О переключательных алгоритмах преобразования некоторых классов графов

М. И. Лашева

В работе вводится понятие переключательного алгоритма для перехода от одного заданного графа к другому с сохранением степенной последовательности и класса графов. Свойства переключательных алгоритмов позволяют использовать их для оптимизации свойств компьютерных сетей с заданным множеством провайдеров и ограничениями на коммутационные возможности каждого из них. При этом необходимо знать лишь локальные свойства сети, а не глобальные ее характеристики.

Ключевые слова: степенная последовательность, конечный автомат, переключательный алгоритм, деревья, унициклы, связные графы.

1. Введение

Степенной последовательностью графа называется последовательность степеней всех его вершин, то есть конечная последовательность целых неотрицательных чисел, упорядоченная по не возрастанию, зная которую, можно восстанавливать некоторые структурные характеристики графа [7]. Исторически первыми возникают следующие две проблемы. Первая проблема — определить, является ли заданная конечная последовательность неотрицательных целых чисел графичной, то есть существует ли граф, иначе графическая реализация, с такой степенной последовательностью. Вторая проблема — определить (перечислить) все различные реализации данной графичной последовательности. Под графами при этом понимаются самые различные варианты неориентированных графов: без петель и с петлями, без кратных ребер и с кратными ребрами, — все они используются как математические конструкции, моделирующие схемы связей элементов реальных систем. А именно, в 1875 г. А. Кэли, изучая структурные изомеры насыщенных углеводородов, пришел к задаче перечисления деревьев, степени вершин которых равны 1 и 4 [3]. В 1951 г. Дж. Сениор для установления соотношения между различными графическими реализациями в работе [4] вводит и использует операцию переноса (передачи) ребер, сохраняющую степенную последовательность для неориентированных мультиграфов. Такой выбор типа изучаемых графов был обусловлен их приложениями в решении теоретических задач органической химии, так как многие свойства моделируемых систем — в данном случае органических молекул — часто объясняются структурными свойствами соответствующих графов.

Далее, в 1962 г. С. Хакими, изучая проблему нахождения всех возможных схем строения молекулы произвольного химического соединения, поставил задачу построения эффективного алгоритма для перебора всех мультиграфических реализаций заданной степенной последовательности (то есть допускающих существование кратных ребер) [5]. Этот перебор предполагалось осуществлять с помощью операции элементарного d-инвариантного преобразования — переключения ребер, сохраняющего степенную последовательность мультиграфов и не допускающего появления петель. При этом ранее, в 1955 г., В. Гавелом была предложена процедура перехода от одного заданного неориентированного графа без петель и кратных ребер к другому с сохранением степенной последовательности [6], в литературе известная как процедура Гавела-Хакими. Этот переход осуществлялся путем последовательного выполнения операций переключения [7], исключающих получение кратных ребер и петель в неориентированных графах. При этом процедура перехода существенно использует возможность нелинейного (по размеру задачи) расширения либо оперативной, либо внешней памяти.

Автором в [18] построен алгоритм, решающий для всех графов ту же задачу с фиксированной оперативной памятью, внешняя память которого растет линейно относительно размера задачи.

Далее, при решении проблемы перечисления всех различных реализаций заданной графической последовательности d возникает понятие графа реализаций, введенное в 1980 г. Р. Эгглтоном и Д. Холтоном в работе [10]. Граф реализаций $\mathfrak{R}(d)$ — неориентированный граф, имеющий своими вершинами различные отмеченные графические реализации, а ребро между двумя вершинами существует тогда и только тогда, когда существует операция переключения, переводящая одну вершину (то есть отмеченный граф) в другую. Из результатов, полученных В. Гавелом [6], вытекает связность графа реализаций. В приложениях теории графов, как правило, изучаются статистические характеристики множества всех графических реализаций заданной степенной последовательности [17].

Другими словами, граф реализаций описывает многообразие графических реализаций произвольной степенной последовательности, инструментом исследования которого является операция переключения. При изучении расположения графических реализаций внутри графа реализаций в зависимости от их свойств возникает задача определения переключательно полных свойств графов [11]. А именно, пусть P есть некоторое свойство графа. Обозначим $\mathfrak{R}(d, P)$ порожденный подграф [7] графа реализаций $\mathfrak{R}(d)$, образованный всеми вершинами со свойством P. Свойство P, для которого граф $\mathfrak{R}(d, P)$ связен, называется переключательно полным.

Приведем примеры некоторых переключательно полных свойств. В 1977 г. Ч. Колборн показал переключательную полноту свойства быть деревом [15]. В 1980 г. М. Сислоу — переключательную полноту свойства быть уницикличным графом [12]. В 1980 г. и в 1982 г. Р. Тэйлор — свойств связности и вершинной двусвязности графов, соответственно в [13] и [14]. В перечисленных работах доказательства переключательной полноты основаны на построении алгоритмов, осуществляющих переход с помощью операции переключения от произвольного графа с заданным свойством к любому другому графу с таким свойством, причем на каждом шаге перехода заданное свойство сохраняется.

В данной работе автором введено понятие переключательного алгоритма и построены переключательные алгоритмы для преобразования деревьев, унициклов, связных и двусвязных графов с помощью конечной последовательности операций переключения, сохраняющие степенную последовательность и заданный класс графов при каждом переключении.

Известно, что существуют свойства графов, не являющиеся переключательно полными. Например, 2-раскрашиваемость [15] и свойство иметь фиксированное число вершинной связности [13]. В данной работе автором также показано, что свойство планарности не является переключательно полным.

Переключательные алгоритмы могут быть использованы для оптимизации свойств компьютерных сетей с заданным множеством провайдеров и ограничениями на коммутационные возможности каждого из них. При этом использование переключательных алгоритмов, в отличие от алгоритмов, приведенных в работах [15, 12, 13, 14] не потребует изучения глобальных характеристик всей сети, а лишь знания ее локальных свойств.

2. Понятие переключательно полного свойства графов. Примеры переключательно полных свойств

2.1. Основные понятия

Определение 1. ([2]) Графом $G = (V, E)$ называется объект, состоящий из двух конечных множеств: V — называемого множеством вершин, и множества $E \subseteq \{\, \{u, v\} : u \in V, v \in V, u \neq v \,\}$, называемого множеством ребер.

Определение 2. ([2]) Граф $G' = (V', E')$ называется подграфом $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V, E' \subseteq E$.

Определение 3. ([7]) Мультиграфом $G^* = (V^*, E^*)$ называется объект, состоящий из конечного множества вершин V^* и E^* — неупорядоченного набора ребер $\{\{u, v\} : u \in V, v \in V, u \neq v\}$.

Определение 4. ([2]) Граф $G^{*'} = (V^{*'}, E^{*'})$ называется подграфом мультиграфа $G^* = (V^*, E^*)$, если $V^{*'} \subseteq V^*, E^{*'} \subseteq E^*$.

Определение 5. ([2]) Два ребра мультиграфа называются кратными, если они инцидентны одной и той же паре вершин.

Определение 6. ([2]) Степенью вершины v некоторого графа (мультиграфа) называется число ребер, инцидентных ей.

Количество вершин множества V будем, как принято, обозначать $|V|$.

Определение 7. ([7]) Степенной последовательностью $d(G)$ графа (мультиграфа) $G = (V, E)$, назовем набор степеней всех вершин графа (мультиграфа) $G = (V, E)$, упорядоченный по невозрастанию.

Пусть $d(n)$ — последовательность целых неотрицательных чисел длины n.

Определение 8. ([7]) Граф G, для которого $d(G) = d(n)$, будем называть графической реализацией этой степенной последовательности.

Определение 9. ([7]) Последовательность $d(n)$ называется графичной, если у неё существует хотя бы одна графическая реализация.

Пусть даны два графа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$, причем $|V_1| = |V_2|$, $|E_1| = |E_2|$. Пусть существует взаимно однозначное отображение $f : V_1 \leftrightarrow V_2$ такое, что для любых двух вершин $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_1$ выполняется условие: $\{v_1, v_2\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(v_1), f(v_2)\} \in E_2$. Такое отображение называется изоморфизмом графов [2] G_1 и G_2. Если для графов G_1 и G_2 существует изоморфизм f, то G_1 и G_2 называются изоморфными (обозначение $G_1 \cong G_2$).

Пусть $d(n)$ — графичная последовательность. Через $\widetilde{M}(d(n))$ обозначим множество всех графов со степенной последовательностью $d(n)$. Положим $M(d(n)) = \{G :$ граф G получен нумерацией вершин некоторого графа из $\widetilde{M}(d(n))$, последовательность степеней вершин которого, выписанная в порядке возрастания номеров, совпадает с $d(n)\}$.

Пусть $A(d(n)) \subseteq M(d(n))$.

Определим операцию

$$\begin{gathered}
\omega(A(d(n))) = \{G' |\ \exists\, G = (V, E) \in A(d(n)),\ \exists\, v_1, v_2, v_3, v_4 \in V, \\
\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\} \in E,\ \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\} \notin E, \\
G' = (V, (E \cup \{\, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\} \,\}) \setminus \{\, \{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\} \,\})\}.
\end{gathered}$$

Очевидно, что операцию ω имеет смысл определять при $n \geqslant 4$. Кроме этого, отметим, что $\omega(A(d(n)))$ является подмножеством $M(d(n))$, то есть операция ω не меняет степенную последовательность вершин.

В [7] рассматривается операция переключения ребер в графе. Будем говорить, что операция переключения ребер применима в графе G к паре ребер $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}$, или что ребра $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}$ переключаются на ребра $\{v_{i_1}, v_{j_1}\}, \{v_{i_2}, v_{j_2}\}$, если в графе G не существует ребер $\{v_{i_1}, v_{j_1}\}, \{v_{i_2}, v_{j_2}\}$. Таким образом, $\omega(A(d(n)))$ состоит из всех графов, которые могут быть получены из элементов множества $A(d(n))$ однократным применением операции переключения ребер.

Рассмотрим неориентированный граф $G = (V, E), |V| = n$, со степенной последовательностью $d(n)$. Занумеруем некоторым образом все его вершины и получим занумерованный граф, например G_1. Рассмотрим множество всех занумерованных графов $\{G_1, \ldots, G_m\}$, имеющих одинаковую степенную последовательность $d(n)$.

Определение 10. ([10]) Графом реализаций для данной графичной последовательности $d(n)$ называется неориентированный граф $\mathfrak{R}(d(n)) = (V_R, E_R)$, такой что $V_R = \{G_1, \ldots, G_m\}$, и $\{G_i, G_j\} \in E_R$ тогда и только тогда, когда в графе G_i существует пара ребер, к которым применима операция переключения ребер, и в результате её применения получается граф G_j.

Рассмотрим вопрос о взаимном расположении вершин графа реализаций, обладающих некоторым заданным графовым свойством.

Пусть P — свойство графа G. Например, свойство «быть деревом» или свойство связности. Обозначим $\mathfrak{R}(d(n), P)$ индуцированный подграф [7] графа $\mathfrak{R}(d(n))$, образованный всеми вершинами со свойством P.

Определение 11. ([15]) Свойство P, для которого граф $\mathfrak{R}(d(n), P)$ связен, называется переключательно полным.

2.2. Переключательная полнота свойства «быть деревом»

Определение 12. ([2]) Дерево $T = (V, E)$ — это связный неориентированный граф без циклов.

Пусть $d(n)$ — некоторая графичная последовательность. Через $\mathfrak{T}(d(n))$ обозначим множество всех деревьев с занумерованными вершинами со степенной последовательностью $d(n)$, такое что $\mathfrak{T}(d(n)) \subseteq M(d(n))$.

Рассмотрим некоторое подмножество $\mathbf{T}(d(n))$ множества деревьев $\mathfrak{T}(d(n))$. Определим операцию

$$\omega^*(\mathbf{T}(d(n))) = \{T' \in \mathfrak{T}(d(n))|\ \exists\, T = (V, E) \in \mathbf{T}(d(n)),$$
$$\exists\, v_1, v_2, v_3, v_4 \in V,\ \ \{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\} \in E,\ \ \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\} \notin E,$$
$$T' = (V, (E \cup \{\,\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}\,\}) \setminus \{\,\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}\,\})\}.$$

Очевидно, что операцию ω^* имеет смысл определять при $n \geqslant 4$. Кроме того, отметим, что $\omega^*(\mathbf{T}(d(n)))$ является подмножеством $\mathfrak{T}(d(n))$, то есть операция ω^* не меняет степенную последовательность вершин и не выводит из класса деревьев.

В [15] рассматривается операция ограниченного переключения в дереве. Будем говорить, что операция ограниченного переключения применима в дереве $T = (V, E)$ к некоторой паре ребер $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}$, если в дереве T не существует ребер $\{v_{i_1}, v_{j_1}\}, \{v_{i_2}, v_{j_2}\}$, и граф

$$T' = (V, (E \cup \{\,\{v_{i_1}, v_{j_1}\}, \{v_{i_2}, v_{j_2}\}\,\}) \setminus \{\,\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}\,\})$$

является деревом, или если в дереве T не существует ребер $\{v_{i_1}, v_{j_2}\}, \{v_{i_2}, v_{j_1}\}$, и граф

$$T' = (V, (E \cup \{\,\{v_{i_1}, v_{j_2}\}, \{v_{i_2}, v_{j_1}\}\,\}) \setminus \{\,\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}\,\})$$

является деревом. Если операция ограниченного переключения применима к паре ребер $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}$, то будем также говорить, в первом случае, что ребра $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}$ переключаются на ребра $\{v_{i_1}, v_{j_1}\}, \{v_{i_2}, v_{j_2}\}$, или, во втором случае, на ребра $\{v_{i_1}, v_{j_2}\}, \{v_{i_2}, v_{j_1}\}$.

Будем рассматривать множества деревьев с количеством вершин, не меньшим 4.

Обозначим $T^{(2)}$ множество пар деревьев $\{T_1, T_2\}$ с занумерованными вершинами, таких что $d(T_1) = d(T_2)$.

Рассмотрим произвольную пару деревьев $\{T_1, T_2\} \in T^{(2)}$,

$$T_1 = (V_1, E_1), T_2 = (V_2, E_2), |V_1| = |V_2| = n.$$

Известна следующая теорема [15].

Теорема 1. *Существуют целые неотрицательные числа N_1 и N_2, и найдутся деревья T_1' и T_2', такие что*

$$T_i' \in (\omega^*)^{N_i}(\{T_i\}) = \underbrace{\omega^*(\omega^*(\ldots\omega^*}_{N_i}(\{T_i\}))),\ i = 1, 2,$$

и

$$T_1' \cong T_2'$$

(считаем по определению $(\omega^*)^0(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{T}$ для произвольного множества $\boldsymbol{T}$).

2.3. Пример графового свойства, не являющегося переключательно полным

Определение 13. ([7]) Плоский граф — это граф, вершины которого являются точками плоскости, а ребра — непрерывными плоскими линиями без самопересечений, соединяющими соответствующие вершины так, что никакие два ребра не имеют общих точек, кроме инцидентной им обоим вершины.

Определение 14. ([7]) Планарным графом будем называть любой граф, изоморфный плоскому графу.

Определение 15. ([7]) Треугольником назовем грань плоского графа, ограниченную циклом длины 3.

Определение 16. ([7]) Плоская триангуляция — это связный плоский граф, каждая грань которого, в том числе и внешняя, является треугольником.

Построим две неизоморфные плоские триангуляции со степенной последовательностью $d(10) = \{8, 6, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 3, 3\}$.

А именно, первая (рис. 1) — $\Delta = (V, E)$, где $V = \{v_1, \ldots, v_{10}\}$, вершины занумерованы в порядке невозрастания степеней, а ребра устроены следующим образом: v_1 смежна со всеми остальными вершинами, кроме v_2, v_2 смежна с $v_3, \ldots, v_8$, $(v_3, v_4, v_8, v_5, v_6, v_7)$ — цикл, v_9 смежна с v_3, v_4, а v_{10} смежна с v_5, v_6.

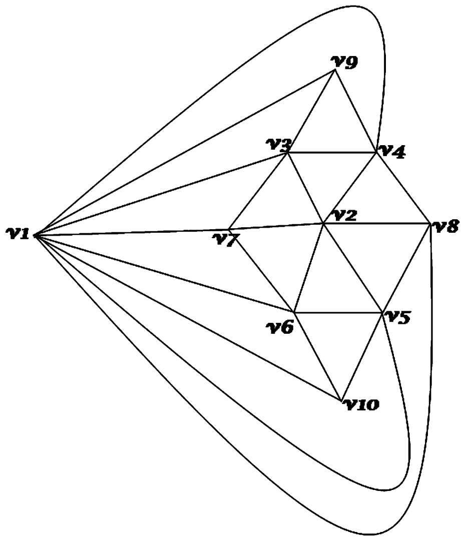

Рис. 1.

Вторая триангуляция (рис. 2) — $\Delta' = (V', E')$, где $V' = \{v'_1, \ldots, v'_{10}\}$, вершины занумерованы в порядке невозрастания степеней, а ребра устроены следующим образом: v'_1 смежна со всеми остальными вершинами, кроме v'_2, v'_2 смежна с $v'_3, \ldots, v'_8$, $(v'_3, v'_4, v'_5, v'_6, v'_7, v'_8)$ — цикл, v_9 смежна с v_3, v_4, а v_{10} смежна с v_5, v_6.

Заметим, что в Δ длина кратчайшей цепи, соединяющей вершины v_9 и v_{10} (единственные вершины в графе степени 3) и не проходящей через v_1, равна 4, в то время как в Δ' длина такой кратчайшей цепи равна 3. Отсюда следует

Лемма 1. *Плоские триангуляции Δ и Δ' не являются изоморфными.*

Из определения операции ω и триангуляций Δ и Δ' следуют

Теорема 2. *Множества $\omega(\{\Delta\})$ и $\omega(\{\Delta'\})$ не содержат планарных графов.*

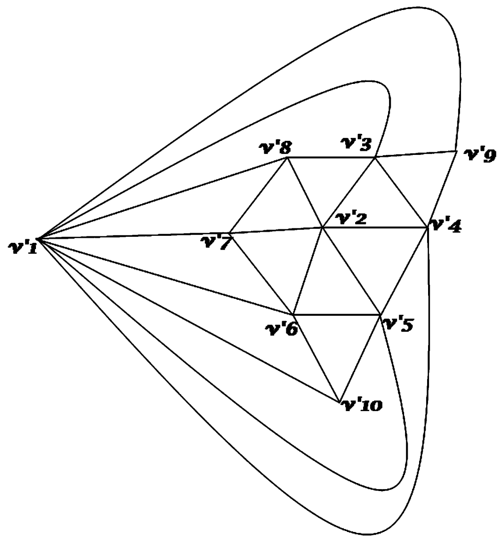

Рис. 2.

Лемма 2. *В графе реализаций $R(d(10))$ не существует пути между Δ и Δ', проходящего только через вершины, соответствующие планарным графам.*

Теорема 3. *Планарность не является переключательно полным свойством.*

3. Построение переключательного алгоритма преобразования деревьев с сохранением степенной последовательности

3.1. Понятие переключательного алгоритма

Зафиксируем натуральное число P и рассмотрим множество пятерок

$$L(P) = \{\{c_1, c_2, I_1, I_2, I\},\ c_1 \in \{0, \ldots, P\}, c_2 \in \{0, \ldots, P\},$$
$$I_1 \in \{0, 1\}, I_2 \in \{0, 1\}, I \in \{0, 1, 2\}\}.$$

Будем рассматривать двумерные матрицы $M = (m_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, каждый элемент m_{ij} которой является элементом конечного множества $L(P)$.

Определение 17. T-автомат — это конечный автомат [1], который применяется к матрице M в следующем смысле. В момент времени t автомат находится в некотором состоянии q_t. На вход автомата поступает некоторый элемент $m_{ij} \in M$. Выходом является элемент из $L(P)$. Он записывается в эту клетку; автомат перемещается в одну из клеток с координатами $(i-1, j), (i, j-1), (i+1, j), (i, j+1)$ (при условии, что такая клетка существует) или остается на месте в клетке с координатами (i, j), а также переходит в некоторое состояние q_{t+1}. В начальном состоянии q_0 автомат находится в клетке с координатами $(1, 1)$, и на вход автомату поступает элемент m_{11}. Работа автомата заканчивается, если он переходит в заключительное состояние q'.

Определение 18. Переключательный алгоритм — это пара (A, M), где A — это T-автомат, который применяется к матрице M, $m_{ij} \in L(4), i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, n$.

3.2. Существование переключательного алгоритма преобразования деревьев. Постановка задачи

Рассмотрим вопрос о существовании переключательного алгоритма $\mathfrak{A}_{\mathfrak{T}}$, который по паре деревьев $(T_1, T_2) \in T^{(2)}$ строит пару (T'_1, T'_2) такую, что $T'_i \in (\omega^*)^{N_i}(\{T_i\}), i = 1, 2$, и $T'_1 \cong T'_2$.

Паре деревьев $(T_1, T_2) \in T^{(2)}, T_i = (V_i, E_i)$, $|V_i| = n$, $i = 1, 2$, взаимно однозначно сопоставим симметричную матрицу $M^{(0)} = (m_{ij}^{(0)})_{n \times n}$, $m_{ij}^{(0)} \in L(4)$ для любого $i, j = 1, \ldots, n$, следующим образом:

для $i \leqslant j$ положим $m_{ij}^{(0)} = \{c_1, c_2, I_1, I_2, I\}$, где:

1) $c_1 = c_2 = 0$,

2) $I_k = 1$, если ребро $\{v_i, v_j\} \in E_k$, иначе $I_k = 0$, $k = 1, 2$;

3) $I = 1$ — при $i = j$, $i \neq 1, i \neq n$, при $i = 1, 1 < j < n$, а также при $j = n$, $1 < i < n$;

$I = 2$ — при $i = j = 1$, $i = j = n$, $i = 1, j = n$;

$I = 0$ — иначе.

Так как деревья $T_1 = (V_1, E_1)$ и $T_2 = (V_2, E_2)$ имеют одинаковую степенную последовательность, то биекция $f : V_2 \to V_1$, сопоставляющая каждой вершине v_1 дерева $T_1 = (V_1, E_1)$ вершину v_2 дерева $T_2 = (V_2, E_2)$ с тем же номером, сохраняет степень вершины.

Определим мультиграф T_{12} следующим образом: $T_{12} = (V_1, E_{12})$, E_{12} — мультимножество, являющееся объединением мультимножеств E_1, E_2', где

$$E_2' = \left\{ \{f(v'), f(v'')\} | \{v', v''\} \in E_2 \right\}.$$

Определим в мультиграфе T_{12} подграфы $T^1 = (V_1, E_1)$, $T^2 = (V_1, E_2')$. Заметим, что подграф T^1 и дерево T_1 (подграф T^2 и дерево T_2) изоморфны. Таким образом, степень любой вершины мультиграфа T_{12} является удвоенной степенью вершины с тем же номером дерева T_1.

Итак, матрица $M^{(0)} = (m_{ij}^{(0)})_{n\times n}$, $m_{ij}^{(0)} \in L(4)$ для любого $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, определяет мультиграф T_{12}.

Выделим следующие свойства мультиграфа T_{12}.

Свойство 1. Для любой вершины мультиграфа T_{12} количество ребер, инцидентных ей и принадлежащих множеству E_1, равно количеству ребер, инцидентных ей и принадлежащих множеству E_2'.

Свойство 2. Мультиграф T_{12} может иметь кратные ребра (кратности не выше 2), причем, если e_1, e_2 — кратные ребра T_{12}, то $e_1 \in E_1, e_2 \in E_2'$ или $e_1 \in E_2', e_2 \in E_1$.

Свойство 3. Каждый из подграфов T^1 и T^2 является деревом.

Пусть $d(n)$ — последовательность целых неотрицательных чисел, такая что существует мультиграф G_{12}, $d(G_{12}) = d(n)$ и G_{12} обладает свойствами 1, 2. Через $\widetilde{M_{12}}(d(n))$ обозначим множество всех мультиграфов со степенной последовательностью $d(n)$, обладающих свойствами 1, 2. Положим $M_{12}(d(n)) = \{G_{12}$: мультиграф G_{12} получен нумерацией вершин некоторого мультиграфа из $\widetilde{M_{12}}(d(n))$, последовательность степеней вершин которого, выписанная в порядке возрастания номеров, совпадает с $d(n)\}$.

Через $\mathfrak{T}_{12}(d(n))$ обозначим множество всех мультиграфов с занумерованными вершинами со степенной последовательностью $d(n)$, обладающих свойством 3, такое что $\mathfrak{T}_{12}(d(n)) \subseteq M_{12}(d(n))$.

Рассмотрим некоторое подмножество $\mathbf{T}_{12}(d(n))$ множества мультиграфов $\mathfrak{T}_{12}(d(n))$. Определим операцию

$$\begin{gathered}\omega^*(\mathbf{T}_{12}(d(n))) = \{T'_{12} \in \mathfrak{T}_{12}(d(n))|\ \exists\, T_{12} = (V_{12}, E_{12}) \in \mathbf{T}_{12}(d(n)),\\ \exists\, v_1, v_2, v_3, v_4 \in V_{12},\\ \{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\} \in E_1,\ \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\} \notin E_1,\\ T'_{12} = (V_{12}, (E_1 \cup \{\, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}\,\}) \setminus \{\, \{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}\,\} \cup E'_2)\}\\ \bigcup\\ \{T'_{12} \in \mathfrak{T}_{12}(d_2(n))|\ \exists\, T_{12} = (V_{12}, E_{12}) \in \mathbf{T}_{12}(d_2(n)),\\ \exists\, v_1, v_2, v_3, v_4 \in V_{12},\\ \{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\} \in E'_2,\ \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\} \notin E'_2\\ T'_{12} = (V_{12}, (E'_2 \cup \{\, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}\,\}) \setminus \{\, \{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}\,\} \cup E_1)\}.\end{gathered}$$

Будем говорить, что операция ограниченного переключения эффективно применима в мультиграфе T_{12} к некоторой паре ребер $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}$, если выполнено либо условие i, либо условие ii:

i) операция применима в подграфе T^1, и полученный в результате подграф имеет свойства 1, 2, 3, а также увеличивается количество пар кратных ребер в мультиграфе T_{12},

ii) операция применима в подграфе T^2, и полученный в результате подграф имеет свойства 1, 2, 3, а также увеличивается количество пар кратных ребер в мультиграфе T_{12}.

Лемма 3. *В любом дереве $T = (V, E)$, $|V| \geqslant 4$, к любой паре не смежных ребер $\{v_{k_1}, v_{k_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}$ применима операция ограниченного переключения.*

При этом четверке вершин $(v_{k_1}, v_{k_2}, v_{j_1}, v_{j_2})$ сопоставляется нумерация $(v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}, v_{i_4})$, такая что ребра $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{i_3}, v_{i_4}\}$ переключаются на ребра $\{v_{i_1}, v_{i_3}\}, \{v_{i_2}, v_{i_4}\}$. Нумерация сопоставляется таким образом, чтобы было выполнено условие i или условие ii:

i) существует путь в дереве $T = (V, E)$, проходящий через вершины v_{i_2}, v_{i_3} и не проходящий через вершины v_{i_1}, v_{i_4};

ii) существует путь в дереве $T = (V, E)$, проходящий через вершины v_{i_1}, v_{i_4} и не проходящий через вершины v_{i_2}, v_{i_3}.

Доказательство. Пусть выполнено условие i. Поскольку T — дерево, не существует ребер $\{v_{i_1}, v_{i_3}\}, \{v_{i_2}, v_{i_4}\}$. Покажем, что граф

$$T' = (V, (E \cup \{\{v_{i_1}, v_{i_3}\}, \{v_{i_2}, v_{i_4}\}\}) \setminus \{\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{i_3}, v_{i_4}\}\})$$

является деревом.

1. Пусть существует цикл C' в графе T':

если цикл C' содержит ребро $\{v_{i_1}, v_{i_3}\}$, то в T существовал цикл C, содержащий ребро $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}$, так как в T' существует путь между вершинами $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}$, (аналогичные рассуждения для случая, когда цикл C' содержит ребро $\{v_{i_2}, v_{i_4}\}$),

если цикл C' не содержит ни одного из ребер $\{v_{i_1}, v_{i_3}\}, \{v_{i_2}, v_{i_4}\}$, то этот цикл существовал в дереве T.

Следовательно, граф T' не содержит циклов.

2. Граф T' связен, так как в T' существует путь, соединяющий вершины v_{i_1} и v_{i_2}, v_{i_3} и v_{i_4}.

Следовательно, можно переключить ребра $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{i_3}, v_{i_4}\}$ на $\{v_{i_1}, v_{i_3}\}, \{v_{i_2}, v_{i_4}\}$.

Аналогично лемма доказывается для условия ii.

Далее построим переключательный алгоритм $\mathfrak{A}$, который матрицу $M^{(0)}$, определяющую мультиграф T_{12}, перерабатывает в матрицу $M^{(N)}$, определяющую мультиграф T'_{12}. При этом по T'_{12} взаимно однозначно восстанавливается пара (T'_1, T'_2), такая что $T'_i \cong T'^i, i = 1, 2$, и $T'^i \in (\omega^*)^{N_i}(\{T^i\}), i = 1, 2$.

3.3. Построение переключательного алгоритма преобразования деревьев с сохранением степенной последовательности

Докажем следующую лемму.

Лемма 4. *Существует алгоритм, который, начиная работу с некоторого произвольного не кратного ребра мультиграфа $T_{12} = (V_1, E_{12})$, удовлетворяющего свойствам 1, 2, 3, находит пару ребер, к которым эффективно применима операция ограниченного переключения.*

Доказательство. Шаг 1. Рассмотрим произвольное ребро $\{v_{j_1}, v_{j_2}\} \in E_1$ (без ограничения общности), не являющееся кратным. По свойству 1 существует не кратное ребро $\{v_{j_2}, v_{j_3}\} \in E_2'$.

1) Пусть существует не кратное ребро $\{v_{j_1}, v_{j_3}\} \in E_2'$, тогда по свойству 1 существует не кратное ребро $\{v_{j_3}, v_{j_4}\} \in E_1,\ j_4 \neq j_1$. Переход к шагу 2.

2) Пусть существует не кратное ребро $\{v_{j_1}, v_{j_3}\} \in E_1$, тогда поменяем местами в цепочке $v_{j_1}, v_{j_2}, v_{j_3}$ первую и третью вершины и с точностью до переименования этих вершин и замены подмножества E_1 на E_2' и E_2' на E_1 повторим рассуждения предыдущего пункта.

3) В остальных случаях — $\{v_{j_1}, v_{j_3}\} \in E_1,\ \{v_{j_1}, v_{j_3}\} \in E_2'$ или $\{v_{j_1}, v_{j_3}\} \notin E_1,\ \{v_{j_1}, v_{j_3}\} \notin E_2'$ — по свойству 1 существует не кратное ребро $\{v_{j_3}, v_{j_4}\} \in E_1,\ j_4 \neq j_1$. Переход к шагу 2.

Шаг 2. По свойству 2 возможны следующие случаи расположения ребер, инцидентных вершине v_{j_4} и какой-либо из вершин v_{j_1} или v_{j_2}.

1) Если не существует ребер, инцидентных вершине v_{j_4} и какой-либо из вершин v_{j_1} или v_{j_2}, то по свойству 3 и по лемме 3 операция ограниченного переключения применима к паре ребер $\{v_{j_1}, v_{j_2}\} \in E_1,\ \{v_{j_3}, v_{j_4}\} \in E_1$, при этом либо получаем пару кратных ребер $\{v_{j_2}, v_{j_3}\}$, либо, не применяя операцию, по свойству 1 существует ребро $\{v_{j_4}, v_{j_5}\} \in E_2'$, $j_5 \neq j_1, j_2$. Переход к шагу 3.

2) Если существует только не кратное ребро $\{v_{j_1}, v_{j_4}\} \in E_1$, то по свойству 3 и по лемме 3 операция ограниченного переключения применима к паре ребер $\{v_{j_1}, v_{j_2}\} \in E_1, \{v_{j_3}, v_{j_4}\} \in E_1$, при этом либо получаем некоторую пару кратных ребер, либо, не применяя операцию, по свойству 1 существует ребро $\{v_{j_4}, v_{j_5}\} \in E_2',\ j_5 \neq j_1, j_2$. Переход к шагу 3.

3) Если существует только не кратное ребро $\{v_{j_2}, v_{j_4}\} \in E_1$, то по свойству 3 и по лемме 3 операция ограниченного переключения применима к паре ребер $\{v_{j_1}, v_{j_2}\} \in E_1, \{v_{j_3}, v_{j_4}\} \in E_1$, при этом получаем пару кратных ребер $\{v_{j_2}, v_{j_3}\}$.

Замечание. По свойству 3 не может существовать одновременно пары ребер $\{v_{j_1}, v_{j_4}\} \in E_1,\ \{v_{j_2}, v_{j_4}\} \in E_1$.

4) Существует только не кратное ребро $\{v_{j_1}, v_{j_4}\} \in E_2'$, тогда по свойству 3 и по лемме 3 операция ограниченного переключения эффективно применима в двух случаях:

либо к паре ребер $\{v_{j_1}, v_{j_4}\} \in E_2', \{v_{j_2}, v_{j_3}\} \in E_2'$, при этом получаем две пары кратных ребер $\{v_{j_1}, v_{j_2}\}$ и $\{v_{j_3}, v_{j_4}\}$;

либо к паре ребер $\{v_{j_1}, v_{j_2}\} \in E_1, \{v_{j_3}, v_{j_4}\} \in E_1$, при этом получаем пару кратных ребер $\{v_{j_2}, v_{j_3}\}$;

либо, последовательно применив операцию ω^* к паре ребер $\{v_{j_1}, v_{j_4}\} \in E_2'$, $\{v_{j_2}, v_{j_3}\} \in E_2'$, затем к паре ребер $\{v_{j_1}, v_{j_2}\} \in E_1$, $\{v_{j_3}, v_{j_4}\} \in E_1$, получаем две пары кратных ребер $\{v_{j_1}, v_{j_3}\}$ и $\{v_{j_2}, v_{j_4}\}$.

5) Существует только не кратное ребро $\{v_{j_2}, v_{j_4}\} \in E_2'$, тогда по свойству 3 и по лемме 3 операция ограниченного переключения эффективно применима к паре ребер $\{v_{j_1}, v_{j_2}\} \in E_1, \{v_{j_3}, v_{j_4}\} \in E_1$, при этом получаем пару кратных ребер $\{v_{j_2}, v_{j_3}\}$ либо $\{v_{j_2}, v_{j_4}\}$.

6) Существуют не кратное ребро $\{v_{j_1}, v_{j_4}\} \in E_1$ и $\{v_{j_2}, v_{j_4}\} \in E_2'$, тогда по свойству 3 и по лемме 3 операция ограниченного переключения эффективно применима к паре ребер $\{v_{j_1}, v_{j_2}\} \in E_1, \{v_{j_3}, v_{j_4}\} \in E_1$, при этом получаем пару кратных ребер $\{v_{j_2}, v_{j_4}\}$.

7) Существуют не кратное ребро $\{v_{j_2}, v_{j_4}\} \in E_1$ и $\{v_{j_1}, v_{j_4}\} \in E_2'$, тогда по свойству 3 и по лемме 3 операция ограниченного переключения эффективно применима к паре ребер $\{v_{j_1}, v_{j_2}\} \in E_1, \{v_{j_3}, v_{j_4}\} \in E_1$, при этом получаем две пары кратных ребер $\{v_{j_2}, v_{j_3}\}$ и $\{v_{j_1}, v_{j_4}\}$.

8) Существуют не кратные ребра $\{v_{j_1}, v_{j_4}\} \in E_2'$, $\{v_{j_2}, v_{j_4}\} \in E_2'$, тогда по свойству 3 и по лемме 3 операция ограниченного переключения эффективно применима к паре ребер $\{v_{j_1}, v_{j_4}\} \in E_2', \{v_{j_2}, v_{j_3}\} \in E_2'$, при этом получаем две пары кратных ребер $\{v_{j_1}, v_{j_2}\}$ и $\{v_{j_3}, v_{j_4}\}$.

9) Существуют пара кратных ребер $\{v_{j_1}, v_{j_4}\}$ и не кратное ребро $\{v_{j_2}, v_{j_4}\} \in E_2'$, тогда по свойству 3 и по лемме 3 операция ограниченного переключения эффективно применима к паре ребер $\{v_{j_1}, v_{j_2}\} \in E_1, \{v_{j_3}, v_{j_4}\} \in E_1$, при этом получаем пару кратных ребер $\{v_{j_2}, v_{j_4}\}$.

10) Существуют пара кратных ребер $\{v_{j_2}, v_{j_4}\}$ и не кратное ребро $\{v_{j_1}, v_{j_4}\} \in E_2'$, тогда по свойству 3 и по лемме 3 операция ограниченного переключения эффективно применима к паре ребер $\{v_{j_1}, v_{j_2}\} \in E_1, \{v_{j_3}, v_{j_4}\} \in E_1$, при этом получаем пару кратных ребер $\{v_{j_1}, v_{j_4}\}$.

Шаг $k-1$.

На предыдущем шаге получили очередное ребро искомой цепочки $\{v_{j_k}, v_{j_{k+1}}\} \in E_1$ или $\{v_{j_k}, v_{j_{k+1}}\} \in E_2'$.

Рассмотрим случай, когда $\{v_{j_k}, v_{j_{k+1}}\} \in E_2'$.

Для каждого $l = 1, \ldots, (k-2)/2$ по свойству 2 возможны следующие случаи расположения ребер, инцидентных вершине $v_{j_{k+1}}$ и какой-либо из вершин $v_{j_1}, v_{j_{k-2l}}$ или $v_{j_{k-2l+1}}$.

1) Если не существует ребер, инцидентных вершине $v_{j_1}, v_{j_{k-2l}}$ и какой-либо из вершин $v_{j_{k-2l}}$ или $v_{j_{k-2l+1}}$, то по свойству 3 и по лемме 3 операция ограниченного переключения применима к паре ребер $\{v_{j_{k-2l}}, v_{j_{k-2l+1}}\} \in E_2', \{v_{j_k}, v_{j_{k+1}}\} \in E_2'$. Применяем же операцию только в том случае, когда она эффективно применима и, следовательно, получаем пару кратных ребер.

2) Если существует только не кратное ребро $\{v_{j_{k-2l}}, v_{j_{k+1}}\} \in E_2'$, то по свойству 3 и по лемме 3 операция ограниченного переключения применима к паре ребер $\{v_{j_{k-2l}}, v_{j_{k-2l+1}}\} \in E_2', \{v_{j_k}, v_{j_{k+1}}\} \in E_2'$. Применяем же операцию только в том случае, когда она эффективно применима и, следовательно, получаем пару кратных ребер.

3) Если существует только не кратное ребро $\{v_{j_{k-2l+1}}, v_{j_{k+1}}\} \in E_2'$, то по свойству 3 и по лемме 3 операция ограниченного переключения применима к паре ребер $\{v_{j_{k-2l}}, v_{j_{k-2l+1}}\} \in E_2', \{v_{j_k}, v_{j_{k+1}}\} \in E_2'$. Применяем же операцию только в том случае, когда она эффективно применима и, следовательно, получаем пару кратных ребер.

Замечание. По свойству 3 не может существовать одновременно пары ребер $\{v_{j_{k-2l}}, v_{j_{k+1}}\} \in E_2'$, $\{v_{j_{k-2l+1}}, v_{j_{k+1}}\} \in E_2'$.

4) Существует только не кратное ребро $\{v_{j_{k-2l}}, v_{j_{k+1}}\} \in E_1$, тогда по свойству 3 и по лемме 3 операция ограниченного переключения эффективно применима в двух случаях:

либо к паре ребер $\{v_{j_{k-2l}}, v_{j_{k+1}}\} \in E_1, \{v_{j_{k-1}}, v_{j_k}\} \in E_1$, при этом получаем пару кратных ребер $\{v_{j_k}, v_{j_{k+1}}\}$;

либо к паре ребер $\{v_{j_{k-2l}}, v_{j_{k-2l+1}}\} \in E_2', \{v_{j_k}, v_{j_{k+1}}\} \in E_2'$, при этом получаем пару кратных ребер $\{v_{j_{k-2l}}, v_{j_{k+1}}\}$; —

либо, последовательно применив операцию ограниченного переключения к паре ребер $\{v_{j_{k-2l}}, v_{j_{k+1}}\} \in E_1, \{v_{j_{k-1}}, v_{j_k}\} \in E_1$, затем к паре ребер $\{v_{j_{k-2l}}, v_{j_{k-2l+1}}\} \in E_2', \{v_{j_k}, v_{j_{k+1}}\} \in E_2'$, получаем пару кратных ребер $\{v_{j_{k-2l}}, v_{j_k}\}$.

5) Существует только не кратное ребро $\{v_{j_{k-2l+1}}, v_{j_{k+1}}\} \in E_1$, тогда по свойству 3 и по лемме 3 операция ограниченного переключения эффективно применима в двух случаях:

либо к паре ребер $\{v_{j_{k-2l+1}}, v_{j_{k+1}}\} \in E_1, \{v_{j_{k-1}}, v_{j_k}\} \in E_1$, при этом получаем пару кратных ребер $\{v_{j_k}, v_{j_{k+1}}\}$;

либо к паре ребер $\{v_{j_{k-2l}}, v_{j_{k-2l+1}}\} \in E_2', \{v_{j_k}, v_{j_{k+1}}\} \in E_2'$, при этом получаем пару кратных ребер $\{v_{j_{k-2l+1}}, v_{j_{k+1}}\}$;

либо, последовательно применив операцию ограниченного переключения к паре ребер $\{v_{j_{k-2l+1}}, v_{j_{k+1}}\} \in E_1, \{v_{j_{k-1}}, v_{j_k}\} \in E_1$, затем к паре ребер $\{v_{j_{k-2l}}, v_{j_{k-2l+1}}\} \in E_2', \{v_{j_k}, v_{j_{k+1}}\} \in E_2'$, получаем пару кратных ребер $\{v_{j_{k-2l+1}}, v_{j_k}\}$.

6) Существуют не кратное ребро $\{v_{j_{k-2l}}, v_{j_{k+1}}\} \in E_2'$ и $\{v_{j_{k-2l+1}}, v_{j_{k+1}}\} \in E_1$, тогда по свойству 3 и по лемме 3 операция ограниченного переключения эффективно применима к паре ребер $\{v_{j_{k-2l}}, v_{j_{k-2l+1}}\} \in E_2', \{v_{j_k}, v_{j_{k+1}}\} \in E_2'$, при этом получаем пару кратных ребер $\{v_{j_{k-2l+1}}, v_{j_{k+1}}\}$.

7) Существуют не кратное ребро $\{v_{j_{k-2l}}, v_{j_{k+1}}\} \in E_1$ и $\{v_{j_{k-2l+1}}, v_{j_{k+1}}\} \in E_2'$, тогда по свойству 3 и по лемме 3 операция ограниченного переключения эффективно применима к паре ребер $\{v_{j_{k-2l}}, v_{j_{k-2l+1}}\} \in E_2', \{v_{j_k}, v_{j_{k+1}}\} \in E_2'$, при этом получаем пару кратных ребер $\{v_{j_{k-2l}}, v_{j_{k+1}}\}$.

8) Существуют не кратные ребра $\{v_{j_{k-2l}}, v_{j_{k+1}}\} \in E_1$, $\{v_{j_{k-2l+1}}, v_{j_{k+1}}\} \in E_1$, тогда по свойству 3 и по лемме 3 операция ограниченного переключения эффективно применима к паре ребер $\{v_{j_{k-2l}}, v_{j_{k+1}}\} \in E_1, \{v_{j_{k-2l+1}}, v_{j_{k-2l+2}}\} \in E_1$, при этом получаем пару кратных ребер $\{v_{j_{k-2l}}, v_{j_{k-2l+1}}\}$.

9) Существуют пара кратных ребер $\{v_{j_{k-2l}}, v_{j_{k+1}}\}$ и не кратное ребро $\{v_{j_{k-2l+1}}, v_{j_{k+1}}\} \in E_1$, тогда по свойству 3 и по лемме 3 операция ограниченного переключения эффективно применима к паре ребер $\{v_{j_{k-2l}}, v_{j_{k-2l+1}}\} \in E_2', \{v_{j_k}, v_{j_{k+1}}\} \in E_2'$, при этом получаем пару кратных ребер $\{v_{j_{k-2l+1}}, v_{j_{k+1}}\}$.

10) Существуют пара кратных ребер $\{v_{j_{k-2l+1}}, v_{j_{k+1}}\}$ и не кратное ребро $\{v_{j_{k-2l}}, v_{j_{k+1}}\} \in E_1$, тогда по свойству 3 и по лемме 3 операция ограниченного переключения эффективно применима к паре ребер

$\{v_{j_{k-2l}}, v_{j_{k-2l+1}}\} \in E_2'$, $\{v_{j_k}, v_{j_{k+1}}\} \in E_2'$, при этом получаем пару кратных ребер $\{v_{j_{k-2l}}, v_{j_{k+1}}\}$.

Отдельно рассмотрим случай, когда существует ребро $\{v_{j_1}, v_{j_{k+1}}\} \in E_1$:

либо по свойству 3 и по лемме 3 операция ограниченного переключения эффективно применима к паре ребер $\{v_{j_1}, v_{j_{k+1}}\} \in E_1$, $\{v_{j_{k-1}}, v_{j_k}\} \in E_1$, тогда получаем пару кратных ребер $\{v_{j_k}, v_{j_{k+1}}\}$;

либо по свойству 3 и по лемме 3 операция ограниченного переключения эффективно применима к паре ребер $\{v_{j_{k-2}}, v_{j_{k-1}}\} \in E_2'$, $\{v_{j_k}, v_{j_{k+1}}\} \in E_2'$, тогда получаем пару кратных ребер $\{v_{j_{k-1}}, v_{j_k}\}$;

либо, последовательно применив операцию ограниченного переключения к паре ребер $\{v_{j_1}, v_{j_{k+1}}\} \in E_1$, $\{v_{j_{k-1}}, v_{j_k}\} \in E_1$, затем к паре ребер $\{v_{j_{k-2}}, v_{j_{k-1}}\} \in E_2'$, $\{v_{j_k}, v_{j_{k+1}}\} \in E_2'$, получаем пару кратных ребер $\{v_{j_{k-1}}, v_{j_{k+1}}\}$.

Итак, рассмотрев все случаи, получаем, что либо на данном шаге эффективно применима операция ограниченного переключения, либо существует $m, m \in \{1, \ldots, k/2\}$ ребер, инцидентных вершине $v_{j_{k+1}}$ и какой-либо из вершин $v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}$ и принадлежащих E_2'. Отсюда по свойству 1 существует ребро $\{v_{j_{k+1}}, v_{j_{k+2}}\} \in E_1$, $j_{k+2} \notin \{j_1, \ldots, j_{k-1}\}$. Переход к шагу k.

Аналогично рассматривается случай, когда $\{v_{j_k}, v_{j_{k+1}}\} \in E_1$. Отметим, что при этом $l = 1, \ldots, (k-1)/2$, а $j_1 = j_{k-2l}$, где $l = (k-1)/2$.

Рассмотрим не кратное ребро $\{v_{j_1}, v_{j_2}\} \in E_1$, применяем последовательно шаги $1, 2$ и так далее. Допустим, остановка произойдет на шаге n. Это значит, в мультиграфе T_{12} были найдены два ребра, к которым эффективно применима операция ограниченного переключения, в результате чего образуется пара кратных ребер, одно из которых принадлежит множеству E_1, а другое — множеству E_2' (или две пары кратных ребер). Иначе алгоритм находит бесконечную последовательность попарно различных подграфов мультиграфа T_{12}, что невозможно в силу конечности мультиграфа T_{12}. Лемма доказана.

Из лемм 3 и 4 следует алгоритм $\mathfrak{A}_T$, преобразующий подграфы (T^1, T^2) мультиграфа T_{12} в пару подграфов (T'^1, T'^2), $T'^1 = T'^2$ с помощью конечной последовательности операций ограниченного переключения. Этой последовательности взаимно однозначно сопоставляется конечная последовательность операций ограниченного переключения, преобразующая пару деревьев (T_1, T_2) в пару деревьев (T_1', T_2'), $T_1' \cong T_2'$:

....

Цикл:

$T_{12}' := T_{12}$,

$T_1' := T_1, T_2' := T_2$.

Если в мультиграфе T_{12}' все ребра кратные, то алгоритм заканчивает работу.

Если в мультиграфе T_{12}' существует ребро $\{v_i, v_j\}$, не являющееся кратным, по лемме 4 найдем пару ребер, к которым эффективно применима операция ограниченного переключения.

Применим операцию в мультиграфе T_{12}'. Обозначим полученный мультиграф T_{12}'.

Применим ту же операцию к паре ребер дерева T_1' или T_2', взаимно однозначно сопоставленных паре ребер подграфа T_1' или T_2'. Обозначим полученные деревья T_1' и T_2'.

Переход к следующей итерации цикла.

....

Алгоритм $\mathfrak{A}_T$ корректен, то есть справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Для любой пары занумерованных деревьев T_1, T_2 с одинаковыми степенными последовательностями алгоритм $\mathfrak{A}_T$ строит пару изоморфных деревьев T_1', T_2'.*

Доказательство. При работе алгоритма $\mathfrak{A}_T$ после каждой итерации цикла в полученном мультиграфе T_{12}' возрастает количество кратных ребер, при этом общее количество ребер не увеличивается. Значит, после выполнения каждого шага цикла алгоритма $\mathfrak{A}_T$ количество не кратных ребер мультиграфа T_{12}' уменьшается не менее, чем на 2. Следовательно, алгоритм $\mathfrak{A}_T$ работает конечное число шагов. В результате получаем: $T_{12}' = (V_1, E_{12}') \in (\omega^*)^N(\{T_{12}\})$ для некоторого N; все ребра мультиграфа T_{12}' — кратные; деревья

$$T_1' \in (\omega^*)^{N_1}(\{T_1\})$$

и

$$T_2' \in (\omega^*)^{N_2}(\{T_2\}).$$

Причем, при очередном $i+1$ применении операции ω^* к мультиграфу из множества $(\omega^*)^i(\{T_{12}\})$ происходит применение операции ω^* к соответствующему дереву из множества $(\omega^*)^i(\{T_1\})$ или из множества $(\omega^*)^i(\{T_2\})$, то есть $N_1 + N_2 = N$. Так как в результате работы алгоритма $\mathfrak{A}_T$ все ребра мультиграфа T'_{12} становятся кратными, то для каждой пары инцидентных вершин v_i, v_j ребро $\{v_i, v_j\}$ существует одновременно в деревьях T'_1, T'_2. Из этого следует, что T'_1 и T'_2 изоморфны. Теорема доказана.

Из результатов [18] следует способ построения T-автомата A_1, который применяется к матрице $M = M^{(0)}$, $m_{ij}^{(0)} \in L(4)$, определяющей мультиграф T_{12}. В результате работы T-автомата A_1 с начальным состоянием q_1^0 последовательно находится ребро, не являющееся кратным, затем строится простая цепь с началом в одной из вершин, инцидентных данному ребру, и с помощью этой цепи находится пара ребер, к которым применима операция переключения (см. инструкции 1–5 в [18]). При этом T-автомат A_1 приходит в выделенное состояние q_1^* и передает управление T-автомату A_2. В результате работы T-автомата A_2 с начальным состоянием q_2^0 происходит перенумерация четверки вершин, участвующей в операции, так чтобы полученный в результате операции переключения мультиграф вновь удовлетворял свойствам 1, 2, 3. Существование такой нумерации и способ построения T-автомата A_2 с помощью инструкций 1–5 из [18] следуют из леммы 3. При переходе в выделенное состояние q_2^* T-автомат A_2 снова передает управление T-автомату A_1, в результате работы которого происходит операция переключения, соответствующая нумерации, то есть операция ограниченного переключения. Через некоторое конечное количество N шагов T-автомат A_1 приходит в конечное состояние q'_1, при этом матрица $M^{(N)}$, $m_{ij}^{(N)} \in L(4)$, определяет мультиграф, в котором все ребра являются кратными. Отсюда следует способ построения T-автомата A с начальным состоянием q_1^0 и конечным q'_1, который применяется к матрице $M^{(0)}$, $m_{ij}^{(0)} \in L(4)$ и в результате работы которого осуществляется конечная последовательность операций ограниченного переключения, приводящая к тому, что все ребра полученного мультиграфа становятся кратными. Таким образом, верна

Теорема 5. *Алгоритм* $\mathfrak{A}_T = (A, M)$ *является переключательным.*

Временной сложностью работы алгоритма будем называть количество просмотренных за время его работы ребер.

Замечание. Временная сложность работы алгоритма поиска правильной нумерации четверки вершин по порядку растет не быстрее, чем n^2.

Отсюда и из результатов [18] также следует

Теорема 6. *Временная сложность работы переключательного алгоритма* $\mathfrak{A}_T$ *на мультиграфе* T_{12} *с* n *вершинами, растет по порядку не быстрее, чем* n^2.

Размер задачи определим как количество ячеек матрицы, необходимой для задания входных данных алгоритма. Таким образом, для задания мультиграфа с n вершинами необходимо n^2 ячеек. Поскольку алгоритм $\mathfrak{A}_T$ является переключательным, то верна

Теорема 7. *Объем внешней памяти алгоритма* $\mathfrak{A}_T$ *отличается от размера задачи не более чем на константу.*

4. Построение переключательного алгоритма преобразования унициклов с сохранением степенной последовательности

4.1. Переключательная полнота свойства «быть унициклом»

Определение 19. ([16]) Уницикл $U = (V, E)$ — это связный неориентированный граф, содержащий ровно один цикл.

Пусть $d(n)$ — некоторая графичная последовательность. Через $\mathfrak{U}(d(n))$ обозначим множество всех унициклов с занумерованными вершинами со степенной последовательностью $d(n)$, такое что $\mathfrak{U}(d(n)) \subseteq M(d(n))$.

Рассмотрим некоторое подмножество $\mathbf{U}(d(n))$ множества унициклов $\mathfrak{U}(d(n))$. Определим операцию

$$\omega^*(\mathbf{U}(d(n))) = \{U' \in \mathfrak{U}(d(n)) |\ \exists\, U = (V, E) \in \mathbf{U}(d(n)),$$
$$\exists\, v_1, v_2, v_3, v_4 \in V,\ \ \{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\} \in E,\ \ \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\} \notin E,$$
$$U' = (V, (E \cup \{\, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}\,\}) \setminus \{\, \{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}\,\})\}.$$

Операция ω^* определена при $n \geqslant 4$. Отметим, что $\omega^*(\mathbf{U}(d(n)))$ является подмножеством $\mathfrak{U}(d(n))$, то есть операция ω^* не меняет степенную последовательность вершин и не выводит из класса унициклов.

В [12] рассматривается операция ограниченного переключения в унициклах. Будем говорить, что операция ограниченного переключения применима в уницикле $U = (V, E)$ к некоторой паре ребер $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}$, если в уницикле U не существует ребер $\{v_{i_1}, v_{j_1}\}, \{v_{i_2}, v_{j_2}\}$, и граф

$$U' = (V, (E \cup \{\, \{v_{i_1}, v_{j_1}\}, \{v_{i_2}, v_{j_2}\}\,\}) \setminus \{\, \{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}\,\})$$

является униклом, или если в уницикле U не существует ребер $\{v_{i_1}, v_{j_2}\}, \{v_{i_2}, v_{j_1}\}$, и граф

$$U' = (V, (E \cup \{\, \{v_{i_1}, v_{j_2}\}, \{v_{i_2}, v_{j_1}\}\,\}) \setminus \{\, \{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}\,\})$$

является униклом. Если операция ограниченного переключения применима к паре ребер $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}$, то будем также говорить, в первом случае, что ребра $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}$ переключаются на ребра $\{v_{i_1}, v_{j_1}\}, \{v_{i_2}, v_{j_2}\}$, или, во втором случае, на ребра $\{v_{i_1}, v_{j_2}\}, \{v_{i_2}, v_{j_1}\}$.

Будем рассматривать множества унициклов с количеством вершин, не меньшим 4.

Обозначим $U^{(2)}$ множество пар унициклов $\{U_1, U_2\}$ с занумерованными вершинами, таких что $d(U_1) = d(U_2)$.

Рассмотрим произвольную пару унициклов $\{U_1, U_2\} \in U^{(2)}$,

$$U_1 = (V_1, E_1), U_2 = (V_2, E_2), |V_1| = |V_2| = n.$$

Впервые следующая теорема доказана в [12].

Теорема 8. *Существуют целые неотрицательные числа N_1 и N_2, и найдутся унициклы U_1' и U_2', такие что*

$$U_i' \in (\omega^*)^{N_i}(\{U_i\}) = \underbrace{\omega^*(\omega^*(\ldots\omega^*}_{N_i}(\{U_i\}))),\ i=1,2,$$

и

$$U_1' \cong U_2'.$$

4.2. Существование переключательного алгоритма преобразования унициклов. Постановка задачи

Рассмотрим вопрос о существовании переключательного алгоритма $\mathfrak{A}_U$, который по паре унициклов $(U_1,U_2) \in U^{(2)}$ строит пару (U_1',U_2') такую, что $U_i' \in (\omega^*)^{N_i}(\{U_i\}), i=1,2$, и $U_1' \cong U_2'$.

Так же, как в п. 3.2, паре унициклов $(U_1,U_2) \in U^{(2)}, U_i = (V_i,E_i),\ |V_i| = n,\ i=1,2$, взаимно однозначно сопоставим симметричную матрицу $M^{(0)} = (m_{ij}^{(0)})_{n\times n},\ m_{ij}^{(0)} \in L(4)$.

Так как унициклы $U_1 = (V_1,E_1)$ и $U_2 = (V_2,E_2)$ имеют одинаковую степенную последовательность, то биекция $f: V_2 \to V_1$, сопоставляющая каждой вершине v_1 уницикла $U_1 = (V_1,E_1)$ вершину v_2 уницикла $U_2 = (V_2,E_2)$ с тем же номером, сохраняет степень вершины.

Определим мультиграф U_{12} следующим образом: $U_{12} = (V_1,E_{12})$, E_{12} — мультимножество, являющееся объединением мультимножеств E_1, E_2', где

$$E_2' = \left\{\, \{f(v'),f(v'')\} | \{v',v''\} \in E_2 \,\right\}.$$

Определим в мультиграфе U_{12} подграфы $U^1 = (V_1,E_1)$, $U^2 = (V_1,E_2')$. Заметим, что подграф U^1 и уницикл U_1 (подграф U^2 и уницикл U_2) изоморфны. Таким образом, степень любой вершины мультиграфа U_{12} является удвоенной степенью вершины с тем же номером уницикла U_1.

Таким образом, матрица $M^{(0)} = (m_{ij}^{(0)})_{n\times n},\ m_{ij}^{(0)} \in L(4)$ для любого $i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,n$, определяет мультиграф U_{12}.

Выделим следующие свойства мультиграфа U_{12}.

Свойство 1. Для любой вершины мультиграфа U_{12} количество ребер, инцидентных ей и принадлежащих множеству E_1, равно количеству ребер, инцидентных ей и принадлежащих множеству E_2'.

Свойство 2. Мультиграф U_{12} может иметь кратные ребра (кратности не выше 2), причем, если e_1, e_2 — кратные ребра U_{12}, то $e_1 \in E_1, e_2 \in E_2'$ или $e_1 \in E_2', e_2 \in E_1$.

Свойство 3. Каждый из подграфов U^1 и U^2 является унициклом.

Через $\mathfrak{U}_{12}(d(n))$ обозначим множество всех мультиграфов с занумерованными вершинами со степенной последовательностью $d(n)$, обладающих свойством 3, такое что $\mathfrak{U}_{12}(d(n)) \subseteq M_{12}(d(n))$.

Рассмотрим некоторое подмножество $\mathbf{U}_{12}(d(n))$ множества мультиграфов $\mathfrak{U}_{12}(d(n))$. Определим операцию

$$\begin{gathered}
\omega^*(\mathbf{U}_{12}(d(n))) = \{U_{12}' \in \mathfrak{U}_{12}(d(n)) |\ \exists\, U_{12} = (V_{12}, E_{12}) \in \mathbf{U}_{12}(d(n)),\\
\exists\, v_1, v_2, v_3, v_4 \in V_{12},\\
\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\} \in E_1,\ \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\} \notin E_1,\\
U_{12}' = (V_{12}, (E_1 \cup \{\, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}\,\}) \setminus \{\, \{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}\,\} \cup E_2')\}\\
\bigcup\\
\{U_{12}' \in \mathfrak{U}_{12}(d_2(n)) |\ \exists\, U_{12} = (V_{12}, E_{12}) \in \mathbf{U}_{12}(d_2(n)),\\
\exists\, v_1, v_2, v_3, v_4 \in V_{12},\\
\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\} \in E_2',\ \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\} \notin E_2'\\
U_{12}' = (V_{12}, (E_2' \cup \{\, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}\,\}) \setminus \{\, \{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}\,\} \cup E_1)\}.
\end{gathered}$$

Будем говорить, что операция ограниченного переключения эффективно применима в мультиграфе U_{12} к некоторой паре ребер $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}$, если выполнено одно из условий i или ii:

i) операция применима в подграфе U^1, и полученный в результате подграф имеет свойства 1, 2, 3, а также увеличивается количество пар кратных ребер в мультиграфе U_{12},

ii) операция применима в подграфе U^2, и полученный в результате подграф имеет свойства 1, 2, 3, а также увеличивается количество пар кратных ребер в мультиграфе U_{12}.

Лемма 5. *В любом уницикле* $U = (V, E)$, $|V| \geqslant 4$, *к любой паре не смежных ребер* $\{v_{k_1}, v_{k_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}$ *применима операция ограниченного переключения.*

При этом четверке вершин $(v_{k_1}, v_{k_2}, v_{j_1}, v_{j_2})$ *сопоставляется нумерация* $(v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}, v_{i_4})$, *такая что ребра* $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{i_3}, v_{i_4}\}$ *переключаются на ребра* $\{v_{i_1}, v_{i_3}\}, \{v_{i_2}, v_{i_4}\}$. *Нумерация сопоставляется таким образом, чтобы было выполнено хотя бы одно из условий i или ii:*

i) существует путь в дереве $T = (V, E)$, *проходящий через вершины* v_{i_2}, v_{i_3} *и не проходящий через вершины* v_{i_1}, v_{i_4};

ii) существует путь в дереве $T = (V, E)$, *проходящий через вершины* v_{i_1}, v_{i_4} *и не проходящий через вершины* v_{i_2}, v_{i_3}.

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 3.

Далее построим переключательный алгоритм $\mathfrak{A}$, который матрицу $M^{(0)}$, определяющую мультиграф U_{12}, перерабатывает в матрицу $M^{(N)}$, определяющую мультиграф U'_{12}. При этом по U'_{12} взаимно однозначно восстанавливается пара (U'_1, U'_2), такая что $U'_i \cong U'^i, i = 1, 2$, и $U'^i \in (\omega^*)^{N_i}(\{U^i\}), i = 1, 2$.

4.3. Построение переключательного алгоритма преобразования унициклов с сохранением степенной последовательности

Докажем следующую лемму.

Лемма 6. *Существует алгоритм, который, начиная работу с некоторого произвольного не кратного ребра мультиграфа* $U_{12} = (V_1, E_{12})$, *удовлетворяющего свойствам 1, 2, 3, находит пару ребер, к которым эффективно применима операция ограниченного переключения.*

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 4 со следующим замечанием для шагов $k-1$ и k.

Из свойства 3 следует, что в мультиграфе U_{12} для каждого из подграфов U^i, $i = 1, 2$, может существовать (и если существует, то единственное) $l_i = 1, \ldots, (k-2)/2$, $i = 1, 2$, такое что существует пара ребер $\{v_{j_{k-2l_i+1}}, v_{j_{k+1}}\}$ и $\{v_{j_{k-2l_i}}, v_{j_{k+1}}\}$ ($\{v_{j_1}, v_{j_{k+1}}\}$ и $\{v_{j_2}, v_{j_{k+1}}\}$), одновременно лежащих в U^i. Далее возможны случаи (без ограничения общности считаем, что k — нечетно, $l = l_1$):

1) На шаге $k-1$ существуют одновременно ребра $\{v_{j_{k-2l}}, v_{j_{k+1}}\} \in E_1$ и $\{v_{j_{k-2l+1}}, v_{j_{k+1}}\} \in E_1$. Из доказательства леммы 4 следует, что либо на данном шаге эффективно применима операция ограниченного переключения, либо существует $m, m \in \{1, \ldots, k/2+1\}$ ребер, инцидентных вершине $v_{j_{k+1}}$ и какой-либо из вершин $v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}$ и принадлежащих E_1. Отсюда по свойству 1 существует ребро $\{v_{j_{k+1}}, v_{j_{k+2}}\} \in E'_2$, $j_{k+2} \notin \{j_1, \ldots, j_k\}$, и происходит переход к шагу k.

2) На шаге k существует не кратное ребро $\{v_{j_1}, v_{j_{k+2}}\} \in E_1$. Тогда по свойству 3 и по лемме 5 операция ограниченного переключения эффективно применима в следующих случаях:

либо к паре ребер $\{v_{j_1}, v_{j_{k+2}}\} \in E_1$, $\{v_{j_k}, v_{j_{k+1}}\} \in E_1$, при этом получаем пару кратных ребер $\{v_{j_{k+1}}, v_{j_{k+2}}\}$;

либо к паре ребер $\{v_{j_{k-1}}, v_{j_k}\} \in E'_2, \{v_{j_{k+1}}, v_{j_{k+2}}\} \in E'_2$, при этом получаем пару кратных ребер $\{v_{j_k}, v_{j_{k+1}}\}$; —

либо, последовательно применив операцию ограниченного переключения к паре ребер $\{v_{j_1}, v_{j_{k+2}}\} \in E_1$, $\{v_{j_k}, v_{j_{k+1}}\} \in E_1$, затем к паре ребер $\{v_{j_{k-1}}, v_{j_k}\} \in E'_2, \{v_{j_{k+1}}, v_{j_{k+2}}\} \in E'_2$, получаем пару кратных ребер $\{v_{j_k}, v_{j_{k+2}}\}$.

Лемма доказана.

Из лемм 5 и 6 следует алгоритм $\mathfrak{A}_U$, преобразующий подграфы (U^1, U^2) мультиграфа U_{12} в пару подграфов (U'^1, U'^2), $U'^1 = U'^2$ с помощью конечной последовательности операций ограниченного переключения. Этой последовательности взаимно однозначно сопоставляется конечная последовательность операций ограниченного переключения, преобразующая пару унициклов (U_1, U_2) в пару унициклов (U'_1, U'_2), $U'_1 \cong U'_2$:

. . . .

Цикл:

$U'_{12} := U_{12}$,

$U'_1 := U_1, U'_2 := U_2$.

Если в мультиграфе U'_{12} все ребра кратные, то алгоритм заканчивает работу.

Если в мультиграфе U'_{12} существует ребро $\{v_i, v_j\}$, не являющееся кратным, по лемме 6 найдем пару ребер, к которым эффективно применима операция ограниченного переключения.

Применим операцию в мультиграфе U'_{12}. Обозначим полученный мультиграф U'_{12}.

Применим ту же операцию к паре ребер уницикла U'_1 или U'_2, взаимно однозначно сопоставленных паре ребер подграфа U'_1 или U'_2. Обозначим полученные унициклы U'_1 и U'_2.

Переход к следующей итерации цикла.

....

Алгоритм $\mathfrak{A}_U$ корректен, то есть справедлива следующая теорема.

Теорема 9. *Для любой пары занумерованных унициклов U_1, U_2 с одинаковыми степенными последовательностями алгоритм $\mathfrak{A}_U$ строит пару изоморфных унициклов U'_1, U'_2.*

Доказательство. Доказательство следует из доказательства леммы 6 и теоремы 4.

Отсюда следуют

Теорема 10. *Алгоритм $\mathfrak{A}_U$ является переключательным.*

Теорема 11. *Временная сложность работы переключательного алгоритма $\mathfrak{A}_U$ на мультиграфе U_{12} с n вершинами, растет по порядку не быстрее, чем n^2.*

Теорема 12. *Объем внешней памяти алгоритма $\mathfrak{A}_U$ отличается от размера задачи не более чем на константу.*

5. Построение переключательного алгоритма преобразования связных графов с сохранением степенной последовательности

5.1. Переключательная полнота свойства связности

Пусть $d(n)$ — некоторая графичная последовательность. Через $\mathfrak{C}(d(n))$ обозначим множество всех связных графов с занумерованными вершинами со степенной последовательностью $d(n)$, такое что $\mathfrak{C}(d(n)) \subseteq M(d(n))$.

Рассмотрим некоторое подмножество $\mathbf{C}(d(n))$ множества связных графов $\mathfrak{C}(d(n))$. Определим операцию

$$\omega^*(\mathbf{C}(d(n))) = \{C' \in \mathfrak{C}(d(n)) |\ \exists\, C = (V, E) \in \mathbf{C}(d(n)),$$
$$\exists\, v_1, v_2, v_3, v_4 \in V,\ \ \{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\} \in E,\ \ \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\} \notin E,$$
$$C' = (V, (E \cup \{\, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}\,\}) \setminus \{\, \{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}\,\})\}.$$

Операция ω^* определена при $n \geqslant 4$. Отметим, что $\omega^*(\mathbf{C}(d(n)))$ является подмножеством $\mathfrak{C}(d(n))$, то есть операция ω^* не меняет степенную последовательность вершин и не выводит из класса связных графов.

В [13] рассматривается операция ограниченного переключения в связных графах. Будем говорить, что операция ограниченного переключения применима в связном графе $C = (V, E)$ к некоторой паре ребер $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}$, если в связном графе C не существует ребер $\{v_{i_1}, v_{j_1}\}, \{v_{i_2}, v_{j_2}\}$, и граф

$$C' = (V, (E \cup \{\, \{v_{i_1}, v_{j_1}\}, \{v_{i_2}, v_{j_2}\}\,\}) \setminus \{\, \{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}\,\})$$

является связным, или если в связном графе C не существует ребер $\{v_{i_1}, v_{j_2}\}, \{v_{i_2}, v_{j_1}\}$, и граф

$$C' = (V, (E \cup \{\, \{v_{i_1}, v_{j_2}\}, \{v_{i_2}, v_{j_1}\}\,\}) \setminus \{\, \{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}\,\})$$

является связным. Если операция ограниченного переключения применима к паре ребер $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}$, то будем также говорить, в первом случае, что ребра $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}$ переключаются на ребра $\{v_{i_1}, v_{j_1}\}, \{v_{i_2}, v_{j_2}\}$, или, во втором случае, на ребра $\{v_{i_1}, v_{j_2}\}, \{v_{i_2}, v_{j_1}\}$.

Будем рассматривать множества связных графов с количеством вершин, не меньшим 4.

Обозначим $C^{(2)}$ множество пар связных графов $\{C_1, C_2\}$ с занумерованными вершинами, таких что $d(C_1) = d(C_2)$.

Рассмотрим произвольную пару $\{C_1, C_2\} \in C^{(2)}$,

$$C_1 = (V_1, E_1), C_2 = (V_2, E_2), |V_1| = |V_2| = n.$$

Впервые следующая теорема доказана в [13].

Теорема 13. *Существуют целые неотрицательные числа* N_1 *и* N_2, *и найдутся связные графы* C_1' *и* C_2', *такие что*

$$C_i' \in (\omega^*)^{N_i}(\{C_i\}) = \underbrace{\omega^*(\omega^*(\ldots\omega^*}_{N_i}(\{C_i\}))),\ i = 1, 2,$$

и

$$C_1' \cong C_2'.$$

5.2. Существование переключательного алгоритма преобразования связных графов. Постановка задачи

Рассмотрим вопрос о существовании переключательного алгоритма $\mathfrak{A}_C$, который по паре связных графов $(C_1, C_2) \in C^{(2)}$ строит пару (C_1', C_2') такую, что $C_i' \in (\omega^*)^{N_i}(\{C_i\}), i = 1, 2$, и $C_1' \cong C_2'$.

Так же, как в п. 3.2, паре связных графов $(C_1, C_2) \in C^{(2)}, C_i = (V_i, E_i),\ |V_i| = n,\ i = 1, 2$, взаимно однозначно сопоставим симметричную матрицу $M^{(0)} = (m_{ij}^{(0)})_{n\times n},\ m_{ij}^{(0)} \in L(4)$.

Так как графы $C_1 = (V_1, E_1)$ и $C_2 = (V_2, E_2)$ имеют одинаковую степенную последовательность, то биекция $f : V_2 \to V_1$, сопоставляющая каждой вершине v_1 графа $C_1 = (V_1, E_1)$ вершину v_2 графа $C_2 = (V_2, E_2)$ с тем же номером, сохраняет степень вершины.

Определим мультиграф C_{12} так же, как в случае с унициклами.

При этом так же матрица $M^{(0)}$ определяет мультиграф C_{12}.

Выделим следующие свойства мультиграфа C_{12}.

Свойство 1. Для любой вершины мультиграфа C_{12} количество ребер, инцидентных ей и принадлежащих множеству E_1, равно количеству ребер, инцидентных ей и принадлежащих множеству E_2'.

Свойство 2. Мультиграф C_{12} может иметь кратные ребра (кратности не выше 2), причем, если e_1, e_2 — кратные ребра C_{12}, то $e_1 \in E_1, e_2 \in E_2'$ или $e_1 \in E_2', e_2 \in E_1$.

Свойство 3. Каждый из подграфов C^1 и C^2 является связным графом.

Через $\mathfrak{C}_{12}(d(n))$ обозначим множество всех мультиграфов с занумерованными вершинами со степенной последовательностью $d(n)$, обладающих свойством 3, такое что $\mathfrak{C}_{12}(d(n)) \subseteq M_{12}(d(n))$.

Рассмотрим некоторое подмножество $\mathbf{C}_{12}(d(n))$ множества мультиграфов $\mathfrak{C}_{12}(d(n))$. Определим операцию

$$\omega^*(\mathbf{C}_{12}(d(n))) = \{C'_{12} \in \mathfrak{C}_{12}(d(n)) | \ \exists \, C_{12} = (V_{12}, E_{12}) \in \mathbf{C}_{12}(d(n)),$$
$$\exists \, v_1, v_2, v_3, v_4 \in V_{12},$$
$$\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\} \in E_1, \ \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\} \notin E_1,$$
$$C'_{12} = (V_{12}, (E_1 \cup \{\, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}\, \}) \setminus \{\, \{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}\, \} \cup E'_2)\}$$
$$\bigcup$$
$$\{C'_{12} \in \mathfrak{C}_{12}(d_2(n)) | \ \exists \, C_{12} = (V_{12}, E_{12}) \in \mathbf{C}_{12}(d_2(n)),$$
$$\exists \, v_1, v_2, v_3, v_4 \in V_{12},$$
$$\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\} \in E'_2, \ \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\} \notin E'_2$$
$$C'_{12} = (V_{12}, (E'_2 \cup \{\, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}\, \}) \setminus \{\, \{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}\, \} \cup E_1)\}.$$

Будем говорить, что операция ограниченного переключения эффективно применима в мультиграфе C_{12} к некоторой паре ребер $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}$, если выполнено одно из условий *i* или *ii*:

i) операция применима в подграфе C^1, и полученный в результате подграф имеет свойства 1, 2, 3, а также увеличивается количество пар кратных ребер в мультиграфе C_{12},

ii) операция применима в подграфе C^2, и полученный в результате подграф имеет свойства 1, 2, 3, а также увеличивается количество пар кратных ребер в мультиграфе C_{12}.

Лемма 7. *В любом связном графе* $C = (V, E)$, $|V| \geqslant 4$, *к паре не смежных ребер* $\{v_{k_1}, v_{k_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}$, *к которой применима операция переключения, применима также операция ограниченного переключения.*

При этом в случае когда к паре ребер применимы оба варианта операции переключения, четверке вершин $(v_{k_1}, v_{k_2}, v_{j_1}, v_{j_2})$ *сопоставляется нумерация* $(v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}, v_{i_4})$, *такая что ребра* $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{i_3}, v_{i_4}\}$ *переключаются на ребра* $\{v_{i_1}, v_{i_3}\}, \{v_{i_2}, v_{i_4}\}$. *Нумерация сопоставляется таким образом, чтобы было выполнено хотя бы одно из условий i или ii:*

i) существует путь в связном графе $C = (V, E)$, *проходящий через вершины* v_{i_2}, v_{i_3} *и не проходящий через вершины* v_{i_1}, v_{i_4};

ii) существует путь в связном графе $C = (V, E)$, проходящий через вершины v_{i_1}, v_{i_4} и не проходящий через вершины v_{i_2}, v_{i_3}.

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 3.

Далее построим переключательный алгоритм $\mathfrak{A}_C$, который матрицу $M^{(0)}$, определяющую мультиграф C_{12}, перерабатывает в матрицу $M^{(N)}$, определяющую мультиграф C'_{12}. При этом по C'_{12} взаимно однозначно восстанавливается пара (C'_1, C'_2), такая что $C'_i \cong C'^i, i = 1, 2$, и $C'^i \in (\omega^*)^{N_i}(\{C^i\}), i = 1, 2$.

5.3. Построение переключательного алгоритма преобразования связных графов с сохранением степенной последовательности

Из результатов [18] и леммы 7 следует

Лемма 8. *Существует алгоритм, который, начиная работу с некоторого произвольного не кратного ребра мультиграфа $C_{12} = (V_1, E_{12})$, удовлетворяющего свойствам 1, 2, 3, находит пару ребер, к которым эффективно применима операция ограниченного переключения.*

Из лемм 7 и 8 следует алгоритм $\mathfrak{A}_C$ преобразующий подграфы (C^1, C^2) мультиграфа C_{12} в пару подграфов (C'^1, C'^2), $C'^1 = C'^2$ с помощью конечной последовательности операций ограниченного переключения. Этой последовательности взаимно однозначно сопоставляется конечная последовательность операций ограниченного переключения, преобразующая пару связных графов (C_1, C_2) в пару связных графов (C'_1, C'_2), $C'_1 \cong C'_2$:

....

Цикл:

$C'_{12} := C_{12}$,

$C'_1 := C_1, C'_2 := C_2$.

Если в мультиграфе C'_{12} все ребра кратные, то алгоритм заканчивает работу.

Если в мультиграфе C'_{12} существует ребро $\{v_i, v_j\}$, не являющееся кратным, по лемме 8 найдем пару ребер, к которым эффективно применима операция ограниченного переключения.

Применим операцию в мультиграфе C'_{12}. Обозначим полученный мультиграф C'_{12}.

Применим ту же операцию к паре ребер связного графа C'_1 или C'_2, взаимно однозначно сопоставленных паре ребер подграфа C'_1 или C'_2. Обозначим полученные связные графы C'_1 и C'_2.

Переход к следующей итерации цикла.

....

Из результатов п. 4.3 следуют

Теорема 14. *Для любой пары занумерованных связных графов C_1, C_2 с одинаковыми степенными последовательностями алгоритм $\mathfrak{A}_C$ строит пару изоморфных связных графов C'_1, C'_2.*

Теорема 15. *Алгоритм $\mathfrak{A}_C$ является переключательным.*

Теорема 16. *Временная сложность работы переключательного алгоритма $\mathfrak{A}_C$ на мультиграфе C_{12} с n вершинами, растет по порядку не быстрее, чем n^4.*

Теорема 17. *Объем внешней памяти алгоритма $\mathfrak{A}_C$ отличается от размера задачи не более чем на константу.*

6. Построение переключательного алгоритма преобразования двусвязных графов с сохранением степенной последовательности

6.1. Переключательная полнота свойства двусвязности

Определение 20. ([16]) Двусвязный граф — связный граф, который при удалении любой вершины вместе с инцидентными ей ребрами остается связным.

Пусть $d(n)$ — некоторая графичная последовательность. Через $\mathfrak{BC}(d(n))$ обозначим множество всех двусвязных графов с занумерованными вершинами со степенной последовательностью $d(n)$, такое что $\mathfrak{BC}(d(n)) \subseteq M(d(n))$.

Рассмотрим некоторое подмножество $\mathbf{BC}(d(n))$ множества двусвязных графов $\mathfrak{BC}(d(n))$. Определим операцию

$$\omega^*(\mathbf{BC}(d(n))) = \{BC' \in \mathfrak{B}C(d(n))|\ \exists\, BC = (V,E) \in \mathbf{BC}(d(n)),$$
$$\exists\, v_1, v_2, v_3, v_4 \in V,\ \ \{v_1,v_2\},\{v_3,v_4\} \in E,\ \ \{v_1,v_3\},\{v_2,v_4\} \notin E,$$
$$BC' = (V, (E \cup \{\,\{v_1,v_3\},\{v_2,v_4\}\,\}) \setminus \{\,\{v_1,v_2\},\{v_3,v_4\}\,\})\}.$$

Операция ω^* определена при $n \geqslant 4$. Отметим, что $\omega^*(\mathbf{BC}(d(n)))$ является подмножеством $\mathfrak{BC}(d(n))$, то есть операция ω^* не меняет степенную последовательность вершин и не выводит из класса двусвязных графов.

В [14] рассматривается операция ограниченного переключения в двусвязных графах. Будем говорить, что операция ограниченного переключения применима в двусвязном графе $BC = (V,E)$ к некоторой паре ребер $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}$, если в двусвязном графе BC не существует ребер $\{v_{i_1}, v_{j_1}\}, \{v_{i_2}, v_{j_2}\}$, и граф

$$BC' = (V, (E \cup \{\,\{v_{i_1}, v_{j_1}\}, \{v_{i_2}, v_{j_2}\}\,\}) \setminus \{\,\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}\,\})$$

является двусвязным, или если в двусвязном графе BC не существует ребер $\{v_{i_1}, v_{j_2}\}, \{v_{i_2}, v_{j_1}\}$, и граф

$$BC' = (V, (E \cup \{\,\{v_{i_1}, v_{j_2}\}, \{v_{i_2}, v_{j_1}\}\,\}) \setminus \{\,\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}\,\})$$

является двусвязным. Если операция ограниченного переключения применима к паре ребер $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}$, то будем также говорить, в первом случае, что ребра $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}$ переключаются на ребра $\{v_{i_1}, v_{j_1}\}, \{v_{i_2}, v_{j_2}\}$, или, во втором случае, на ребра $\{v_{i_1}, v_{j_2}\}, \{v_{i_2}, v_{j_1}\}$.

Будем рассматривать множества двусвязных графов с количеством вершин, не меньшим 4.

Обозначим $BC^{(2)}$ множество пар двусвязных графов $\{BC_1, BC_2\}$ с занумерованными вершинами, таких что $d(BC_1) = d(BC_2)$.

Рассмотрим произвольную пару $\{BC_1, BC_2\} \in BC^{(2)}$,

$$BC_1 = (V_1, E_1), BC_2 = (V_2, E_2), |V_1| = |V_2| = n.$$

Впервые следующая теорема доказана в [14].

Теорема 18. *Существуют целые неотрицательные числа* N_1 *и* N_2*, и найдутся связные графы* BC'_1 *и* BC'_2*, такие что*

$$BC'_i \in (\omega^*)^{N_i}(\{BC_i\}) = \underbrace{\omega^*(\omega^*(\ldots\omega^*}_{N_i}(\{BC_i\}))),\ i = 1, 2,$$

и

$$BC'_1 \cong BC'_2.$$

6.2. Существование переключательного алгоритма преобразования двусвязных графов. Постановка задачи

Рассмотрим вопрос о существовании переключательного алгоритма $\mathfrak{A}_{BC}$, который по паре двусвязных графов $(BC_1, BC_2) \in BC^{(2)}$ строит пару (BC'_1, BC'_2) такую, что $BC'_i \in (\omega^*)^{N_i}(\{BC_i\}), i = 1, 2$, и $BC'_1 \cong BC'_2$.

Так же, как в п. 3.2, паре двусвязных графов $(BC_1, BC_2) \in BC^{(2)}, BC_i = (V_i, E_i),\ |V_i| = n,\ i = 1, 2$, взаимно однозначно сопоставим симметричную матрицу $M^{(0)} = (m_{ij}^{(0)})_{n\times n},\ m_{ij}^{(0)} \in L(4)$.

Так как графы $BC_1 = (V_1, E_1)$ и $BC_2 = (V_2, E_2)$ имеют одинаковую степенную последовательность, то биекция $f : V_2 \to V_1$, сопоставляющая каждой вершине v_1 графа $BC_1 = (V_1, E_1)$ вершину v_2 графа $BC_2 = (V_2, E_2)$ с тем же номером, сохраняет степень вершины.

Определим мультиграф BC_{12} так же, как в случае с унициклами.

При этом так же матрица $M^{(0)}$ определяет мультиграф BC_{12}.

Выделим следующие свойства мультиграфа BC_{12}.

Свойство 1. Для любой вершины мультиграфа BC_{12} количество ребер, инцидентных ей и принадлежащих множеству E_1, равно количеству ребер, инцидентных ей и принадлежащих множеству E'_2.

Свойство 2. Мультиграф BC_{12} может иметь кратные ребра (кратности не выше 2), причем, если e_1, e_2 — кратные ребра BC_{12}, то $e_1 \in E_1, e_2 \in E'_2$ или $e_1 \in E'_2, e_2 \in E_1$.

Свойство 3. Каждый из подграфов BC^1 и BC^2 является двусвязным графом.

Через $\mathfrak{BC}_{12}(d(n))$ обозначим множество всех мультиграфов с занумерованными вершинами со степенной последовательностью $d(n)$, обладающих свойством 3, такое что $\mathfrak{BC}_{12}(d(n)) \subseteq M_{12}(d(n))$.

Рассмотрим некоторое подмножество $\mathbf{BC}_{12}(d(n))$ множества мультиграфов $\mathfrak{BC}_{12}(d(n))$. Определим операцию

$$\begin{gathered}
\omega^*(\mathbf{BC}_{12}(d(n))) = \\
= \{BC'_{12} \in \mathfrak{B}C_{12}(d(n)) | \ \exists\, BC_{12} = (V_{12}, E_{12}) \in \mathbf{BC}_{12}(d(n)), \\
\exists\, v_1, v_2, v_3, v_4 \in V_{12}, \\
\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\} \in E_1,\ \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\} \notin E_1, \\
BC'_{12} = (V_{12}, (E_1 \cup \{\,\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}\,\}) \setminus \{\,\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}\,\} \cup E'_2)\} \\
\bigcup \\
\{BC'_{12} \in \mathfrak{B}C_{12}(d_2(n)) | \ \exists\, BC_{12} = (V_{12}, E_{12}) \in \mathbf{BC}_{12}(d_2(n)), \\
\exists\, v_1, v_2, v_3, v_4 \in V_{12}, \\
\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\} \in E'_2,\ \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\} \notin E'_2 \\
BC'_{12} = (V_{12}, (E'_2 \cup \{\,\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}\,\}) \setminus \{\,\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}\,\} \cup E_1)\}.
\end{gathered}$$

Будем говорить, что операция ограниченного переключения эффективно применима в мультиграфе BC_{12} к некоторой паре ребер $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}$, если выполнено одно из условий i или ii:

i) операция применима в подграфе BC^1, и полученный в результате подграф имеет свойства 1, 2, 3, а также увеличивается количество пар кратных ребер в мультиграфе BC_{12},

ii) операция применима в подграфе BC^2, и полученный в результате подграф имеет свойства 1, 2, 3, а также увеличивается количество пар кратных ребер в мультиграфе BC_{12}.

Лемма 9. *В любом двусвязном графе $BC = (V, E)$, $|V| \geqslant 4$, к паре не смежных ребер $\{v_{k_1}, v_{k_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}$, к которой применима операция переключения, применима также операция ограниченного переключения.*

При этом в случае когда к паре ребер применимы оба варианта операции переключения, четверке вершин $(v_{k_1}, v_{k_2}, v_{j_1}, v_{j_2})$ сопоставляется нумерация $(v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}, v_{i_4})$, такая что ребра

$\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{i_3}, v_{i_4}\}$ переключаются на ребра $\{v_{i_1}, v_{i_3}\}, \{v_{i_2}, v_{i_4}\}$. Нумерация сопоставляется таким образом, чтобы было выполнено хотя бы одно из условий i или ii:

i) существует путь в двусвязном графе $BC = (V, E)$, проходящий через вершины v_{i_2}, v_{i_3} и не проходящий через вершины v_{i_1}, v_{i_4};

ii) существует путь в двусвязном графе $BC = (V, E)$, проходящий через вершины v_{i_1}, v_{i_4} и не проходящий через вершины v_{i_2}, v_{i_3}.

Доказательство. В [7] указан критерий двусвязности графа: граф двусвязен тогда и только тогда, когда любые два ребра графа принадлежат простому циклу. Принимая во внимание этот критерий, далее доказательство строится аналогично доказательству леммы 3.

Далее построим переключательный алгоритм $\mathfrak{A}_{BC}$, который матрицу $M^{(0)}$, определяющую мультиграф BC_{12}, перерабатывает в матрицу $M^{(N)}$, определяющую мультиграф BC'_{12}. При этом по BC'_{12} взаимно однозначно восстанавливается пара (BC'_1, BC'_2), такая что $BC'_i \cong BC'^i, i = 1, 2$, и $BC'^i \in (\omega^*)^{N_i}(\{BC^i\}), i = 1, 2$.

6.3. Построение переключательного алгоритма преобразования связных графов с сохранением степенной последовательности

Из результатов [18] и леммы 9 следует

Лемма 10. *Существует алгоритм, который, начиная работу с некоторого произвольного не кратного ребра мультиграфа $BC_{12} = (V_1, E_{12})$, удовлетворяющего свойствам 1, 2, 3, находит пару ребер, к которым эффективно применима операция ограниченного переключения.*

Из лемм 9 и 10 следует алгоритм $\mathfrak{A}_{BC}$, преобразующий подграфы (BC^1, BC^2) мультиграфа BC_{12} в пару подграфов (BC'^1, BC'^2), $BC'^1 = BC'^2$ с помощью конечной последовательности операций ограниченного переключения. Этой последовательности взаимно однозначно сопоставляется конечная последовательность операций ограниченного переключения, преобразующая пару двусвязных графов (BC_1, BC_2) в пару двусвязных графов (BC'_1, BC'_2), $BC'_1 \cong BC'_2$:

....

Цикл:

$BC'_{12} := BC_{12}$,

$BC'_1 := BC_1, BC'_2 := BC_2$.

Если в мультиграфе BC'_{12} все ребра кратные, то алгоритм заканчивает работу.

Если в мультиграфе BC'_{12} существует ребро $\{v_i, v_j\}$, не являющееся кратным, по лемме 10 найдем пару ребер, к которым эффективно применима операция ограниченного переключения.

Применим операцию в мультиграфе BC'_{12}. Обозначим полученный мультиграф BC'_{12}.

Применим ту же операцию к паре ребер связного графа BC'_1 или BC'_2, взаимно однозначно сопоставленных паре ребер подграфа BC'_1 или BC'_2. Обозначим полученные двусвязные графы BC'_1 и BC'_2.

Переход к следующей итерации цикла.

....

Из результатов п. 4.3 следуют

Теорема 19. *Для любой пары занумерованных двусвязных графов BC_1, BC_2 с одинаковыми степенными последовательностями алгоритм $\mathfrak{A}_{BC}$ строит пару изоморфных двусвязных графов BC'_1, BC'_2.*

Теорема 20. *Алгоритм $\mathfrak{A}_{BC}$ является переключательным.*

Теорема 21. *Временная сложность работы переключательного алгоритма $\mathfrak{A}_{BC}$ на мультиграфе BC_{12} с n вершинами, растет по порядку не быстрее, чем n^4.*

Теорема 22. *Объем внешней памяти алгоритма $\mathfrak{A}_{BC}$ отличается от размера задачи не более чем на константу.*

Автор выражает благодарность А. А. Часовских за внимание к работе и научное руководство.

Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[2] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1979.

[3] Cayley A. Brit. Assoc. Adv. Sci. Reports. P. 275. 1875.

[4] Senior J. K. Partitions and their Representative Graphs // Amer. Jour. Math. Vol. 73. P. 663–689. 1951.

[5] Hakimi S. L. On realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a linear graphs // I. J. Soc. Indust. Appl. Math. 1962. **10**. N 3. P. 496–506.

[6] Гавел В. Заметка о существовании конечных графов // Čas. Pest. Mat. 1955. **80**. N 4. P. 477–481.

[7] Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.

[8] Ryser H. J. Combinatorial Properties of Matrices of Zeros and Ones // Canadian Journal of Mathematics. **9**. P. 371–377. 1957.

[9] Haber R. M. Term Rank of (0,1)-Matrices // Rendiconti del Seminario Mathematico della reale Universita di Padova. **30**. P. 24–51. 1960.

[10] Egglton R. B., Holton D. A. Graphic sequences // Lecture Notes in Mathematics. Vol. 748. Berlin: Springer. P. 1–10.

[11] Черняк А. А. Переключательно полные свойства графов // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. № 1. С. 29–35. 1985.

[12] Syslo M. M. On tree and unicyclic realizations of degree sequences // Demonstratio Mathematica. V. 15. N 4. 1982. Warsaw Technical University Institute of Mathematics.

[13] Taylor R. Constrained switchings in graphs // Mathematics Research Report. N 27. 1980. Department of Mathematics, University of Melbourne.

[14] Taylor R. Switchings Constrained to 2-Connectivity in Simple Graphs // SIAM J. Algebraic Discrete Methods. **3**. N 1. P. 114–121. 1982.

[15] Colbourn C. J. Research Report Cc-77-37. University of Waterloo. P. 200. 1977.

[16] Harari F. Graph Theory. Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.

[17] Stauffer A. O., Barbosa V. C. A Study of the Edge-Switching Markov-Chain Method for the Generation of Random Graphs. 2005. (http://arxiv.org/abs/cs/0512105).

[18] Лашева М. И. Об алгебраических операциях на графах, сохраняющих степенную последовательность // Интеллектуальные системы. 2007. Т. 11, вып. 1–4. С. 551–592.