

Процесс самоочищения легких с очаговыми поражениями в чистой среде

Т. В. Докучаева

В данной работе построена модель функционирования легких с патологиями. Рассмотрена функция самоочищения легких от вещества, поступающего из окружающей среды или образующегося в них в процессе жизнедеятельности, в чистой среде. Механизм транспортировки вещества в здоровых легких обобщен на случай патологий пропускной способности и эффективности ресничкового механизма. Получено описание временной сложности процесса самоочищения легких при очаговом поражении пропускной способности ресничек и (или) их эффективности в чистой среде.

Ключевые слова: биоинформатика, древовидные системы, легкие, ресничковый механизм, самоочищение, процесс транспортировки.

Введение

С развитием вычислительной техники появилась возможность применять имитационное моделирование для изучения разнообразных процессов. Особенно эффективным такой подход оказывается в случае необходимости учета большого числа факторов. Кроме того, приходится оперировать большими объемами данных, что без использования вычислительных средств затруднительно. Невозможность работы с изучаемыми объектами непосредственно также является одним из основных причин использования имитационного моделирования. Большое распространение имитационное моделирование получило в медицине, где объектом исследования является человек,

и экспериментальное изучение жизненных процессов человека становится крайне затруднительным.

В данной работе изучается процесс функционирования легких человека и других живых организмов.

Легкие живых организмов являются основным органом всей дыхательной системы. Легкие функционируют в определенной среде, для которой характерна концентрация побочных веществ в смеси газов, поступающих из среды при вдохе (далее *поступающее вещество*, или просто, *вещество*), и выводящихся в среду при выдохе. Среда называется *загрязненной*, если в ней есть загрязняющие вещества, иначе среда называется *чистой*.

Одной из основных функций легких является функция транспортировки вещества, поступающего из окружающей среды или образующегося в них за счет их жизнедеятельности. Процесс вывода поступающего вещества называется *клиренс* (англ. *clearance* — очищение). Процесс транспортировки происходит дискретно, и за один шаг происходит два события: вдох и выдох. При вдохе происходит прием вещества извне и транспортировка вещества в легких сверху вниз. При выдохе происходит выброс части вещества в среду и транспортировка вещества в легких снизу вверх.

Легкие образуют древовидную структуру бронхов [4]. Процесс транспортировки вещества по легким происходит за счет так называемого ресничкового механизма, который образует поле ресничек, покрывающих внутреннюю часть бронхов. Ресничковое поле способно загружаться поступающим извне веществом, распределять его по полю, перемещать его и удалять, выводя вовне с потоком выдыхаемого воздуха. Бронхи имеют разные пропускные способности и разную эффективность ресничек. Чем выше от альвеол, то есть самых мелких бронхов, тем мощнее механизм передачи вещества изнутри вовне.

В [3] была построена математическая модель функционирования здоровых легких и изучены ее свойства. В продолжение работы возникла задача построения модели функционирования легких с очаговыми заболеваниями и изучение легочного механизма самоочищения в случае поражения пропускной способности и эффективности ресничек.

Наличие модели функционирования легких с очаговыми патологиями в дальнейшем позволит проводить исследования, а также диагностировать заболевания. Задавая различные параметры модели, можно имитировать процесс самоочищения легких конкретного человека.

В данной работе построена модель легких с очаговыми поражениями, изучен легочный механизм транспортировки вещества в случае ухудшения пропускной способности и эффективности ресничек в чистой среде. Получено описание временной сложности самоочищения максимально загруженных легких с очаговым поражением ресничек трех видов:

- 1) ухудшение пропускной способности;
- 2) ухудшение эффективности;
- 3) одновременное ухудшение пропускной способности и эффективности.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю к.ф.-м.н. Ю.Г. Черновой за постановку задачи и поддержку в работе, а так же всему коллективу кафедры математической теории интеллектуальных систем за знания и опыт, переданные во время учебы.

1. Основные понятия и результаты

Легкие представимы как полное дихотомическое ориентированное к корню дерево. Дерево с очаговым поражением будем называть I' -деревом D^{-1} . Опишем основные параметры для I' -дерева.

Пусть \mathbb{N} — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = 0 \cup \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_k = 1, 2, 3, \dots, k$. Глубина I' -дерева l , $l \in \mathbb{N}$. Считается, что ребро I' -дерева D^{-1} , инцидентное корню, имеет глубину 1.

Очагом назовем поддерево I' -дерева, начинающееся с ребра уровня l' , где $1 \leq l' \leq l$, и заканчивающееся на уровне $l' + d - 1$, где $1 \leq d \leq l - l' + 1$. Под *диаметром* очага понимается пораженная часть цепи в нем. Будем говорить, что очаг имеет *круглую форму* (*круглый очаг*), если очаг представляет собой полное поддерево (все диаметры

очага равны), иначе — *некруглую (некруглый очаг)*. Диаметр круглого очага обозначим через d . Под *минимальным* диаметром в некруглом очаге будем понимать количество уровней в максимально полном поддереве очага, начинающимся с уровня l' , и обозначать через d_{\min} . Под *максимальным* диаметром в некруглом очаге будем понимать максимальное количество уровней в очаге, и обозначать d_{\max} .

Каждое ребро из I' -дерева D^{-1} разделено на n , $n \in \mathbb{N}$, равных частей, называемых *ресничками*, и занумерованных числами i , $i \in \mathbb{N}_n$, возрастающими в направлении, обратном ориентации ребра, то есть сверху вниз.

Каждому ребру приписаны два параметра: нагрузка ресничек и их мера переброса. Под *нагрузкой (эффективностью)* реснички понимается максимальное количество вещества, которое может находиться на ней. Нагрузка зависит от параметра b , $b \in \mathbb{N}$. Под *мерой переброса* понимается максимальное количество вещества, которое может перебросить эта ресничка соседней сверху. Мера переброса зависит от параметра r , $r \in \mathbb{N}$, $r \leq b$.

Параметры нагрузки и меры переброса увеличиваются в 2 раза по сравнению с предыдущим уровнем, поэтому на ребре глубины j , $j \in \mathbb{N}_l$, максимальная нагрузка будет равна $2^{l-j}\tilde{b}$, мера переброса — $2^{l-j}\tilde{r}$, где за \tilde{b} и \tilde{r} обозначены параметры b или b' и r или r' в случаях здорового ребра или ребра с патологией соответственно, где $b, b', r, r' \in \mathbb{N}$, $r' \leq r$, $b' \leq b$, $r \leq b$. Другими словами, на ребре глубины j максимальная нагрузка будет равна $2^{l-j}b$, максимальная мера переброса — $2^{l-j}r$ в случаях $j = 1, 2, \dots, l' - 1$ и $j = l' + d, l' + d + 1, \dots, l$ (ребро здоровое) или $2^{l-j}b'$ и $2^{l-j}r'$ в случае $j = l', l' + 1, \dots, l' + d - 1$ (ребро проходит через очаг поражения).

Такое I' -дерево D^{-1} с описанными выше параметрами b, r, n, l, l', d, b' и r' обозначается $D^{-1}(b, r, n, l, l', d, b', r')$.

Схематически можно представить легкие как показано на рис. 1.

Считается, что в $D^{-1}(b, r, n, l, l', d, b', r')$ заданы распределения нагрузок по всем ресничкам, учитывая, что нагрузка может быть нулевой. Пусть V' — суммарная нагрузка по всем ресничкам, а V — максимально возможная суммарная нагрузка по всем ресничкам. V назовем *объемом I' -дерева (легких)*, а V' — *исходным объемом за-*

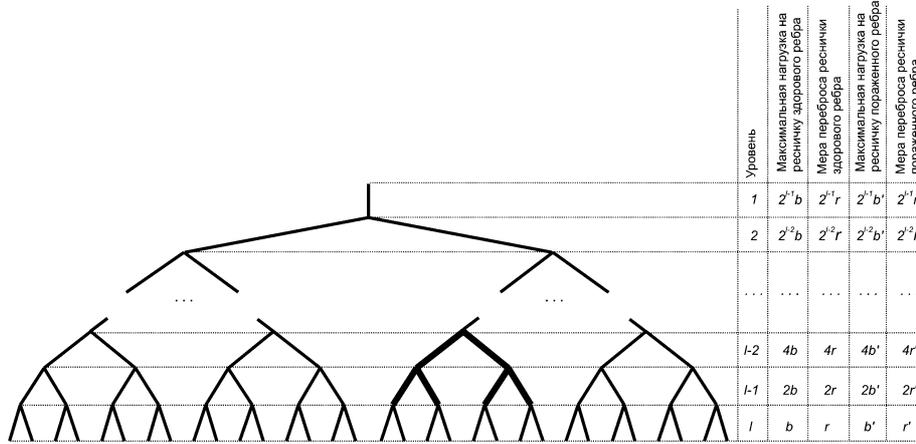


Рис. 1. Общая схема I' -дерева $D^{-1}(b, r, n, l, l', d, b', r')$ и его основные параметры. Жирным выделен очаг поражения. На данной схеме $l' = l - 2, d = 2$.

груженности I' -дерева. I' -дерево $D^{-1}(b, r, n, l, l', d, b', r')$ с исходным объемом загруженности V' обозначается $D^{-1}(b, r, n, l, l', d, b', r'; V')$.

С этим I' -деревом связывается некоторый процесс, который называется процессом транспортировки вещества по I' -дереву $D^{-1}(b, r, n, l, l', d, b', r')$. Данный процесс рассматривается с рядом допущений.

Каждая ресничка осуществляет прием вещества извне и переброс своей нагрузки на следующую ресничку с меньшим номером внутри ребра.

Прием ресничкой вещества, имеющего массу $m, m \in \mathbb{N}_0$ и $m \leq V - V'$, из внешней среды внутри ребра уровня $j, j \in \mathbb{N}_l$ осуществляется по следующим правилам, где ориентация I' -дерева считается обратной к заданной:

А₁) Если нагрузка реснички максимальна, то прием вещества не осуществляется;

Б₁) При не максимальной нагрузке m_1 первая такая ресничка осуществляет прием вещества максимально возможной массы m_2 , такой что $m_2 \leq \min(2^{l-j}\tilde{b} - m_1, m)$, где $2^{l-j}\tilde{b}$ — нагрузка данной реснички;

В₁) Следующая за ресничкой из Б₁) принимает массу m_3 , как и в Б₁), с заменой там m на $m - m_2$;

Г₁) Оставшаяся масса вещества опускается до следующей реснички с большим номером в ребре, для которой не выполняется условие А₁). Она осуществляет прием вещества по правилу Б₁) или В₁);

Д₁) Если ресничка в рассматриваемом ребре является последней, не удовлетворяющей условию А₁), то оставшаяся масса вещества делится пополам и каждая из частей вещества воспринимается соответствующими ребрами, как описано выше. Если число нечетное, то та из частей, которая на единицу больше другой, опускается на левое ребро. Если все реснички левого поддерева, инцидентного данному ребру, не могут принять все переданное им вещество, то оставшееся вещество передается правому ребру данного ребра;

Е₁) Процесс, описываемый позициями А₁)–Д₁), начинается с ребра, которое инцидентно корню (трахее).

Переброс ресничкой вещества осуществляется на соседнюю ресничку с меньшим номером внутри ребра уровня j , $j \in \mathbb{N}_l$, по следующим правилам, где ориентация I' -дерева считается прямой:

А₂) Если соседняя сверху ресничка имеет не нулевую нагрузку, то переброс с реснички не осуществляется;

Б₂) Если нагрузка реснички не превосходит ее меры переброса $2^{l-j}\tilde{r}$ и не выполнено условие А₂), то перебрасывается на соседнюю вся нагрузка реснички и считается, что ее нагрузка становится равной нулю;

В₂) Если на ресничке нагрузка m и $m > 2^{l-j}\tilde{r}$, то она перебрасывается на следующую ресничку нагрузку $2^{l-j}\tilde{r}$ и оставляет у себя нагрузку $m - 2^{l-j}\tilde{r}$.

Замечание: при перебросе вещества с реснички здорового ребра (с параметрами b и r) на ресничку пораженного (с параметрами b' и r') мерой переброса r будет величина $r = \min(r, \frac{b'}{2})$.

Если ресничка в ребре последняя, то переброс нагрузки осуществляется по правилам А₂), Б₂), В₂);

Г₂) Если ребро инцидентно корню, то переброс с наименьшей по номеру реснички осуществляется в среду по правилам Б₂) и В₂) в предположении, что среда играет роль реснички с нулевой нагрузкой;

Д₂) Если ребро не инцидентно корню, то есть его вершина инцидентна следующему ребру, то нагрузка с наименьшей по номеру реснички этого ребра передается наибольшей по номеру ресничке другого ребра по правилам А₂), Б₂), В₂).

Будем считать, что процесс транспортировки вещества осуществляется в дискретные моменты времени $t = 1, 2, 3, \dots$. В первый момент I' -дерево $D^{-1}(b, r, n, l, l', d, b', r'; V')$ имеет заданное распределение V' нагрузок по его ресничкам. Во второй момент осуществляется прием вещества массой m_1 по правилам А₁)–Е₁), и затем осуществляется переброс нагрузок с реснички на ресничку во всем I' -дереве или выброс в среду в соответствии с правилами А₂)–Д₂). А если подается масса m , не превосходящая объема I' -дерева, то та ее часть, которая не распределилась на ресничках, выбрасывается в среду.

Если в каждый момент $t = 1, 2, 3, \dots$ все реснички I' -дерева $D^{-1}(b, r, n, l, l', d, b', r'; V')$ осуществляют прием вещества нулевой массы, то такой процесс называется *процессом транспортировки вещества* по этому I' -дереву в чистой среде. При наступлении момента t , в который все реснички I' -дерева $D^{-1}(b, r, n, l, l', d, b', r'; V')$ впервые стали равными нулю, считается, что произошло *полное самоочищение* этого I' -дерева.

Под распределением нагрузки V' I' -дерева $D^{-1}(b, r, n, l, l', d, b', r'; V')$ понимается любое из возможных распределений нагрузок всех его ресничек такое, что суммарный объем их нагрузок равен V' . Ясно, что $V' \leq V$, где V — объем I' -дерева $D^{-1}(b, r, n, l, l', d, b', r')$ и $V = 2^{l-1}bnl - 2^{l'-2(d-1)}(b - b')nd$. Такие распределения называются *конфигурациями* нагрузки V' по ресничкам I' -дерева $D^{-1}(b, r, n, l, l', d, b', r')$.

Занумеруем все реснички I' -дерева $D^{-1}(b, r, n, l, l', d, b', r')$ таким образом, что ресничка с номером ijk является k -ой ресничкой j -го ребра глубины i , где $1 \leq i \leq l$, $1 \leq j \leq 2^{i-1}$, $1 \leq k \leq n$, а нумерация ребер одной глубины идет слева направо. Тогда в каждый момент t конфигурацию нагрузки $V'(t)$ в I' -дереве $D^{-1}(b, r, n, l, l', d, b', r')$ можно задать набором

$$q(t) = (q_{111}(t), q_{112}(t), \dots, q_{ijk}(t), \dots, q_{l2^{l-1}n}(t)),$$

в котором каждый элемент $q_{ijk}(t)$ равен нагрузке реснички с номером ijk в момент t , причем

$$0 \leq q_{ijk}(t) \leq 2^{l-i} \tilde{b}, \quad \sum_{111}^{l2^{l-1}n} q_{ijk}(t) = V'(t).$$

Пусть $b, k, r, c \in \mathbb{N}_0$, $b = kr + c$, где $0 \leq c < r$, тогда в процессе очищения ресничек ребра на любой фиксированной ресничке, очевидно, наступит такой момент, когда на ней останется ровно c вещества. Когда соседняя сверху ресничка станет свободной, наша ресничка перебросит ей нагрузку c . Таким образом, число тактов переброса вещества соседней ресничке равно $k + 1$, если $c > 0$, и равно k , если $c = 0$. Значит, без ограничения общности, можно рассматривать случаи, когда b кратно r .

Цепью C в I' -дереве назовем любой путь в нем от корневого ребра до конечного (листового).

Введем следующие обозначения для конфигураций цепи C :

- 1) Q_c (complete) — конфигурация, в которой все реснички имеют максимальную нагрузку;
- 2) Q_z , где $z \in \mathbb{Z}$ — конфигурация, в которой все реснички ребер с 1 до $z - 1$ уровня имеют нагрузку, не превышающую их меры переброса, а с z по l уровень — максимальную;
- 3) Q_0 — конфигурация, в которой все реснички имеют нулевую нагрузку;
- 4) Q_{tail} — конфигурация, в которой n -ая ресничка ребра уровня l имеет нулевую нагрузку, все остальные — не превышающую их меры переброса.

Рассмотрим цепь C , содержащую l ребер $a_1, a_2, \dots, a_{l-1}, a_l, a_{l+1}, \dots, a_{l'+d-1}, a_{l'+d}, a_{l'+d+1}, \dots, a_l$, с n ресничками на каждом, где l' — уровень начала очага поражения пропускной способности ресничек, d — диаметр очага поражения.

Цепь C имеет нагрузку от параметра b и меру переброса от параметра r или r' в случаях здорового ребра или ребра с патологией соответственно, то есть на ребре глубины j максимальная нагрузка

будет равна $2^{l-j}b$, $1 \leq j \leq l$, максимальная мера переброса — $2^{l-j}r$ в случаях $j = 1, 2, \dots, l' - 1$ и $j = l' + d, l' + d + 1, \dots, l$ (здоровое ребро) или $2^{l-j}r'$ в случае $j = l', l' + 1, \dots, l' + d - 1$ (ребро проходит через очаг поражения).

Теорема 1. Пусть $b, r, r', k \in \mathbb{N}$, такие что $b = kr$, $r' \leq r$, $L'(b, n, r, l, l', d, b, r')$ — время самоочищения цепи C , находящейся в конфигурации Q_c с очагом поражения пропускной способности ресничек диаметра d , начиная с уровня l' . Тогда

$$L'(b, n, r, l, l', d, b, r') = \begin{cases} k(2nl' - 2n - 1) + \\ + 2nd] \frac{b}{r'} [+ 2nk] \frac{r}{r'} [(l - l' - d + 1), l' \neq 1; \\] \frac{b}{r'} [(2nd - 1) + 2kn] \frac{r}{r'} [(l - d), l' = 1. \end{cases}$$

Утверждение 1. Если C_1 и C_2 — пораженные цепи на глубинах l'_1 и l'_2 соответственно, то при $l'_1 \geq l'_2$ имеет место следующее соотношение:

$$L'(b, r, n, l, l'_1, d, b, r') \leq L'(b, r, n, l, l'_2, d, b, r').$$

Утверждение 2. Если C_1 и C_2 — пораженные цепи на глубине l' , d_1 и d_2 — соответственно диаметры очагов, через которые они проходят, то при $d_1 \geq d_2$ имеет место следующее соотношение:

$$L'(b, r, n, l, l', d_1, b, r') \leq L'(b, r, n, l, l', d_2, b, r').$$

Рассмотрим цепь C , содержащую l ребер $a_1, a_2, \dots, a_{l-1}, a_l, a_{l+1}, \dots, a_{l'+d-1}, a_{l'+d}, a_{l'+d+1}, \dots, a_l$, с n ресничками на каждом, где l' — уровень начала очага поражения эффективности ресничек, d — диаметр очага поражения.

Цепь C имеет меру переброса от параметра r и нагрузку от параметра b или b' в случаях здорового ребра или ребра с патологией соответственно, то есть на ребре глубины j максимальная нагрузка будет $2^{l-j}b$ в случаях $j = 1, 2, \dots, l' - 1$ и $j = l' + d, l' + d + 1, \dots, l$ (здоровое ребро) или $2^{l-j}b'$ в случае $j = l', l' + 1, \dots, l' + d - 1$ (ребро проходит через очаг поражения), максимальная мера переброса — $2^{l-j}r$, $1 \leq j \leq l$.

Теорема 2. Пусть $b, b', r, k \in \mathbb{N}$, такие что $b = kr$, $b' \leq b$, $L'(b, n, r, l, l', d, b', r)$ — время самоочищения цепи C , находящейся в конфигурации Q_c с очагом поражения эффективности ресничек диаметра d , начиная с уровня l' . Тогда

$$L'(b, n, r, l, l', d, b', r) = \begin{cases} k + 2k(n(l' - 1) - 1) + 2nd + 2] \frac{b}{b'} [+ \\ \quad + 2k] \frac{r}{b'} [(n(l - l' - d + 1) - 1), l' \neq 1, r > b'; \\ k + 2k(n(l' - 1) - 1) + 2nd] \frac{b'}{r} [+ \\ \quad + 2nk(l - l' - d + 1), l' \neq 1, r \leq b'; \\ 2k] \frac{r}{b'} [(n(l - d) - 1) + 2nd + \\ \quad + 2] \frac{b}{b'} [-1, l' = 1, r > b'; \\] \frac{b'}{r} [(nd - 1)(2] \frac{b'}{r} [-1) + \\ \quad + n(l - d)(2k - 1) + nl - 1, l' = 1, r \leq b'. \end{cases}$$

Утверждение 3. Если C_1 и C_2 — пораженные цепи на глубинах l'_1 и l'_2 соответственно, то при $l'_1 \geq l'_2$ имеет место следующее соотношение:

$$L'(b, r, n, l, l'_1, d, b', r) \leq L'(b, r, n, l, l'_2, d, b', r).$$

Утверждение 4. Если C_1 и C_2 — пораженные цепи на глубине l' , d_1 и d_2 — соответственно диаметры очагов, через которые они проходят, то при $d_1 \geq d_2$ имеет место следующее соотношение:

$$L'(b, r, n, l, l', d_1, b', r) \leq L'(b, r, n, l, l', d_2, b', r).$$

Рассмотрим цепь C , содержащую l ребер $a_1, a_2, \dots, a_{l-1}, a_l, a_{l'+1}, \dots, a_{l'+d-1}, a_{l'+d}, a_{l'+d+1}, \dots, a_l$, с n ресничками на каждом, где l' — уровень начала очага поражения пропускной способности ресничек и их эффективности, d — диаметр очага поражения.

Цепь C имеет емкость от параметра b или b' и меру переброса от параметра r или r' в случаях здорового ребра или ребра с патологией соответственно, то есть на ребре глубины j максимальная нагрузка будет $2^{l-j}b$, максимальная мера переброса — $2^{l-j}r$, в случаях $j = 1, 2, \dots, l' - 1$ и $j = l' + d, l' + d + 1, \dots, l$ (здоровое ребро), или $2^{l-j}b'$ и $2^{l-j}r'$ в случае $j = l', l' + 1, \dots, l' + d - 1$ (ребро проходит через очаг поражения).

Теорема 3. Пусть $b, b', r, r', k \in \mathbb{N}$, такие что $b = kr$, $b' \leq b$, $r' \leq r$, $L'(b, n, r, l, l', d, b', r')$ — время самоочищения цепи C , находящейся в конфигурации Q_c с очагом поражения пропускной способности ресничек и их эффективности диаметра d , начиная с уровня l' . Тогда

$$L'(b, n, r, l, l', d, b', r') = \begin{cases} 2nk \lfloor \frac{r}{r'} \rfloor [(l - l' - d + 1) + 2nk(l' - 1) - k + \\ \quad + 2nd] \lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor \lfloor +2 \rfloor \lfloor \frac{r}{r'} \rfloor [-1 - 2n, l' \neq 1, r \leq b']; \\ 2nl \lfloor \frac{r}{r'} \rfloor [(k + 1) +] \lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor [(2nd - 1) - 2nl - \\ \quad - 2] \lfloor \frac{r}{r'} \rfloor [(ndk - 1) - 1, l' = 1, r \leq b']; \\ k(2nl' - 2n - 1) + 2nd \lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor \lfloor +1 + 2n \rfloor \lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor [(l - l' - d + 1) \times \\ \quad \times (\lfloor \frac{b}{b'} \rfloor \lfloor + \rfloor \lfloor \frac{r}{r'} \rfloor \lfloor - 2n(l - l' - d + 1) (\lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor \lfloor -1 \rfloor), \\ \quad l' \neq 1, r > b' > r']; \\ 2nk(l' - 1) - k + 2n(2d - 1) - 3n(l - l') + 2n \times \\ \quad \times (l - l' - d + 1) (\lfloor \frac{r}{r'} \rfloor \lfloor +1 \rfloor + 1, l' \neq 1, r > b', b' \leq r'); \\ \lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor [(2nd - 1) + 2n] \lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor [(l - d) (\lfloor \frac{b}{b'} \rfloor \lfloor + \rfloor \lfloor \frac{r}{r'} \rfloor \lfloor - \\ \quad - 2n(l - d) (2 \lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor \lfloor +1 \rfloor + 1, l' = 1, r > b' > r'); \\ 2nd + 2n(l - d) (\lfloor \frac{b}{b'} \rfloor \lfloor + \rfloor \lfloor \frac{r}{r'} \rfloor \lfloor -1 \rfloor), \\ \quad l' = 1, r > b', b' \leq r'. \end{cases}$$

Утверждение 5. Если C_1 и C_2 — пораженные цепи на глубинах l'_1 и l'_2 соответственно, то при $l'_1 \geq l'_2$ имеет место следующее соотношение:

$$L'(b, r, n, l, l'_1, d, b', r') \leq L'(b, r, n, l, l'_2, d, b', r').$$

Утверждение 6. Если C_1 и C_2 — пораженные цепи на глубине l' , d_1 и d_2 — соответственно диаметры очагов, через которые они проходят, то при $d_1 \geq d_2$ имеет место следующее соотношение:

$$L'(b, r, n, l, l', d_1, b', r') \leq L'(b, r, n, l, l', d_2, b', r'),$$

если $b' < r$ или $b' > r$ и $b - r \geq b' - 1$.

Как было показано [2], время очищения I -дерева (здоровые легкие) с начальным распределением в нем, где каждая ресничка имеет

максимальную нагрузку, равно времени очищения любой его цепи. Время очищения цепи в I -дереве не превосходит времени очищения цепи в I' -дереве с очаговым поражением пропускной способности ресничек или поражением их эффективности с условием $b' < r$, потому что при одинаковой нагрузке на ресничку очищения будет осуществляться медленнее там, где пропускная способность ниже.

В силу теорем и утверждений к ним, указанных выше, можно сделать следующие выводы.

Следствие 1. Пусть I' -дерево — дерево с круглым очаговым поражением пропускной способности ресничек или поражением их эффективности с условием $b' < r$, очаг поражения начинается на уровне l' и имеет диаметр d . Пусть каждая ресничка дерева имеет максимальную нагрузку. Тогда время самоочищения такого I' -дерева равно времени самоочищения любой цепи C , проходящей через очаг поражения.

Следствие 2. Время самоочищения I' -дерева при некруглом очаговом поражении пропускной способности ресничек или поражении их эффективности с условием $b' < r$ будет равно времени самоочищения I' -дерева при круглом очаговом поражении с диаметром d_{\min} , где d_{\min} — минимальный диаметр некруглого очага.

2. Доказательства утверждений

Пусть $b, b', r, r', k, k', c \in \mathbb{N}$, такие что $b' \leq b$, $r' \leq r$, $b = kr$, $b' = k'r' + c$, $0 \leq c < r'$.

Рассмотрим цепь C , содержащую два инцидентных ребра a_1 и a_2 с нагрузками и мерами переброса от параметров b', r' и b, r соответственно, ребро a_1 принадлежит очагу поражения, ребро a_2 — нет.

Через $R(C)$ и $R'(C)$ обозначим распределения нагрузок цепи C на указанных ребрах (рис. 2).

Лемма 1. (Очищение ресничек под очагом поражения в случае ухудшения пропускной способности ресничек.) Конфигурация $R(C)$ перейдет в конфигурацию $R'(C)$ за

$$2] \frac{r}{r'} [(k-1) + 1$$

n -ой реснички ребра a_1 снова последовательно запускаются оба подпроцесса. Так будет продолжаться пока на 1-ой ресничке ребра a_2 не останется вещества, равного ее мере переброса, а n -ая ресничка ребра a_1 не окажется пустой, то есть последовательный запуск обоих подпроцессов будет осуществлен $k - 1$ раз. Для завершения очищения реснички будет необходим еще 1 такт.

Таким образом, получаем

$$(1 + 2]_{\frac{r}{r'}}[-1)(k - 1) + 1 = 2]_{\frac{r}{r'}}[(k - 1) + 1.$$

Легко видеть, что описанный выше принцип справедлив и для ресничек с номером i , где $1 < i \leq n$. В процессе очищения i -ой реснички вещество от параметра r будет переходить на ресничку с номером $i - 1$ внутри ребра тогда, когда $(i - 1)$ -я ресничка будет иметь нулевую нагрузку. Параллельно этому на 1-ой ресничке ребра a_1 будут один за другим запускаться первый и второй подпроцессы. Таким образом, в силу параллельности выполнения второго подпроцесса и переброса вещества вверх по ресничкам полное очищение i -ой реснички наступит после запуска $k - 1$ раз последовательности из первого и второго подпроцесса (в сумме по $2]_{\frac{r}{r'}}[-1 + 1$ тактов) и одного такта для завершения очищения. Лемма доказана.

Замечание. В случае $r = r'$ получаем время очищения как в древовидных системах без патологий, как и должно быть. Действительно,

$$2]_{\frac{r}{r'}}[(k - 1) + 1 = 2(k - 1) + 1 = 2k - 1.$$

Пусть цепь C находится в конфигурации Q_{tail} .

Рассмотрим очищение ребер a_1, a_2, \dots, a_{l-1} под очагом поражения. Всего ресничек над очагом поражения $n(l - 1)$. Каждая из них будут очищаться за 1 такт в силу того, что они имеют нагрузку, не превышающую их меры переброса.

Рассмотрим очищение ребер $a_l, a_{l+1}, \dots, a_{l+d-1}$ в очаге поражения. Всего ресничек в очаге поражения nd . Очищение в них протекает следующим образом:

- последняя ресничка ребра a_{l+d-1} очистится от поступающего вещества за $2]_{\frac{r}{r'}}[-1$ тактов;

- каждая из оставшихся $nd - 1$ ресничек очистится за 1 такт в силу того, что они будут иметь нагрузку, не превышающую их меры переброса.

Рассмотрим очищение ребер $a_{l'+d}, a_{l'+d+1}, \dots, a_l$ под очагом поражения. Всего ресничек под очагом поражения $n(l - l' - d + 1)$, последняя из которых уже очищена согласно определению конфигурации Q_{tail} . После того, как $(i-1)$ -я ресничка будет иметь нулевую нагрузку, ресничка с номером i очистится за 1 шаг, где $1 \leq i \leq n(l - l' - d + 1) - 1$, в силу того, что она будет иметь нагрузку не превышающую ее меры переброса. Как только i -ая ресничка будет иметь нулевую нагрузку в следующие моменты времени все последующие реснички с номерами $j, i < j \leq n(l - l' - d + 1) - 1$, последовательно одна за другой перебросят свою нагрузку на ресничку с номером $j - 1$ за 1 такт каждая. Параллельно этому после очередного очищения последней реснички ребра $a_{l'+d-1}$ на нее поступает вещество от параметра r с 1-ой реснички ребра $a_{l'+d}$, которое очистится, как было показано выше, за $2 \lfloor \frac{r}{r'} \rfloor - 1$ тактов. Получаем, что очищение каждой последующей реснички будет происходить через каждые $2 \lfloor \frac{r}{r'} \rfloor - 1$ тактов. Из сказанного выше вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. (Очищение конфигурации Q_{tail} под очагом поражения в случае ухудшения пропускной способности ресничек.) *Очищение каждой реснички под очагом поражения занимает 1 такт, и протекает через каждые $2 \lfloor \frac{r}{r'} \rfloor - 1$ тактов.*

Рассмотрим задачу очищения цепи C с очагом поражения пропускной способности ресничек, находящуюся в конфигурации Q_c .

Доказательство теоремы 1. Под временем очищения i -ой реснички будем понимать промежуток времени с первого момента нулевой нагрузки на $(i-1)$ -ой ресничке до первого момента нулевой нагрузки i -ой реснички. Разобьем процесс очищения цепи C на 6 этапов.

Первый этап состоит в очищении ресничек ребер $a_1, a_2, \dots, a_{l'-1}$, находящихся над очагом поражения. Всего ресничек над очагом поражения $n(l' - 1)$. Очищение происходит в точности как в здоровом случае [2], а именно:

- первая ресничка ребра-трахеи a_1 очистится за k тактов;

- каждая из оставшихся $n(l' - 1) - 1$ ресничек очистится за $2k - 1$ тактов.

Очевидно, что после выполнения первого этапа очищения цепь C будет находиться в конфигурации $Q_{l'}$.

Второй этап состоит в очищении ресничек ребер $a_{l'}, a_{l'+1}, \dots, a_{l'+d-1}$, находящихся в очаге поражения. Всего ресничек в очаге поражения nd . Очищение происходит в точности как в здоровом случае [2] с нагрузкой на ней b и мерой переброса r' , а именно, каждая из ресничек очистится за $2 \lfloor \frac{b}{r'} \rfloor - 1$ тактов.

Очевидно, что после выполнения второго этапа очищения цепь C будет находиться в конфигурации $Q_{l'+d}$.

Третий этап состоит в очищении ресничек ребер $a_{l'+d}, a_{l'+d+1}, \dots, a_l$, находящихся под очагом поражения. Всего ресничек под очагом поражения $n(l - l' - d + 1)$. В данном случае реснички очищаются согласно Леммы 1 с мерой переброса от параметра r' и нагрузкой на них от параметра r , которая будет передаваться от реснички с нагрузкой от параметра b , а именно, каждая из ресничек очистится за $2 \lfloor \frac{r}{r'} \rfloor [(k - 1) + 1]$ тактов.

Очевидно, что после выполнения третьего этапа очищения цепь C будет находиться в конфигурации Q_{tail} .

Четвертый этап состоит в очищении ресничек ребер $a_{l'+d}, a_{l'+d+1}, \dots, a_l$, находящихся под очагом. n -ая ресничка ребра a_l уже очищена согласно определению конфигурации Q_{tail} . В данном случае реснички очищаются согласно Леммы 2 с нагрузкой от параметра r и мерой переброса от параметра r' , а именно, каждая из $n(l - l' - d + 1) - 1$ ресничек очистится за $2 \lfloor \frac{r}{r'} \rfloor - 1$ тактов.

Пятый этап состоит в очищении ресничек ребер $a_{l'}, a_{l'+1}, \dots, a_{l'+d-1}$, находящихся в очаге поражения. Очищение в них протекает следующим образом:

- n -я ресничка ребра $a_{l'+d-1}$ с нагрузкой от параметра r и мерой переброса от параметра r' очистится от поступающего вещества, очевидно, за $2 \lfloor \frac{r}{r'} \rfloor - 1$ тактов;
- каждая из оставшихся $nd - 1$ ресничек очистится за 1 такт в силу того, что они будут иметь нагрузку, не превышающую их меры переброса.

Шестой этап состоит в очищении ресничек ребер $a_1, a_2, \dots, a_{l'-1}$, находящихся под очагом поражения. Каждая из $n(l' - 1)$ ресничек очистится за 1 такт в силу того, что они будут иметь нагрузку, не превышающую их меры переброса.

Очевидно, что после выполнения шестого этапа очищения цепь C будет находиться в конфигурации Q_0 .

Просуммируем все времена каждого из шести этапов.

Пусть $l' \neq 1$, тогда

$$k + (n(l' - 1) - 1)(2k - 1) + nd(2) \frac{b}{r'}[-1] + n(l - l' - d + 1)(2) \frac{x}{r'}[(k - 1) + 1] + (n(l - l' - d + 1) - 1)(2) \frac{x}{r'}[-1] + (nd - 1) \cdot 1 + 2 \frac{x}{r'}[-1] + n(l' - 1) \cdot 1 = k + 2nkl' - nl' - 2nk + n - 2k + 1 + 2nd \frac{b}{r'}[-nd + 2nkl] \frac{x}{r'}[-2nkl'] \frac{x}{r'}[-2nkd] \frac{x}{r'}[+2nk] \frac{x}{r'}[-2nl] \frac{x}{r'}[+2nl'] \frac{x}{r'}[+2nd] \frac{x}{r'}[-2n] \frac{x}{r'}[+nl - nl' - nd + n + nl' - n + nd - 1 + 2] \frac{x}{r'}[-1 + 2nl] \frac{x}{r'}[-2nl'] \frac{x}{r'}[-2nd] \frac{x}{r'}[+2n] \frac{x}{r'}[-2] \frac{x}{r'}[-nl + nl' + nd - n + 1] = k(2nl' - 2n - 1) + 2nd \frac{b}{r'}[+2nk] \frac{x}{r'}[(l - l' - d + 1)].$$

Пусть $l' = 1$, тогда

$$\frac{b}{r'}[+(nd - 1)(2) \frac{b}{r'}[-1] + n(l - 1 - d + 1)(2) \frac{x}{r'}[(k - 1) + 1] + (n(l - 1 - d + 1) - 1) \times (2) \frac{x}{r'}[-1] + (nd - 1) \cdot 1 + 2 \frac{x}{r'}[-1] = \frac{b}{r'}[+2nd] \frac{b}{r'}[-nd - 2] \frac{b}{r'}[+1 + 2nk] \frac{x}{r'}[(l - d) - 2nl] \frac{x}{r'}[+2nd] \frac{x}{r'}[+nl - nd + nd - 1 + 2] \frac{x}{r'}[-1 + 2nl] \frac{x}{r'}[-2nd] \frac{x}{r'}[-2] \frac{x}{r'}[-nl + nd + 1] = \frac{b}{r'}[(2nd - 1) + 2nk] \frac{x}{r'}[(l - d)].$$
 Теорема доказана.

Доказательство утверждения 1. Если время очищения каждой реснички над очагом поражения (этапы первый и шестой) меньше, чем время очищения каждой реснички под очагом поражения (этапы третий и четвертый), то чем больше ресничек под очагом поражения, тем время очищения больше. Действительно, сравним сумму времен очищения для одной реснички первого и шестого этапов с суммой времен очищения для одной реснички третьего и четвертого этапов:
 $(2k - 1) + 1 \leq (2) \frac{x}{r'}[(k - 1) + 1] + (2) \frac{x}{r'}[-1],$
 $2k \leq 2 \frac{x}{r'}[(k - 1) + 1],$
 $0 \leq \frac{x}{r'}[.$

Что всегда верно. Утверждение доказано.

Доказательство утверждения 2. Рассмотрим две цепи C_1 и C_2 с $d_1 \geq d_2$. Без ограничения общности можно положить с $l'_1 = l'_2 = 1$. Сравним время самоочищения цепей. Рассмотрим 2 подслучая.

Если r делит r' , то и b делит r' , получим $\frac{x}{r'}$ и $\frac{b}{r'}$ — целые числа.

$$\frac{b}{r'}[(2nd_1 - 1) + 2kn] \frac{x}{r'}[(l - d_1)] \leq \frac{b}{r'}[(2nd_2 - 1) + 2kn] \frac{x}{r'}[(l - d_2)],$$

$$\begin{aligned} kr(2nd_1 - 1) + 2nkr(l - d_1) &\leq kr(2nd_2 - 1) + 2nkr(l - d_2), \\ 2nd_1 - 1 + 2nl - 2nd_1 &\leq 2nd_2 - 1 + 2nl - 2nd_2, \\ 0 &\leq 0. \end{aligned}$$

Если r не делит r' , то и b не делит r' , заменим $\lfloor \frac{r}{r'} \rfloor$ и $\lfloor \frac{b}{r'} \rfloor$ на $(\frac{r}{r'} + 1)$ и $(\frac{b}{r'} + 1)$ соответственно.

$$\begin{aligned} (\frac{b}{r'} + 1)(2nd_1 - 1) + 2kn(\frac{r}{r'} + 1)(l - d_1) &\leq (\frac{b}{r'} + 1)(2nd_2 - 1) + 2kn(\frac{r}{r'} + 1)(l - d_2), \\ 2nd_1 \frac{kr}{r'} - \frac{kr}{r'} + 2nd_1 - 1 + 2nk \frac{r}{r'} l - 2nk \frac{r}{r'} d_1 + 2nkl - 2nkd_1 &\leq 2nd_2 \frac{kr}{r'} - \frac{kr}{r'} + \\ + 2nd_2 - 1 + 2nk \frac{r}{r'} l - 2nk \frac{r}{r'} d_2 + 2nkl - 2nkd_2, \\ 2nd_1 - 2nkd_1 &\leq 2nd_2 - 2nkd_2, \\ d_1(1 - k) &\leq d_2(1 - k). \end{aligned}$$

Из-за неположительности выражения $(1 - k)$ получаем $d_1 \geq d_2$. Утверждение доказано.

Рассмотрим задачу очищения цепи C с очагом поражения эффективности ресничек, находящуюся в конфигурации Q_c .

Доказательство теоремы 2. Под временем очищения i -ой реснички будем понимать промежуток времени с первого момента нулевой нагрузки на $(i - 1)$ -ой ресничке до первого момента нулевой нагрузки i -ой реснички. Разобьем процесс очищения цепи C на 6 этапов.

Первый этап состоит в очищении ресничек ребер $a_1, a_2, \dots, a_{l'-1}$, находящихся над очагом поражения. Всего ресничек над очагом поражения $n(l' - 1)$. Очищение происходит в точности как в здоровом случае [2], а именно:

- первая ресничка ребра-трахеи a_1 очистится за k тактов;
- каждая из оставшихся $n(l' - 1) - 1$ ресничек очистится за $2k - 1$ тактов.

Очевидно, что после выполнения первого этапа очищения цепь C будет находиться в конфигурации $Q_{l'}$.

Второй этап состоит в очищении ресничек ребер $a_{l'}, a_{l'+1}, \dots, a_{l'+d-1}$, находящихся в очаге поражения. Всего ресничек в очаге поражения nd . Очищение происходит в точности как в здоровом случае [2] с нагрузкой ресничек b' и мерой переброса r , а именно, каждая из ресничек очистится за $2 \lfloor \frac{b'}{r} \rfloor - 1$ тактов.

Замечание: в случае $b' \leq r$ каждая из nd ресничек очистится за 1 такт, что не противоречит данным рассуждениям.

Очевидно, что после выполнения второго этапа очищения цепь C будет находиться в конфигурации $Q_{l'+d}$.

Третий этап состоит в очищении ресничек ребер $a_{l'+d}, a_{l'+d+1}, \dots, a_l$, находящихся под очагом поражения. Всего ресничек под очагом поражения $n(l - l' - d + 1)$. Рассмотрим два подслучая.

Пусть $r \leq b'$, тогда очищение происходит в точности как в здоровом случае [2] с нагрузкой от параметра b и мерой переброса от параметра r , а именно, каждая из ресничек очистится за $2 \lfloor \frac{b}{r} \rfloor - 1$ тактов.

Пусть $r > b'$, тогда задача сводится к задаче очищения ресничек под очагом поражения в случае ухудшений пропускной способности бронхов с ухудшением меры переброса только у 1-ой реснички ребра $a_{l'+d}$ (мера переброса становится равной b' , эта ресничка и будет считаться очагом). Получаем,

- первая ресничка ребра $a_{l'+d}$ очистится за $2 \lfloor \frac{b}{b'} \rfloor - 1$ тактов;
- каждая из оставшихся $n(l - l' - d + 1) - 1$ ресничек очистится согласно Леммы 1 с мерой переброса от параметра b' и нагрузкой на них от параметра r , которая будет передаваться от реснички с нагрузкой от параметра b , а именно, за $2 \lfloor \frac{r}{b'} \rfloor [(k - 1) + 1]$ тактов.

Очевидно, что после выполнения третьего этапа очищения цепь C будет находиться в конфигурации Q_{tail} .

Четвертый этап состоит в очищении ресничек ребер $a_{l'+d}, a_{l'+d+1}, \dots, a_l$, находящихся под очагом. n -ая ресничка ребра a_l уже очищена согласно определению конфигурации Q_{tail} . В данном случае реснички очищаются согласно Леммы 2 с нагрузкой от параметра r и мерой переброса от параметра b' , а именно, каждая из $n(l - l' - d + 1) - 1$ ресничек очистится за $2 \lfloor \frac{r}{b'} \rfloor - 1$ тактов.

Замечание: в случае $r \leq b'$ каждая из $n(l - l' - d + 1) - 1$ ресничек очистится за 1 такт, что не противоречит данным рассуждениям.

Пятый этап состоит в очищении ресничек ребер $a_{l'}, a_{l'+1}, \dots, a_{l'+d-1}$, находящихся в очаге поражения. Каждая из nd ресничек очистится за 1 такт в силу того, что они будут иметь нагрузку, не превышающую их меры переброса.

Шестой этап состоит в очищении ресничек ребер $a_1, a_2, \dots, a_{l'-1}$, находящихся под очагом поражения. Каждая из $n(l' - 1)$ ресничек

очистится за 1 такт в силу того, что они будут иметь нагрузку, не превышающую их меры переброса.

Очевидно, что после выполнения шестого этапа очищения цепь C будет находиться в конфигурации Q_0 .

Просуммируем все времена каждого из шести этапов.

Пусть $l' \neq 1$. Рассмотрим случай $r > b'$.

$$k + (n(l'-1)-1)(2k-1) + nd(2) \left\lfloor \frac{b'}{r} \right\rfloor [-1] + (2) \left\lfloor \frac{b}{b'} \right\rfloor [-1] + (n(l-l'-d+1)-1)(2) \left\lfloor \frac{r}{b'} \right\rfloor [(k-1)+1] + \\ + n(l'-1) \cdot 1 + nd \cdot 1 + (n(l-l'-d+1)-1)(2) \left\lfloor \frac{r}{b'} \right\rfloor [-1] = k + 2k(n(l'-1)-1) + 2nd + \\ + 2 \left\lfloor \frac{b}{b'} \right\rfloor [+2k] \left\lfloor \frac{r}{b'} \right\rfloor [(n(l-l'-d+1)-1)].$$

Рассмотрим случай $r \leq b'$.

$$k + (n(l'-1)-1)(2k-1) + nd(2) \left\lfloor \frac{b'}{r} \right\rfloor [-1] + n(l-l'-d+1)(2k-1) + (nl-1) \cdot 1 = \\ = k + 2knl' - 2kn - 2k - nl' + n + 1 + 2nd \left\lfloor \frac{b'}{r} \right\rfloor [-nd + 2nk(l-l'-d+1) - nl + nl' + nd - \\ - n + nl - 1] = k + 2k(n(l'-1)-1) + 2nd \left\lfloor \frac{b'}{r} \right\rfloor [+2nk(l-l'-d+1)].$$

Пусть $l' = 1$. Рассмотрим случай $r > b'$.

$$1 + (nd-1) \cdot 1 + (2) \left\lfloor \frac{b}{b'} \right\rfloor [-1] + (n(l-d)-1)(2) \left\lfloor \frac{r}{b'} \right\rfloor [(k-1)+1] + nd \cdot 1 + (n(l-d)-1)(2) \left\lfloor \frac{r}{b'} \right\rfloor [-1] = \\ = 1 + nd - 1 + 2 \left\lfloor \frac{b}{b'} \right\rfloor [-1 + 2] \left\lfloor \frac{r}{b'} \right\rfloor [(k-1)(nl-nd-1) + nl - nd - 1 + nd + 2] \left\lfloor \frac{r}{b'} \right\rfloor [(n(l-d)-1) - \\ - nl + nd + 1] = 2k \left\lfloor \frac{r}{b'} \right\rfloor [(n(l-d)-1) + 2nd + 2] \left\lfloor \frac{b}{b'} \right\rfloor [-1].$$

Рассмотрим случай $r \leq b'$.

$$\left\lfloor \frac{b'}{r} \right\rfloor [+ (nd-1)(2) \left\lfloor \frac{b'}{r} \right\rfloor [-1] + n(l-d)(2k-1) + nl - 1]. \text{ Теорема доказана.}$$

Доказательство утверждения 3. Если время очищения каждой реснички над очагом поражения (этапы первый и шестой) меньше, чем время очищения каждой реснички под очагом поражения (этапы третий и четвертый), то чем больше ресничек под очагом поражения, тем время очищения больше. Действительно, сравним сумму времен очищения для одной реснички первого и шестого этапов с суммой времен очищения для одной реснички третьего и четвертого этапов:

$$(2k-1) + 1 \leq (2) \left\lfloor \frac{r}{b'} \right\rfloor [(k-1) + 1] + 1,$$

$$2k-1 \leq 2k \left\lfloor \frac{r}{b'} \right\rfloor [-2] \left\lfloor \frac{r}{b'} \right\rfloor [+1],$$

$$0 \leq k \left\lfloor \frac{r}{b'} \right\rfloor [-] \left\lfloor \frac{r}{b'} \right\rfloor [-k + 1],$$

$$0 \leq \left\lfloor \frac{r}{b'} \right\rfloor [(k-1) - (k-1)],$$

$$0 \leq (k-1) \left\lfloor \frac{r}{b'} \right\rfloor [-1].$$

Каждая из скобок неотрицательна, что доказывает утверждение.

Доказательство утверждения 4. Если время очищения каждой реснички в очаге поражения (этапы второй и пятый) меньше, чем время очищения каждой реснички под очагом поражения (этапы третий

и четвертый), то чем больше ресничек под очагом поражения, тем время очищения больше. Действительно, сравним сумму времен очищения для одной реснички второго и шестого этапов с суммой времен очищения для одной реснички третьего и четвертого этапов:

$$(2) \lfloor \frac{b'}{r} \rfloor [-1] + 1 \leq (2) \lfloor \frac{r}{b'} \rfloor [(k-1) + 1] + 1,$$

$$0 \leq \lfloor \frac{r}{b'} \rfloor [(k-1) - \lfloor \frac{b'}{r} \rfloor] + 1.$$

Так как $b' \leq b$, тогда $\lfloor \frac{b'}{r} \rfloor \leq \lfloor \frac{b}{r} \rfloor = k$. В силу предыдущего утверждения имеем

$$0 \leq \lfloor \frac{r}{b'} \rfloor [(k-1) - (k-1)] \leq \lfloor \frac{r}{b'} \rfloor [(k-1) - \lfloor \frac{b'}{r} \rfloor] + 1.$$

Утверждение доказано.

Рассмотрим задачу очищения цепи C с очагом поражения пропускной способности и эффективности ресничек, находящуюся в конфигурации Q_c .

Доказательство теоремы 3. Под временем очищения i -ой реснички будем понимать промежуток времени с первого момента нулевой нагрузки на $(i-1)$ -ой ресничке до первого момента нулевой нагрузки i -ой реснички. Разобьем процесс очищения цепи C на 6 этапов.

Первый этап состоит в очищении ресничек ребер $a_1, a_2, \dots, a_{l'-1}$, находящихся над очагом поражения. Всего ресничек над очагом поражения $n(l'-1)$. Очищение происходит в точности как в здоровом случае [2], а именно:

- первая ресничка ребра-трахеи a_1 очистится за k тактов;
- каждая из оставшихся $n(l'-1) - 1$ ресничек очистится за $2k - 1$ тактов.

Очевидно, что после выполнения первого этапа очищения цепь C будет находиться в конфигурации $Q_{l'}$.

Второй этап состоит в очищении ресничек ребер $a_{l'}, a_{l'+1}, \dots, a_{l'+d-1}$, находящихся в очаге поражения. Всего ресничек в очаге поражения nd . Очищение происходит в точности как в здоровом случае [2] с нагрузкой от параметра b' и мерой переброса от параметра r' , а именно, каждая из ресничек очистится за $2 \lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor [-1]$ тактов.

Замечание: в случае $b' \leq r$ каждая из nd ресничек очистится за 1 такт, что не противоречит данным рассуждениям.

Очевидно, что после выполнения второго этапа очищения цепь C будет находиться в конфигурации $Q_{l'+d}$.

Третий этап состоит в очищении ресничек ребер $a_{l'+d}, a_{l'+d+1}, \dots, a_l$, находящихся под очагом поражения. Всего ресничек под очагом поражения $n(l - l' - d + 1)$. Рассмотрим два подслучая.

Пусть $r \leq b'$, в данном случае реснички очищаются согласно Леммы 1 с мерой переброса от параметра r' и нагрузкой на них от параметра r , которая будет передаваться от реснички с нагрузкой от параметра b , а именно, каждая из ресничек очистится за $2 \lfloor \frac{r}{r'} \rfloor [(k-1) + 1]$ тактов.

Пусть $r > b'$, в данном случае реснички очищаются согласно Леммы 1 с мерой переброса от параметра r' и нагрузкой на них от параметра b' , которая будет передаваться от реснички с нагрузкой от параметра b , а именно, каждая из ресничек очистится за $2 \lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor [(\lfloor \frac{b}{b'} \rfloor - 1) + 1]$ тактов.

Очевидно, что после выполнения третьего этапа очищения цепь S будет находиться в конфигурации Q_{tail} .

Четвертый этап состоит в очищении ресничек ребер $a_{l'+d}, a_{l'+d+1}, \dots, a_l$, находящихся под очагом. n -ая ресничка ребра a_l уже очищена согласно определению конфигурации Q_{tail} . Рассмотрим два подслучая.

Пусть $b' \geq r$, в данном случае реснички очищаются согласно Леммы 2 с нагрузкой от параметра r и мерой переброса r' , а именно, каждая из $n(l - l' - d + 1) - 1$ ресничек очистится за $2 \lfloor \frac{r}{r'} \rfloor [-1]$ тактов.

Пусть $b' < r$, в данном случае реснички очищаются согласно Леммы 1 с мерой переброса от параметра r' и нагрузкой на них от параметра b' , которая будет передаваться от реснички с нагрузкой от параметра r , а именно, каждая из $n(l - l' - d + 1)$ ресничек очистится за $2 \lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor [(\lfloor \frac{r}{r'} \rfloor - 1) + 1]$ тактов.

Замечание: в случае $b' \leq r'$ каждая из $n(l - l' - d + 1) - 1$ ресничек очистится за $2 \lfloor \frac{r}{r'} \rfloor [-1]$ такт, что не противоречит данным рассуждениям.

Пятый этап состоит в очищении ресничек ребер $a_l, a_{l+1}, \dots, a_{l+d-1}$, находящихся в очаге поражения. Рассмотрим 2 подслучая.

В случае $b' < r$ каждая ресничка очистится за 1 такт в силу того, что они будут иметь нагрузку, не превышающую их меры переброса.

В случае $b' \geq r$ очищение в них протекает следующим образом:

- n -я ресничка ребра $a_{l'+d-1}$ с нагрузкой от параметра r и мерой переброса от параметра r' очистится, очевидно, за $2\lfloor \frac{r}{r'} \rfloor - 1$ тактов;
- каждая из остальных $nd - 1$ ресничек очистятся за 1 такт в силу того, что они будут иметь нагрузку, не превышающую их меры переброса.

Шестой этап состоит в очищении ресничек ребер $a_1, a_2, \dots, a_{l'-1}$, находящихся под очагом поражения. Каждая из $n(l' - 1)$ ресничек очистится за 1 такт в силу того, что они будут иметь нагрузку, не превышающую их меры переброса.

Очевидно, что после выполнения шестого этапа очищения цепь C будет находиться в конфигурации Q_0 .

Просуммируем все времена каждого из шести этапов.

Пусть $r \leq b'$. Рассмотрим случай $l' \neq 1$.

$$k + (n(l' - 1) - 1)(2k - 1) + nd(2\lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor - 1) + n(l' - d + 1)(2\lfloor \frac{r}{r'} \rfloor [(k - 1) + 1] + \\ + n(l' - d + 1)(2\lfloor \frac{r}{r'} \rfloor - 1) + 2\lfloor \frac{r}{r'} \rfloor - 1 + (nd - 1) \cdot 1 + n(l' - 1) \cdot 1 = k + 2nkl' - \\ - 2nk - 2k - nl' - n + 1 + 2nd\lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor [-nd + 2nk] \frac{r}{r'} [(l' - d + 1) - 2n] \frac{r}{r'} [(l' - d + 1) + \\ + n(l' - d + 1) + 2n] \frac{r}{r'} [(l' - d + 1) - n(l' - d + 1) + 2] \frac{r}{r'} [-1 + nd - 1 + \\ + nl' - n = 2nk] \frac{r}{r'} [(l' - d + 1) + 2nk(l' - 1) - k + 2nd] \frac{b'}{r'} [+2] \frac{r}{r'} [-1 - 2n.$$

Рассмотрим случай $l' = 1$.

$$\lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor [(nd - 1)(2\lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor - 1) + n(l - d)(2\lfloor \frac{r}{r'} \rfloor [(k - 1) + 1] + 2\lfloor \frac{r}{r'} \rfloor - 1 + (nd - 1) \cdot 1 + \\ + n(l - d)(2\lfloor \frac{r}{r'} \rfloor - 1)] = \lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor [+2nd] \frac{b'}{r'} [-nd - 2] \frac{b'}{r'} [+1 + 2nlk] \frac{r}{r'} [-2nl + nl - 2ndk] \frac{r}{r'} [+ \\ + 2nd] \frac{r}{r'} [-nd + 2] \frac{r}{r'} [-1 + nd - 1 + 2nl] \frac{r}{r'} [-nl - 2nd] \frac{r}{r'} [+nd = 2nl] \frac{r}{r'} [(k + 1) + \\ +] \frac{b'}{r'} [(2nd - 1) - 2nl - 2] \frac{r}{r'} [(ndk - 1) - 1.$$

Пусть $r > b'$. Рассмотрим случай $l' \neq 1$ и подслучай $b' > r'$.

$$k + (n(l' - 1) - 1)(2k - 1) + nd(2\lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor - 1) + n(l' - d + 1)(2\lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor [\lfloor \frac{b}{b'} \rfloor - 1] + 1) + \\ + n(l' - 1) \cdot 1 + nd \cdot 1 + n(l' - d + 1)(2\lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor [\lfloor \frac{r}{r'} \rfloor - 1] + 1) = k + 2nkl' - 2nk - \\ - 2k - nl' + n + 1 + 2nd\lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor [-nd + 2n(l' - d + 1)] \frac{b'}{r'} [\cdot] \frac{b}{b'} [-2n] \frac{b'}{r'} [(l' - d + 1) + \\ + n(l' - d + 1) + nl' - n + nd + 2n(l' - d + 1)] \frac{b'}{r'} [\cdot] \frac{r}{r'} [-2n] \frac{b'}{r'} [(l' - d + 1) + \\ + n(l' - d + 1) = k(2nl' - 2n - 1) + 2nd] \frac{b'}{r'} [+1 + 2n] \frac{b'}{r'} [(l' - d + 1) (\lfloor \frac{b}{b'} \rfloor +) \frac{r}{r'}] - \\ - 2n(l' - d + 1) (\lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor - 1).$$

Рассмотрим подслучай $b' \leq r'$.

$$k + (n(l' - 1) - 1)(2k - 1) + nd + n(l' - d + 1) \cdot 1 + nl' - n + nd + n(l' - d + 1) \times \\ \times (2\lfloor \frac{r}{b'} \rfloor - 1) = k + 2nkl' - nl - 2nk + n - 2k + 1 + nd + 2n(l' - d + 1) - nl +$$

$$+nl' + nd - n + nl' - n + nd + 2n] \frac{r}{b'} [(l - l' - d + 1) - nl + nl' + nd - n = \\ = 2nk(l' - 1) - k + 2n(2d - 1) - 3n(l - l') + 2n(l - l' - d + 1) (\lfloor \frac{r}{b'} \rfloor + 1) + 1.$$

Рассмотрим случай $l' = 1$ и подслучай $b' > r'$.

$$\lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor + (nd - 1)(2) \lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor [-1] + n(l - d)(2) \lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor (\lfloor \frac{b}{b'} \rfloor [-1] + 1) + nd + n(l - d) \times \\ \times (2) \lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor (\lfloor \frac{r}{r'} \rfloor [-1] + 1) = \lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor [+ 2nd] \lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor [-nd - 2] \lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor [+1 + 2n(l - d)] \lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor [\cdot] \lfloor \frac{b}{b'} \rfloor [- \\ - 2n] \lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor [(l - d) + n(l - d) + nd + 2n(l - d)] \lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor [\cdot] \lfloor \frac{r}{r'} \rfloor [-2n] \lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor [(l - d) + n(l - d) = \\ = \lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor [(2nd - 1) + 2n] \lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor [(l - d) (\lfloor \frac{b}{b'} \rfloor [+] \frac{r}{r'} \lfloor \cdot \rfloor) - 2n(l - d)(2) \lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor [+1] + 1.$$

Рассмотрим подслучай $b' \leq r'$.

$$nd + n(l - d)(2) \lfloor \frac{b}{b'} \rfloor [-1] + nd + n(l - d)(2) \lfloor \frac{r}{r'} \rfloor [-1] = 2nd + 2n(l - d) (\lfloor \frac{b}{b'} \rfloor [+] \frac{r}{r'} \lfloor \cdot \rfloor [-1]).$$

Теорема доказана.

Доказательство утверждения 5. Если время очищения каждой реснички над очагом поражения (этапы первый и шестой) меньше, чем время очищения каждой реснички под очагом поражения (этапы третий и четвертый), то чем больше ресничек под очагом поражения, тем время очищения больше. Действительно, сравним сумму времен очищения для одной реснички первого и шестого этапов с суммой времен очищения для одной реснички третьего и четвертого этапов:

Рассмотрим случай $r \leq b'$.

$$2k - 1 + 1 \leq 2 \lfloor \frac{r}{r'} \rfloor [(k - 1) + 1 + 2] \lfloor \frac{r}{r'} \rfloor [-1], \\ 0 \leq \lfloor \frac{r}{r'} \rfloor [(k - 1) +] \lfloor \frac{r}{r'} \rfloor [-k], \\ 0 \leq k \lfloor \frac{r}{r'} \rfloor [-k], \\ 0 \leq k (\lfloor \frac{r}{r'} \rfloor [-1]).$$

Что всегда верно из-за неотрицательности каждого из сомножителей.

Рассмотрим случай $r > b'$.

$$2k - 1 + 1 \leq 2 \lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor (\lfloor \frac{b}{b'} \rfloor [-1] + 1 + 2) \lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor (\lfloor \frac{r}{r'} \rfloor [-1] + 1), \\ 0 \leq \lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor (\lfloor \frac{b}{b'} \rfloor [-2 +] \frac{r}{r'} \lfloor \cdot \rfloor) + 1 - k.$$

Так как $b \geq r > b'$, то $\lfloor \frac{b}{r} \rfloor = k \leq \lfloor \frac{b}{b'} \rfloor$, тогда

$$0 \leq \lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor [(k - 2 +] \frac{r}{r'} \lfloor \cdot \rfloor) + 1 - k.$$

Минимальное значение выражения $\lfloor \frac{b'}{r'} \rfloor$ равно 1. Имеем

$$0 \leq k - 2 + \lfloor \frac{r}{r'} \rfloor [+1 - k], \\ 0 \leq \lfloor \frac{r}{r'} \rfloor [-1].$$

Что всегда верно. Утверждение полностью доказано.

Доказательство утверждения 6. Если время очищения каждой реснички в очаге поражения (этапы второй и пятый) меньше, чем вре-

мя очищения каждой реснички под очагом поражения (этапы третий и четвертый), то чем больше ресничек под очагом поражения, тем время очищения больше. Действительно, сравним сумму времен очищения для одной реснички второго и шестого этапов с суммой времен очищения для одной реснички третьего и четвертого этапов:

Рассмотрим случай $r \leq b'$.

$$2]_{\frac{b'}{r'}}[-1 + 2]_{\frac{r}{r'}}[-1 \leq 2]_{\frac{r}{r'}}[(k-1) + 1 + 2]_{\frac{r}{r'}}[-1, \\]_{\frac{b'}{r'}}[\leq]_{\frac{r}{r'}}[(k-1) + 1.$$

Максимальное значение выражения слева от знака неравенства достигается при $r' = 1$, тогда получаем

$$b' \leq r(k-1) + 1,$$

$$b' \leq kr - r + 1,$$

$$b' - 1 \leq b - r.$$

Рассмотрим случай $r > b'$.

$$2]_{\frac{b'}{r'}}[-1 + 1 \leq 2]_{\frac{b'}{r'}}[(\lfloor \frac{b}{b'} \rfloor [-1) + 1 + 2]_{\frac{b'}{r'}}[(\lfloor \frac{r}{r'} \rfloor [-1) + 1, \\ 0 \leq]_{\frac{b'}{r'}}[\cdot]_{\frac{b}{b'}}[+]_{\frac{b'}{r'}}[(\lfloor \frac{r}{r'} \rfloor [-1).$$

Каждое из слагаемых неотрицательно, что полностью доказывает утверждение.

Заключение

В данной работе сформулирована модель легких, даны определения очага поражения, диаметра очага, минимального и максимального диаметра очага, сформулирована модель функционирования легких с очаговым поражением в виде алгоритма приема и переброса ресничкой вещества.

Получено описание временной сложности процесса самоочищения легких в чистой среде с очаговым поражением пропускной способности ресничек, с очаговым поражением эффективности ресничек и с очаговым поражением пропускной способности ресничек и их эффективности одновременно.

Было показано, что чем выше уровень поражения, тем выше время самоочищения легких с очаговым поражением пропускной способности ресничек и (или) их эффективности. Время самоочищения легких с очаговым поражением пропускной способности или их

эффективности растёт с уменьшением диаметра поражения. В случае одновременного поражения пропускной способности ресничек и их эффективности для последнего утверждения необходимо выполнение условия, что мера переброса здоровых ресничек больше эффективности поражённых ресничек.

Было доказано, что время самоочищения легких с круглым очаговым поражением пропускной способности ресничек или поражением их эффективности с условием, что мера переброса здоровых ресничек больше эффективности поражённых ресничек, где каждая ресничка легких имеет максимальную нагрузку, равно времени очищения любой цепи в дереве легких, проходящей через его очаг поражения. Время самоочищения легких при некруглом очаговом поражении пропускной способности ресничек или поражением их эффективности с условием, что мера переброса здоровых ресничек больше эффективности поражённых ресничек, будет равно времени самоочищения легких при круглом очаговом поражении с минимальным диаметром некруглого очага поражения.

Список литературы

- [1] Гераськина Ю. Г. Об одной автоматной модели в биологии // Дискретная математика. 2007. Т. 19, вып. 3. С. 122–139.
- [2] Гераськина Ю. Г. Модель самоочищения легочных структур // Интеллектуальные системы. 2002–2003. Т. 7, вып. 1–4. С. 41–54.
- [3] Гераськина Ю. Г. Модель процесса дыхания живых организмов // Интеллектуальные системы. 2003. Т. 8, вып. 1–4. С. 429–456.
- [4] Weibel E. R. Morphometry of the Human Lung // Springer-Verlag, 1963.