, s''_{i+1}, s_{i+2}, \ldots, s_b)^\top$, где $\overline{0}$ — нулевая строка матрицы, а $s'_{i+1} = (m_1, \ldots, m_j, \underbrace{0, \ldots, 0}_{a-j})$ и $s''_{i+1} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i}, m_{j+1}, \ldots, m_a)$, m_j — элементы $(i+1)$-ой строки матрицы M, $j = 0, 1, \ldots, a$. Если $j = 0$, то s'_{i+1}-ая строка также является нулевой.

Образованные матрицы M_1 и M_2 однозначно определяют прямоугольники с активными вершинами $a \times (i+1)$ и $a \times (b-i)$.

А также матрицы M_1 и M_2 однозначно определяют расположение этих прямоугольников в прямоугольнике $a \times b$, при этом понятно, что иногда прямоугольники $a_1 \times b_1$ и $a_2 \times b_2$ могут пересекаться в прямоугольнике $a \times b$ (рис. 8).

4. Ищем центр тяжести дерева. Это ребро $w = (v_1, v_2)$, разбивающее исходное дерево на два поддерева D_1 и D_2, с множествами вершин $|V_1| = x$ и $|V_2| = N - x$.

5. Разрезаем матрицу $M = (m_{i,j})$.

Лемма 3. *$D = (V, W)$ — произвольное n-ичное дерево, $|V| = N$. $M = (m_{i,j})$ — матрица, соответствующая основному прямоугольнику с активными вершинами $a \times b$, в который укладывается дерево D. Фиксируем параметр $C > n + 1$. Прямоугольник $a \times b$ удовлетворяет условиям алгоритма, то есть $a \cdot b > N$, $(a-2) \cdot (b-2) \leqslant N$,*

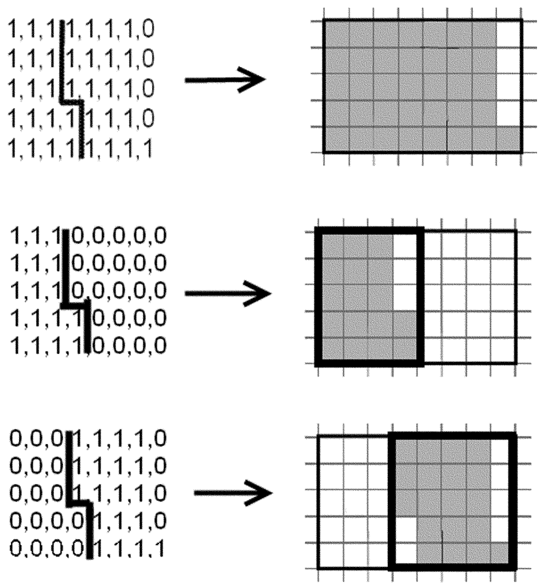

Рис. 8. Разрез матрицы по столбцам.

$b \leqslant a$, $a \leqslant C \cdot b$. Пусть центр тяжести этого дерева делит его на поддеревья $D_1 = (V_1, W_1)$ и $D_2 = (V_2, W_2)$, $|V_1| = x$, $|V_2| = N - x$. Если $b \geqslant 4 + \frac{12}{C-(n+1)}$, то существует такой разрез матрицы M, что прямоугольники $a_1 \times b_1$ и $a_2 \times b_2$, определяемые разрезом матрицы, являются прямоугольниками с активными вершинами, в которые укладываются поддеревья D_1 и D_2, удовлетворяют условиям алгоритма с тем же фиксированным параметром C, то есть

$$a_1 \times b_1 \geqslant x, \;\; (a_1 - 2) \times (b_1 - 2) < x;$$
$$a_2 \times b_2 \geqslant N - x, \;\; (a_2 - 2) \times (b_2 - 2) < N - x$$
$$b_1 \leqslant a_1, \;\; a_1 \leqslant C \cdot b_1; \quad b_2 \leqslant a_2, \;\; a_2 \leqslant C \cdot b_2,$$

и так же выполняется то, что основной прямоугольник содержит все активные ячейки, а внутренний прямоугольник не содержит ни одну свободную ячейку.

Доказательство. Пусть $x \leqslant N - x$. Матрице M соответствует прямоугольник с активными вершинами $a \times b$. Для определенности пусть $a \geqslant b$, тогда представим матрицу M в виде вектора столбцов $M = (c_1, c_2, \ldots, c_a)$. Если в первом столбце количество единичек больше, чем в последнем, то начинаем с первого столбца, иначе с последнего. Пусть в первом столбце количество единичек больше. Тогда выбираем такое максимальное j, что сумма единичек в столбцах $c_1, \ldots, c_j$ не больше x. Обозначим эту сумму как Σ.

Если $\Sigma = x$, то разрезом будут матрицы $M_1 = (c_1, \ldots, c_i, c'_{j+1}, \overline{0}, \ldots, \overline{0})$ и $M_2 = (\overline{0}, \ldots, \overline{0}, c''_{j+1}, \ldots, c_a)$, где $c'_{j+1} = \overline{0}$, а $c''_{j+1} = c_{j+1}$.

Если $\Sigma < x$, то выбираем из $(j+1)$-го столбца матрицы M подряд идущие элементы $m_1, \ldots, m_i$, где i — индекс $x - \Sigma$ единички. Тогда разрезом будут матрицы $M_1 = (c_1, \ldots, c_j, c'_{j+1}\overline{0}, \ldots, \overline{0})$ и $M_2 = (\overline{0}, \ldots, \overline{0}, c''_{j+1}, c_{j+2}, \ldots, c_a)$, а $c'_{j+1} = (m_1, \ldots, m_i, 0, 0)^\top$ и $c''_{j+1} = (0, \ldots, 0, m_{i+1}, \ldots, m_b)^\top$.

Этим матрицам соответствуют прямоугольники $b \times (j+1)$ и $b \times (a-j)$.

Очевидно, что $b \cdot (j+1) > x$ и $(b-2)(j-1) \leqslant x$, $b \cdot (a-j) > N - x$ и $(b-2)(a-j-2) \leqslant N - x$, выполняется в силу того, что мы так разрезали матрицу M. И так как для прямоугольника, соответствующего матрице M, выполнялось свойство основного и внутреннего прямоугольников, то для прямоугольников, соответствующих матрицам M_1 и M_2, это свойство тоже выполняется, то есть $(j+1) \times b$ — основной прямоугольник и он содержит все активные ячейки, в которые будут уложены вершины дерева D_1, и его внутренний прямоугольник не содержит ни одну свободную ячейку, а $b \times (a-j)$ — основной прямоугольник, содержащий все активные ячейки, в которые будут уложены вершины дерева D_2. Тогда остается проверить только отношение сторон прямоугольников.

$\circ$ $b \times (j+1)$ — прямоугольник с активными вершинами, соответствующий матрице M_1. Пусть $j+1 \leqslant b$, нужно доказать, что $b \leqslant C \cdot (j+1)$. Известно, что $b \cdot (j+1) > x \geqslant \frac{N-1}{n+1}$, тогда $j+1 > \frac{N-1}{(n+1)b} \geqslant \frac{(a-2)(b-2)-1}{(n+1)b} \geqslant \frac{(a-2)(b-2)-1}{(n+1)a} = \frac{b-2}{n+1} + \frac{-2b+3}{(n+1)a} \geqslant \frac{b-2}{n+1} + \frac{-2a+3}{(n+1)a} > \frac{b-2}{n+1} - \frac{2}{n+1} \geqslant \frac{b}{C}$, если $C \cdot b - 4C - (n+1)b \geqslant 0$, то есть при $b \geqslant \frac{4C}{C-(n+1)} = 4 + \frac{12}{C-(n+1)}$ соотношение сторон сохраняется. Получили, что $C \cdot (j+1) \geqslant b$.

Пусть $b \leqslant j+1$, то очевидно, что $j+1 \leqslant C \cdot b$, так как по условию $j+1 \leqslant a \leqslant Cb$.

$\circ\ b \times (a-j)$.

Пусть $a - j \leqslant b$, нужно доказать, что $b \leqslant C \cdot (a-j)$. Известно, что $b(a-j) \geqslant N - x \geqslant N - \frac{N}{2} = \frac{N}{2}$, так как $\frac{N-1}{n+1} \leqslant x \leqslant \frac{N}{2}$, тогда $a - j \geqslant \frac{N}{2b} \geqslant \frac{(a-2)(b-2)}{2b} \geqslant \frac{(a-2)(b-2)}{2a} = \frac{b-2}{2} - \frac{b-2}{a} \geqslant \frac{b-2}{2} - 1 \geqslant \frac{b}{C}$, если $b \cdot C - 4C - 2b \geqslant 0$, то есть при $b \geqslant \frac{4C}{C-2} = 4 + \frac{8}{C-2}$. Получили, что $b \leqslant C \cdot (a-j)$.

Пусть $a - j \geqslant b$, тогда очевидно, что $(a-j) \leqslant C \cdot b$, так как $a \leqslant C \cdot b$.

Тем самым лемма 3 доказана.

6. Для каждого поддерева повторим данную процедуру, начиная с пункта 4. Продолжаем до тех пор пока стороны прямоугольников удовлетворяют условиям леммы 3.

Лемма 4. *Вышеизложенный алгоритм $\mathcal{A}_C$ укладки произвольных n-ичных деревьев при фиксированном параметре C обеспечивает следующую оценку длины и площади укладки:*

$$L_{\mathcal{A}_C}(D) \leqslant c_1 \cdot N - c_2 \cdot \sqrt{N} \quad S_{\mathcal{A}_C}(D) \leqslant N + c_3\sqrt{N},$$

где N — количество вершин в дереве, $c_1 = (C+1)(4 + \frac{12}{C-(n+1)}) + c_2$, $c_2 = \frac{4C}{\sqrt{\frac{1}{n+2}} + \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} - 1}$, $c_3 = 3(C+1)$. При этом длина ребра w, являющегося центром тяжести дерева с N вершинами не превосходит

$$L_{\mathcal{A}_C}(w) \leqslant 4C\sqrt{N}.$$

Доказательство. При заданном параметре C базисными деревьями являются деревья, для которых выделенная под укладку площадь удовлетворяет всем условиям Леммы, кроме ограничения на длину стороны прямоугольника, то есть $b < 4 + \frac{12}{C-(n+1)}$. Пусть базисные деревья укладываются в прямоугольник с активными ячейками произвольным образом. Оценим длину ребра при такой укладке: $L_{\mathcal{A}_C}(w) \leqslant a + b < C(4 + \frac{12}{C-(n+1)}) + 4 + \frac{12}{C-(n+1)} = (C+1)(4 + \frac{12}{C-(n+1)})$. С учетом этого оценим длину укладки дерева: $L_{\mathcal{A}_C}(D) < (N_0 - 1) \times \times (C+1)(4 + \frac{12}{C-(n+1)}) < N_0(C+1)(4 + \frac{12}{C-(n+1)}) + c_2 \cdot N_0 - c_2 \cdot N_0 \leqslant N_0 \cdot ((C+1)(4 + \frac{12}{C-(n+1)}) + c_2) - c_2 \cdot N_0 \leqslant c_1 \cdot N_0 - c_2 \cdot \sqrt{N_0}$, где N_0 — количество вершин в базисном дереве.

Пусть утверждение теоремы верно для всех n-ичных деревьев с числом вершин меньшим N. Рассмотрим n-ичное дерево $D(V,W)$ с $|V| = N$. По определению алгоритма, это дерево укладывается в прямоугольник $a \times b$, где $a \times b \geqslant N$, $(a-2)\times(b-2) \leqslant N$, $a \geqslant b$, $a \leqslant C\cdot b$. Тогда, так как верно $N \geqslant (a-2)\times(b-2) \geqslant (b-2)^2$, то верно $b \leqslant \sqrt{N}+2$, $a \leqslant Cb \leqslant C(\sqrt{N}+2)$. Отсюда легко вывести, что

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{A}_C}(D) &= a\times b = a\times b - 2b - 2a + 4 + 2b + 2a - 4 \leqslant \\ &\leqslant N + 2b + 2a - 4 \leqslant N + 2(\sqrt{N}+2) + 2C(\sqrt{N}+2) - 4 \leqslant \\ &\leqslant N + 2(C+1)(\sqrt{N}+2) \leqslant N + 3(C+1)\sqrt{N} = N + c_3\sqrt{N}. \end{aligned}$$

Длина ребра w, являющегося центром тяжести дерева будет не больше чем полупериметр основного прямоугольника, то есть $L_{\mathcal{A}_C}(w) \leqslant a+b$.

$$\begin{cases} ab \leqslant N + c_3\sqrt{N} \\ a \leqslant C\cdot b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leqslant \frac{N+c_3\sqrt{N}}{b} \\ b \geqslant \frac{a}{C} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \leqslant \frac{N+c_3\sqrt{N}}{b} \leqslant \frac{N+c_3\sqrt{N}\cdot C}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \leqslant \sqrt{C(N+c_3\sqrt{N})} \Rightarrow b \leqslant a \leqslant \sqrt{C(N+c_3\sqrt{N})}.$$

Таким образом $L_{\mathcal{A}_C}(w) \leqslant a + b \leqslant 2\sqrt{C(N+c_3\sqrt{N})} < 2\sqrt{C(c_3+1)}\sqrt{N} < 2\sqrt{C(3C+4)}\sqrt{N} < 4C\sqrt{N}$.

Докажем оценку длины укладки. Центр тяжести дерева D делит его на поддеревья $D_1(V_1,W_1)$ и $D_2(V_2,W_2)$, где $|V_1| = x$, $|V_2| = N-x$ и $\frac{N-1}{n+1} \leqslant x \leqslant \frac{nN+1}{n+1}$. Функцию длины укладки можно ограничить функцией $L(N)$, зависящей только от веса дерева, тогда

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{A}_C}(D) \leqslant L(N) &\leqslant L_{\mathcal{A}_C}(w) + \max_{\frac{N-1}{n+1}\leqslant x\leqslant\frac{nN+1}{n+1}} (L(x) + L(N-x)) \leqslant \\ &\leqslant L_{\mathcal{A}_C}(w) + \max_{\frac{N}{n+2}\leqslant x\leqslant\frac{(n+1)N}{n+2}} (L(x) + L(N-x)) \leqslant \end{aligned}$$

($L'(x) = c_1 - \frac{c_2}{2\sqrt{x}}$, $L''(x) = \frac{c_2}{4\sqrt{x^3}} > 0$, значит функция $L(x)$ выпукла вниз и достигает своего максимума в точке $\frac{N}{n+2}$.)

$$\leqslant L_{\mathcal{A}_C}(w) + L(\frac{N}{n+2}) + L(\frac{(n+1)N}{n+2}) \leqslant$$

$$\leqslant 4C\sqrt{N} + c_1\frac{N}{n+2} - c_2\sqrt{\frac{N}{n+2}} + c_1\frac{(n+1)N}{n+2} - c_2\sqrt{\frac{(n+1)N}{n+2}} \leqslant$$

$$\leqslant 4C\sqrt{N} + c_1 \cdot N - c_2\sqrt{\frac{N}{n+2}} - c_2\sqrt{\frac{(n+1)N}{n+2}} =$$

$$= c_1 \cdot N + 4C\sqrt{N} - c_2(\sqrt{\frac{1}{n+2}} + \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}))\sqrt{N} \leqslant c_1 \cdot N - c_2\sqrt{N},$$

так как по условию $c_2 = \frac{4C}{\sqrt{\frac{1}{n+2}}+\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}-1}$ или иначе $4C - c_2(\sqrt{\frac{1}{n+2}} + \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}) = -c_2$.

Тем самым лемма 4 доказана.

Из леммы 4, применяя те же рассуждения о мощностных оценках, что и для теоремы 1, получаем утверждение теоремы 3.

Список литературы

[1] Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.

[2] Яблонский С. Основные понятия кибернетики // Проблемы кибернетики. Вып. 2. 1959. С. 7–38.

[3] Shennon C. The syntesis of two-terminal switching circuits // Bell Syst. Techn. J. 1949. Vol. 28. No. 1. P. 59–98.

[4] Lee C. Representation of Switching Circuits by Binary-Decision Programs // Bell Systems Technical Journal. 1959. July. Vol. 38. P. 985–999.

[5] Ложкин С. А., Ли Да Мин. О некоторых оптимальных вложениях двоичных и троичных деревьев в плоские прямоугольные решетки // Вестник московского университета. Сер. 15. М., 1995.

[6] Альбрехт А. О. О схемах из клеточных элементов // Проблемы кибернетики. 1975. Вып. 33. С. 209–214.

[7] Шкаликова Н. А. О реализации булевых функций схемами из клеточных элементов // Математические вопросы кибернетики. 1989. Вып. 2. С. 177–197.

[8] Седелев О. Б. О реализации функций алгебры логики схемами из некоторых классов, вложенными в гиперкубы / дисс. на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук. М., 2008.

[9] Деза М., Штогрин М. Изометрические вложения полуправильных многогранников, разбиений и им дуальных в гиперкубы и кубические решетки // УМН. 1996. Т. 51. № 6. С. 199–200.

[10] Никонов В. Г., Шевелев Д. С. Булевы графы и функции // Дискретная математика. 1991. Т. 3, вып. 4. С. 51–61.

[11] Fu W. S., Huang H. C., Sengupta A. On ring embedding in hypercubes with faulty nodes and links // Information Processing Letters. 1998. Vol. 68. P. 207–214.

[12] Тарков М. С. Вложение структур параллельных программ в структуры живучих распределенных вычислительных систем // Автометрия. 2003. Т. 39. № 3. С. 84–96.

[13] Chan M. Y. Embedding of grids into optimal hypercubes // SIAM J. Comput. 1991. Vol. 20. No. 5. P. 834–864.

[14] Bezrukov S. L. Embedding complete trees into the hypercube // Discrete Appl. Math. 2001. Vol. 110. No. 2–3. P. 101–119.

[15] Bezrukov S. L., Chavez J. D., Harper L. H. et al. The congestion of n-cube layout on a rectangular grid // DMATH: Discrete Mathematics. 2000. Vol. 213. P. 13–19.

[16] Bezrukov S. L., Chavez J. D., Harper L. H. et al. Embedding of hypercubes into grids // Lecture Notes in Computer Science. 1998. Vol. 1450.

[17] Деза М., Штогрин М. Вложение химических графов в гиперкубы. Матем. заметки. Т. 68. № 3. М., 2000. С. 339–355.