О слоистости булевых функций и функций k-значной логики

Т. С. Членова

В статье вводится понятие слоистости полных систем в P_k, $k \geqslant 2$. Получена оценка сверху слоистости произвольной полной системы в P_2. В случае P_k, $k \geqslant 3$, произведено сведение проблемы конечности слоистости полных систем к проблеме конечности слоистости систем Слупецкого. Также приведен довольно широкий класс систем Слупецкого, слоистость которых конечна.

Ключевые слова: булева функция, функция k-значной логики, полная система, сложность, слоистость.

Введение

В данной статье изучается слоистость — мера сложности схем из функциональных элементов. Понятие сложности схем из функциональных элементов [1] можно рассматривать с разных точек зрения. Одна из них — это принятие за сложность схемы количества элементов в этой схеме [2]. Другая — исследование глубины схем [3]. В этой работе рассматривается сложность схем из функциональных элементов в несколько ином смысле. Рассмотрим схему над некоторой конечной полной системой [1] в $P_k, k \geqslant 2$. Для каждого элемента из данной полной системы рассмотрим множество всех схем, которые можно построить над системой, состоящей из одного этого элемента. Составляем бесконечную полную систему из всех таких схем и считаем глубину данной схемы из функциональных элементов над полученной бесконечной полной системой. Называем эту характеристику схемы слоистостью этой схемы. Через слоистость схем из функциональных элементов, реализующих некоторую функцию из P_k, определяется слоистость этой функции. Далее определяется слоистость полных систем в P_k. Данный подход к пониманию сложности возник в процессе работы специального семинара «Нейронные сети» кафедры математической теории интеллектуальных систем (МаТИС) механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова. В. С. Половников показал в [4], что любую нейронную схему без памяти можно представить схемой над бесконечным множеством элементов, состоящим из линейных функций (констант, умножителей на константу и сумматоров с любым числом входов) и двух фиксированных нелинейных функций, причем схема эта будет иметь нелинейную глубину [4] не больше двух. Следовательно, любую нейронную схему можно представить схемой конечной слоистости над указанной системой.

Оказывается, что в случае булевых функций слоистость любой полной системы конечна, более того, она не больше 5. В случае P_k, $k \geqslant 3$, произведено сведение проблемы конечности слоистости произвольных полных систем к проблеме конечности слоистости систем Слупецкого. Также приведен довольно широкий класс систем Слупецкого, слоистость которых конечна.

1. Постановка задачи и формулировка результатов

Пусть $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ — полная система в $P_k, k \geqslant 2$. Назовем блоком B над $\{g_i\}$ схему с одним выходом над системой $\{g_i\}$. Обозначим $G_i = \{B | B\text{— блок над } \{g_i\}\}$ и $\widetilde{G} = \cup_{i=1}^{n} G_i$.

Определение 1. Слоистостью схемы ϕ с одним выходом над системой $\widetilde{G}$ в $P_k, k \geqslant 2$ назовем число $S_G(\phi)$, равное глубине этой схемы.

Определение 2. Слоистостью функции $f \in P_k$ над полной системой G в $P_k, k \geqslant 2$ называется число $S_G(f) = \min_{\phi \in \Phi} S_G(\phi)$, где Φ — множество всех схем, реализующих функцию f над системой $\widetilde{G}$.

Определение 3. Слоистостью полной системы G в $P_k, k \geqslant 2$ будем называть число $S(G)$, равное максимуму слоистостей всех функций

$f \in P_k$ над G , если множество чисел $\{S_G(f) | f \in P_k\}$ ограничено. Если же это множество чисел является неограниченным, то будем считать слоистость системы равной бесконечности.

Цель данной работы — исследование слоистостей полных систем в $P_k, k \geqslant 2$.

Начнем со случая P_2. Сначала рассмотрим случай полных систем из P_2, состоящих из функций, зависящих от двух переменных (функций из $P_2^{(2)}$). Для этого случая верна теорема:

Теорема 1. *Любая полная система G в $P_2^{(2)}$ имеет слоистость, не превышающую четырех.*

Замечание 1. *Существует полная система функций от двух переменных, слоистость которой равна четырем.*

Далее рассмотрим произвольные полные системы в P_2. Доказана следующая теорема:

Теорема 2. *Любая полная система G в P_2 имеет слоистость, не превышающую пяти.*

Перейдем к исследованию случая $P_k, k \geqslant 3$.

Определение 4. Система Слупецкого в $P_k, k \geqslant 3$, — система, состоящая из всех функций, зависящих от одной переменной, и существенной функции [2], принимающей все k значений.

Согласно теореме Слупецкого, система Слупецкого в $P_k, k \geqslant 3$, является полной.

Определение 5. Системой Слупецкого, соответствующей данной существенной функции из $P_k, k \geqslant 3$, назовем систему, состоящую из этой функции и всех функций одной переменной в P_k.

Теорема 3. *Пусть G — полная система в $P_k, k \geqslant 3$. Если в G есть существенная функция g, принимающая все k значений, такая что соответствующая ей система Слупецкого имеет конечную слоистость, то слоистость системы G конечна.*

Следующая теорема показывает, что для любого $k \geqslant 3$ в P_k существует достаточно широкий класс существенных функций, принимающих все k значений, таких, что соответствующие им системы Слупецкого имеют конечную слоистость.

Теорема 4. *Пусть G — система Слупецкого в P_k, $k \geqslant 3$, $g(x_1, \ldots, x_n) \in G$ — существенная функция, принимающая k значений. Пусть существуют номера i и j, $i < j$, $i, j \in [1, n]$, а так же набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_s \in Z_k$, такой, что $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{j-1}, x_j, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n) = \max(x_i, x_j)$ при $x_i, x_j \in \{0, 1\}$. Тогда система G имеет конечную слоистость.*

2. Доказательство результатов

Доказательство теоремы 1.

Замечание 2. *Эту теорему достаточно доказать для минимальных полных систем, то есть для базисов. Это следует из того, что при добавлении в полную систему новых функций, ее слоистость может только уменьшиться.*

Перечислим все функции из P_2, зависящие от двух переменных, с точностью до перестановки аргументов: $x \mid y$, $x \downarrow y$, $x \to y$, $x > y$, $\overline{x}$, $x + y$, $x \leftrightarrow y$, $x \vee y$, $x \& y$, 0, 1, x. Все обозначения функций взяты из [1].

Рассмотрим таблицу принадлежности этих функций пяти предполным классам T_0, T_1, S, L, M:

(x, y)	$x \mid y$	$x \downarrow y$	$x \to y$	$x > y$	$\overline{x}$	$x + y$	$x \leftrightarrow y$	$x \vee y$	$x \& y$	0	1
$(0, 0)$	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1
$(0, 1)$	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1
$(1, 0)$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
$(1, 1)$	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1
T_0	−	−	−	+	−	+	−	+	+	+	−
T_1	−	−	+	−	−	−	+	+	+	−	+
S	−	−	−	−	+	−	−	−	−	−	−
L	−	−	−	−	+	+	+	−	−	+	+
M	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+

Таблица 1.

Функция x принадлежит всем предполным классам.

Используя теорему о функциональной полноте ([1], стр. 40), рассмотрим всевозможные базисы в P_2, состоящие из функций, зависящих от двух переменных:

1) $\{x \mid y\}$, $\{x \downarrow y\}$.

2) базис содержит функцию $x \to y$. Тогда он должен содержать также функцию, не принадлежащую T_1. Все базисы такого вида: $\{x \to y,\, 0\}$, $\{x \to y,\, x + y\}$, $\{x \to y,\, \overline{x}\}$, $\{x \to y,\, x > y\}$.

3) базис содержит функцию $x > y$. Тогда он должен содержать также функцию, не принадлежащую T_0. Все базисы такого вида, исключая перечисленные ранее: $\{x > y, 1\}$, $\{x > y, x \leftrightarrow y\}$, $\{x > y, \overline{x}\}$.

4) базис содержит функцию $\overline{x}$. Тогда он должен содержать также функцию, не принадлежащую L. Все базисы такого вида, исключая перечисленные ранее: $\{\overline{x}, x \vee y\}$, $\{\overline{x}, x \& y\}$. Эти системы являются полными, так как функции $x \& y$ и $x \vee y$ также не принадлежат классу S.

5) базис содержит функцию $x + y$. Тогда он должен содержать также функцию, не принадлежащую T_0, и функцию, не принадлежащую L. Все базисы такого вида, исключая перечисленные ранее: $\{x + y,\, x \vee y,\, 1\}$, $\{x + y,\, x \& y,\, 1\}$, $\{x + y,\, x \leftrightarrow y,\, x \& y\}$, $\{x + y,\, x \leftrightarrow y,\, x \vee y\}$.

6) базис содержит функцию $x \leftrightarrow y$. Тогда он должен содержать также функцию, не принадлежащую T_1, и функцию, не принадлежащую L. Все базисы такого вида, исключая перечисленные ранее: $\{x \leftrightarrow y,\, x \vee y,\, 0\}$, $\{x \leftrightarrow y,\, x \& y,\, 0\}$.

7) функции $x \vee y$, $x \& y$, 0, 1, x принадлежат предполному классу M, следовательно, из них невозможно составить ни одного базиса.

Все перечисленные базисы имеют слоистость не более 4. Это следует из лемм 1–11:

Лемма 1. *Базисы* $\{x \mid y\}$ *и* $\{x \downarrow y\}$ *имеют слоистость, равную единице.*

Доказательство очевидно, так как функции $x \mid y$ и $x \downarrow y$ Шефферовские.

Лемма 2. *Базис* $\{x \to y, g\}$, *где* $g \notin T_1$ *— функция двух переменных, имеет слоистость, не превышающую трех.*

Доказательство. Так как система $\{x \to y, g\}$ полная, то из нее можно получить константу 0, причем для этого потребуется схема слоистости k. Любую функцию можно представить схемой над базисом $\{x \to y, 0\}$ слоистости не больше, чем 2. Для любой функции f возьмем ее реализацию схемой указанного вида и заменим элемент 0 в ней подсхемой, реализующей функцию 0 схемой над базисом $\{x \to y, g\}$. Получим представление функции f схемой над базисом $\{x \to y, g\}$ слоистости не больше, чем $k + 1$.

Рассмотрим все функции g от двух переменных, не принадлежащие T_1, и для каждой из них найдем значение k.

1) $g(x, y) = 0$. $k = 1$.

2) $g(x, y) = x + y$. $x + x = 0$. $k = 1$.

3) $g(x, y) = \overline{x}$. $\overline{x \to x} = 0$. $k = 2$.

4) $g(x, y) = x > y$. $x > x = 0$. $k = 1$.

5) $g(x, y) = x \mid y$. $x \mid x$ — Шефферовская функция. $k = 1$.

6) $g(x, y) = x \downarrow y$. $x \downarrow x$ — Шефферовская функция. $k = 1$.

Таким образом, всегда $k \leqslant 2$. Следовательно, слоистость базиса $\{x \to y,\ g\}$, где $g \notin T_1$ — функция 2 переменных, не превышает 3. Лемма доказана.

Лемма 3. *Базис $\{x > y, g\}$, где $g \notin T_0$ — функция двух переменных, имеет слоистость, не превышающую трех.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.

Лемма 4. *Базис $\{\overline{x}, x \vee y\}$ имеет слоистость, не превышающую четырех.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет ДНФ [1] вида $K_1 \vee \ldots \vee K_k$, $k \geqslant 0$, где $K_i = x_{j_1}^{\sigma_1} \& \ldots \& x_{j_{m_i}}^{\sigma_{m_i}}$.

Преобразуем коньюнкцию K_i:

$K_i = x_{j_1}^{\sigma_1} \& \ldots \& x_{j_{m_i}}^{\sigma_{m_i}} = \overline{x_{j_1}^{\overline{\sigma_1}} \vee \ldots \vee x_{j_{m_i}}^{\overline{\sigma_{m_i}}}}$.

Тогда функцию f можно представить схемой вида, показанного на рис. 1.

Слоистость этой схемы не больше 4, а в силу произвольности выбора f, и слоистость базиса $\{\overline{x},\ x \vee y\}$ не больше 4. Лемма доказана.

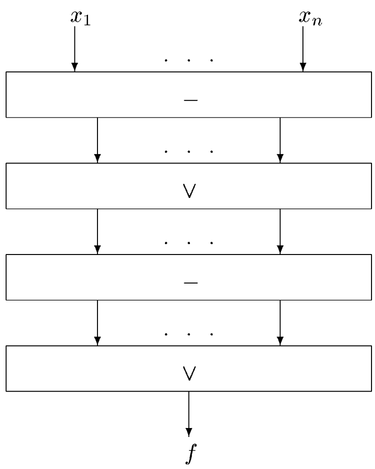


Рис. 1.

Лемма 5. *Базис* $\{\overline{x}, x\&y\}$ *имеет слоистость, не превышающую четырех.*

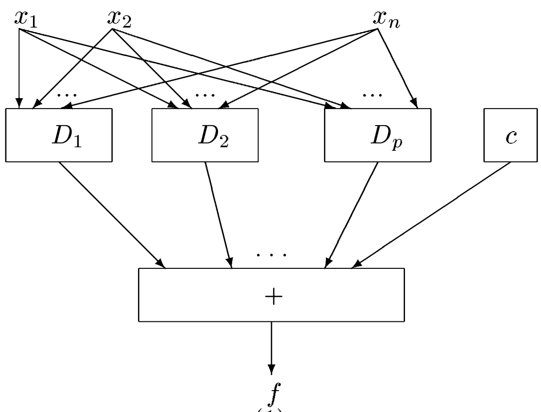
Доказательство аналогично доказательству леммы 4.

Лемма 6. *Базис* $\{x+y, x \vee y, 1\}$ *имеет слоистость, не превышающую двух.*

Доказательство. Докажем, что $(x+y) \vee z = (x \vee z) + (y \vee z) + z$:
$z = 0 \Rightarrow (x+y) = (x) + (y)$ — верно;
$z = 1 \Rightarrow 1 = 1 + 1 + 1$ — верно.

Используя это правило, мы можем любую функцию f над базисом $\{x+y, 1, x \vee y\}$ представить в виде $f = D_1 + \ldots + D_p + c$, $c \in \{0, 1\}$, $p \geqslant 0$ где $D_i = x_{j_1} \vee \ldots \vee x_{j_{p_i}}$, $p_i \geqslant 0$, $i \in [1, n]$, то есть схемой вида, показанного на рис. 2.

Докажем это представление индукцией по количеству элементов в схеме. Если в схеме 1 элемент, то она уже имеет указанный вид. Пусть утверждение верно при количестве элементов не более k. Докажем при количестве элементов, равном $k+1$. Пусть последний элемент в схеме —



(1)

Рис. 2.

1) $+$. Для двух подсхем, поступающих на входы последнего элемента, выполнено предположение индукции. Следовательно, и вся схема имеет вид (1).

2) 1. Тогда схема имеет вид (1).

3) $\vee$. Для двух подсхем, поступающих на входы последнего элемента выполнено предположение индукции. Тогда

$f = (D_1^1 + \ldots + D_{p_1}^1 + c_1) \vee (D_1^2 + \ldots + D_{p_2}^2 + c_2)$.

Докажем, что $(D_1^1 + \ldots + D_{k_1}^1) \vee (D_1^2 + \ldots + D_{k_2}^2) = D_1 + \ldots + D_k$, где $D_i^l = x_{j_1}^l \vee \ldots \vee x_{j_{k_i}}^l$, $l = 1, 2$ или $D_i^l = 1$, индукцией по $q = \max(k_1, k_2)$. $q = 1$ — верно. Предположим, что утверждение верно при $q = n$, докажем при $q = n + 1$.

$f = (D_1^1 + \ldots + D_{n+1}^1) \vee (D_1^2 + \ldots + D_{n+1}^2) = (D_{n+1}^1 \vee (D_1^2 + \ldots + D_{n+1}^2)) + ((D_1^1 + \ldots + D_n^1) \vee (D_1^2 + \ldots + D_{n+1}^2)) + (D_1^2 + \ldots + D_{n+1}^2) = (D_{n+1}^1 \vee D_{n+1}^2) + (D_{n+1}^1 \vee (D_1^2 + \ldots + D_n^2)) + D_{n+1}^1 + ((D_1^1 + \ldots + D_n^1) \vee D_{n+1}^2) + ((D_1^1 + \ldots + D_n^1) \vee (D_1^2 + \ldots + D_n^2)) + (D_1^1 + \ldots + D_n^1) + (D_1^2 + \ldots + D_{n+1}^2)$. Здесь некоторые D_k^j могут быть равны 0.

По предположению индукции, каждое из слагаемых представляется в виде $D_1 + \ldots + D_k$, значит, и все выражение представляется в этом виде.

Тогда функция f представляется в виде (1).

Следовательно, функция f имеет слоистость не более 2, а в силу произвольности выбора f, и слоистость базиса $\{x + y,\ x \vee y,\ 1\}$ не больше 2. Лемма доказана.

Лемма 7. *Базис* $\{x + y, x\&y, 1\}$ *имеет слоистость, не превышающую двух.*

Доказательство. Известно тождество:

$(x + y)\&z = (x\&z) + (y\&z)$

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству леммы 6, только в данном случае для произвольной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет место представление $f = K_1 + \ldots + K_p + c$, где $c \in \{0, 1\}, p \geqslant 0$, а $K_i = x_{j_1}\& \ldots \&x_{j_{p_i}}, p_q \geqslant 0, q \in [1, n]$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Базис* $\{x + y, x \leftrightarrow y, x\&y\}$ *имеет слоистость, не превышающую двух.*

Доказательство. Верно тождество: $1 = x \leftrightarrow x$. Любая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ представляется в виде $f = K_1 + \ldots + K_k + c$, где $c \in 0, 1, k \geqslant 0$, а $K_i = x_{j_1}\& \ldots \&x_{j_{p_i}}, p_q \geqslant 0, q \in [1, n]$. Значит, представляется и в виде $f = K_1 + \ldots + K_k + (x \leftrightarrow x)$ или $f = K_1 + \ldots + K_k$ то есть ее можно представить схемой слоистости не более 2 над базисом $\{x + y,\ x \leftrightarrow y,\ x\&y\}$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Базис* $\{x + y, x \leftrightarrow y, x \vee y\}$ *имеет конечную слоистость, не превышающую двух.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 8.

Лемма 10. *Базис* $\{x \leftrightarrow y, x \vee y, 0\}$ *имеет слоистость, не превышающую двух.*

Доказательство. Докажем, что $(x \leftrightarrow y) \vee z = (x \vee z) \leftrightarrow (y \vee z)$:

$z = 0 \Rightarrow (x \leftrightarrow y) = (x) \leftrightarrow (y)$ — верно;

$z = 1 \Rightarrow 1 = 1 \leftrightarrow 1$ — верно.

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству леммы 6, только в данном случае для произвольной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет место представление $f = D_1 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow D_p \leftrightarrow c$, где $c \in \{0, 1\}, p \geqslant 0$, а $D_i = x_{j_1} \vee \ldots \vee x_{j_{p_i}}, p_q \geqslant 0, q \in [1, n]$. Лемма доказана.

Лемма 11. *Базис* $\{x \leftrightarrow y, x\&y, 0\}$ *имеет слоистость, не превышающую двух.*

Доказательство. Докажем, что $(x \leftrightarrow y)\&z = (x\&z) \leftrightarrow (y\&z) \leftrightarrow z$:

$z = 0 \Rightarrow 0 = 0 \leftrightarrow 0 \leftrightarrow 0$ — верно;

$z = 1 \Rightarrow (x \leftrightarrow y) = (x) \leftrightarrow (y) \leftrightarrow 1$ — верно.

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству леммы 6, только в данном случае для произвольной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет место представление $f = K_1 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow K_p \leftrightarrow c$, где $c \in 0, 1, p \geqslant 0$, а $K_i = x_{j_1}\& \ldots \&x_{j_{p_i}}, p_q \geqslant 0, q \in [1, n]$. Лемма доказана.

Получили, что слоистость произвольного базиса в P_2, состоящего из функций двух переменных, не больше 4. А значит (по замечанию 2) и слоистость произвольной полной системы в P_2, состоящей из функций, зависящих от двух переменных, не больше 4. Теорема доказана.

Доказательство замечания 1. Рассмотрим базис $\{\overline{x}, x \vee y\}$. Предположим, что его слоистость не больше 3. Найдем общий вид всех функций, которые представляются схемами слоистости не более 3 над базисом $\{\overline{x}, x \vee y\}$:

1. Слоистость схемы не больше 1. Тогда эта схема реализует функцию вида $\overline{x}$ или $x_{i_1} \vee \ldots \vee x_{i_k}, k \geqslant 1$.

2. Слоистость схемы не больше 2. Последний элемент в схеме —

1) $\neg$. На его вход поступает выход подсхемы слоистости не более 1. Тогда схема реализует функцию вида x_i или $\overline{x}_{i_1}\& \ldots \&\overline{x}_{i_k}, k \geqslant 1$.

2) $\vee$. Последний слой на каждом из путей в схеме состоит из элементов $\vee$. Рассмотрим подсхему нашей схемы, представляющую собой объединение последних слоев каждого пути в нашей схеме; входы подсхемы — входы на эти слои, выход — выход нашей схемы. Так как функция $x \vee y$ обладает свойствами коммутативности и ассоциативности, то эта подсхема реализует функцию $y_1 \vee \ldots \vee y_s, s \geqslant 1$. На входы этой подсхемы поступают выходы подсхем слоистости не более 1. Тогда вся схема реализует функцию вида $D = x_{i_1}^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_{i_k}^{\sigma_k}, k \geqslant 1$.

3. Слоистость схемы не больше 3. Последний элемент в схеме —

1) $\neg$. На его вход поступает выход подсхемы слоистости не более 2. Тогда схема реализует функцию вида $x_{i_1} \vee \ldots \vee x_{i_k}, k \geqslant 1$ или $x_{i_1}^{\sigma_1}\& \ldots \&x_{i_k}^{\sigma_k}, k \geqslant 1$.

2) $\vee$. Последний слой на каждом из путей в схеме состоит из элементов $\vee$. Рассмотрим подсхему нашей схемы, представляющую собой объединение последних слоев каждого пути в нашей схеме; входы подсхемы — входы на эти слои, выход — выход нашей схемы. Так как функция $x \vee y$ обладает свойствами коммутативности и ассоциативности, то эта подсхема реализует функцию $y_1 \vee \ldots \vee y_s, s \geqslant 1$. На входы этой подсхемы поступают выходы подсхем слоистости не более 2. Тогда вся схема реализует функцию вида $D = x_{i_1}^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_{i_k}^{\sigma_k} \vee K_1 \vee \ldots \vee K_l, k \geqslant 1, l \geqslant 0$, где $K_i = \overline{x}_{j_1} \& \ldots \& \overline{x}_{j_{p_i}}, i \geqslant 1, p_i \geqslant 1$.

Получили, что функции, реализуемые схемами слоистости не более 3 над базисом $\{\overline{x}, x \vee y\}$, могут иметь два вида: $x_{i_1}^{\sigma_1} \& \ldots \& x_{i_k}^{\sigma_k}, k \geqslant 1$ или $D = x_{i_1}^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_{i_k}^{\sigma_k} \vee K_1 \vee \ldots \vee K_l, k \geqslant 1, l \geqslant 0$ где $K_i = \overline{x}_{j_1} \& \ldots \& \overline{x}_{j_{p_i}}, i \geqslant 1, p_i \geqslant 1$.

Рассмотрим функцию $f = (x_1 \& x_2 \& x_3) \vee (\overline{x}_1 \& \overline{x}_2 \& \overline{x}_3)$. Ее значение равно 1 только на наборах $(0,0,0)$ и $(1,1,1)$. Предположим. что слоистость этой функции не более 3 над базисом $\{\overline{x}, x \vee y\}$. Тогда ее можно записать в 1) или 2) виде:

1) $x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2} \& x_3^{\sigma_3}$

$f(1,1,1) = 1 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1$

$f(0,0,0) = 1 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$

Притиворечие.

2) $(a \& \overline{x}_1 \& \overline{x}_2 \& \overline{x}_3) \vee (b \& \overline{x}_1 \& \overline{x}_2) \vee (c \& \overline{x}_1 \& \overline{x}_3) \vee (d \& \overline{x}_2 \& \overline{x}_3) \vee (e \& x_1 \vee g \& x_2) \vee (h \& x_3 \vee i \& \overline{x}_1) \vee (j \& \overline{x}_2) \vee (k \& \overline{x}_3)$.

$f(1,0,0) = 0 \Rightarrow d \vee e \vee j \vee k = 0;$

$f(0,1,0) = 0 \Rightarrow c \vee g \vee i \vee k = 0;$

$f(1,0,0) = 0 \Rightarrow b \vee h \vee i \vee j = 0 \Rightarrow$

$b = c = d = e = g = h = i = j = k = 0;$

$f(0,0,0) = 1 \Rightarrow a = 1;$

$f(1,1,1) = 1 \Rightarrow 0 = 1.$

Противоречие.

Следовательно, функцию $f = (x_1 \& x_2 \& x_3) \vee (\overline{x}_1 \& \overline{x}_2 \& \overline{x}_3)$ нельзя представить схемой слоистости не более 3 над базисом $\{\overline{x}, x \vee y\}$. Значит, слоистость базиса $\{\overline{x}, x \vee y\}$ не менее 4. А по теореме 1 его слоистость не более 4. Замечание доказано.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Для этого докажем леммы 12 и 13:

Лемма 12. *Любая полная система G в P_2 имеет конечную слоистость.*

Доказательство. Пусть константы 0 и 1 имеют слоистости k_0 и k_1 соответственно над полной системой $\{g_1, \ldots, g_n\}$,

$k = \max(k_0, k_1)$.

$0 \notin T_1, 0 \notin S, 1 \notin T_0$. В системе $\{g_1, \ldots, g_n\}$ должны быть нелинейная и немонотонная функции.

1. Пусть в системе $\{g_1, \ldots, g_n\}$ есть функция g_1 такие, что $g_1 \notin L$, $g_1 \notin M$. Тогда система $\{0, 1, g_1\}$ является полной. Любую функцию f можно представить схемой над системой $\{0, 1, g_1\}$ слоистости не более, чем 2. Элементы 0 и 1 в этой схеме заменим подсхемами, реализующими функции 0 и 1 соответственно над системой $\{g_1, \ldots, g_n\}$. Тогда слоистость схемы, реализующей функцию f над системой $\{g_1, \ldots, g_n\}$, будет не более $k + 1$. В силу произвольности выбора функции f слоистость системы $\{g_1, \ldots, g_n\}$ не больше $k + 1$.

2. Пусть в системе $\{g_1, \ldots, g_n\}$ есть функции g_1 и g_2 такие, что $g_1 \notin M, g_1 \in L, g_2 \notin L, g_2 \in M$. По леммам о немонотонной и нелинейной функции [1] подстановкой констант и отождествлением переменных из функций g_1 и g_2 можно получить соответственно функции $g'_1(x) = \overline{x}$ и $g'_2(x_1, x_2)$ — нелинейную функцию от двух переменных. Система $\{0, 1, g'_1, g'_2\}$ является полной в P_2, и состоит из функций двух переменных. По теореме 1 эта полная система имеет конечную слоистость s. Возьмем представление произвольной функции f схемой слоистости $\leqslant s$ над этой системой. Схемы, реализующие функции g'_1 и g'_2 над системой $\{0, 1, g_1, g_2\}$ имеют слоистость не более 2, следовательно, слоистость функции f над системой $\{0, 1, g_1, g_2\}$ не больше $s+1$. Заменим элементы 0 и 1 в этой схеме подсхемами, реализующими функции 0 и 1 схемами над системой $\{g_1, \ldots, g_n\}$, и получим, что f имеет слоистость не более $s + k$ над системой $\{g_1, \ldots, g_n\}$. В силу произвольности выбора функции f слоистость системы $\{g_1, \ldots, g_n\}$ не больше $s + k$, то есть конечна.

Лемма доказана.

Введем вспомогательное определение.

Определение 6. Назовем функцию $g'(x,y) \in P_2$ 2-сужением функции $g(x_1,\dots,x_m)$ относительно отождествления $(i_1,\dots,i_s)$, если функция $g'(x,y)$ получается из функции $g(x_1,\dots,x_m)$ отождествлением переменных $x_{i_1} = \dots = x_{i_s} = x$ и $x_{i_{s+1}} = \dots = x_{i_m} = y, i_l \neq i_k$ при $l \neq k, s \in [0,m], i_p \in [1,m]$ для любого $p \in [1,m]$.

Лемма 13. *$f(x_1,\dots x_m) \in S$ тогда и только тогда, когда для любого s из $[0,m]$ для любого отождествления $(i_1,\dots,i_s)$ 2-сужение функции f относительно этого отождествления есть самодвойственная функция одной переменной.*

Доказательство. Необходимость очевидна, так как отождествление переменных — это подстановка самодвойственной функции, класс самодвойственных функций замкнут, и не существует самодвойственных функций, существенно зависящих от двух переменных.

Докажем достаточность. Предположим, что $f \notin S$. Тогда $\exists$ набор $\tilde{\sigma} = (\sigma_1,\dots\sigma_m)$ такой, что $f(\tilde{\sigma}) = f(\bar{\tilde{\sigma}})$.

Без ограничения общности, $\sigma_1 = \dots = \sigma_s = 0, \sigma_{s+1} = \dots = \sigma_m = 1$ и 2-сужение функции f относительно отождествления $(1,\dots,s)$ равно x.

$f(x,\dots,x,y,\dots,y) = x \Rightarrow f(0,\dots,0,1,\dots 1) = 0,\ f(1,\dots 1, 0,\dots,0) = 1$, что противоречит равенству $f(\tilde{\sigma}) = f(\bar{\tilde{\sigma}})$.

Противоречие доказывает лемму.

Доказательство теоремы 2. При доказательстве леммы 12 было получено, что слоистость любой полной системы G не больше $s+k$, где s — слоистость полной системы, состоящей из функций двух переменных, а k — максимум слоистостей функций 0 и 1 над системой G.

По теореме 1, $s \leqslant 4$.

Рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть в системе G есть функция $g_1 : g_1(x,\dots,x) = 0$. Тогда в ней есть также функция $g_2 : g_2(x,\dots,x) = 1$ или $g_2(x,\dots,x) = \overline{x}$ (иначе все функции из полной системы принадлежат классу T_0, что невозможно).

В первом случае функции 0 и 1 имеют слоистость не более 1 над системой G и слоистость системы G не больше 5.

Во втором случае функции 0 и 1 имеют слоистость не более 2 над системой G. Тогда слоистость системы G не больше 6. Рассмотрим этот случай.

1) Пусть $g_2 \notin L$. Тогда система $\{0, 1, g_2\}$ является полной. Любую функцию f можно представить схемой над системой $\{0, 1, g_2\}$ слоистости не более, чем 2. Элементы 0 и 1 в этой схеме заменим подсхемами, реализующими функции 0 и 1 соответственно над системой G. Тогда слоистость схемы, реализующей функцию f над системой G, будет не более $k + 1 \leqslant 3$. В силу произвольности выбора функции f слоистость системы G не больше 3.

2) Пусть $g_2 \in L$ Тогда в системе G есть функция g_3, такая что $g_3 \notin L$. По лемме о нелинейной функции подстановкой констант и отождествлением переменных из функций g_3 можно получить функцию $g'_3(x_1, x_2)$ — нелинейную функцию от двух переменных. Обозначим $g'_2(x) = g_2(x, \ldots, x) = \overline{x}$. Система $\{0, 1, g'_2(x), g'_3(x, y)\}$ является полной в P_2 и состоит из функций, зависящих от двух переменных. По теореме 1 эта полная система имеет слоистость $s \leqslant 4$, причем (по леммам 1–11) $s = 4$ только тогда, когда $g'_3(x, y) = x \vee y$ или $g'_3(x, y) = x \vee y$. Рассмотрим случай $s = 4$. Возьмем представление произвольной функции f схемой слоистости 4 над системой $\{0, 1, g'_2(x), g'_3(x, y)\}$. Схема имеет вид, показанный на рис. 3 (см. леммы 4, 5).

Схемы, реализующие функции $g'_2(x)$ и $g'_3(x)$ над системой $\{0, 1, g_2, g_3\}$ имеют слоистость 2, следовательно, слоистость функции f над системой $\{0, 1, g_1, g_2\}$ не больше 5. Заменим элементы 0 и 1 в этой схеме подсхемами, реализующими функции 0 и 1 схемами над системой G, и получим схему на рис. 4.

Слоистость этой схемы не более 5. В силу произвольности выбора функции f слоистость системы G не больше 5.

2. Пусть в системе G есть функция $g_1 : g_1(x, \ldots, x) = 1$. Аналогично предыдущему пункту, слоистость системы G не больше 5.

3. Для любой функции g из системы G либо $g(x, \ldots, x) = x$, либо $g(x, \ldots, x) = \overline{x}$. Если бы $g_i(x, \ldots, x) = x$ для все $g_i \in G$, то все функции из полной системы G принадлежали бы T_0, чего быть не может. Следовательно, в этой системе существует функция $g_1 : g_1(x, \ldots, x) = \overline{x}$.

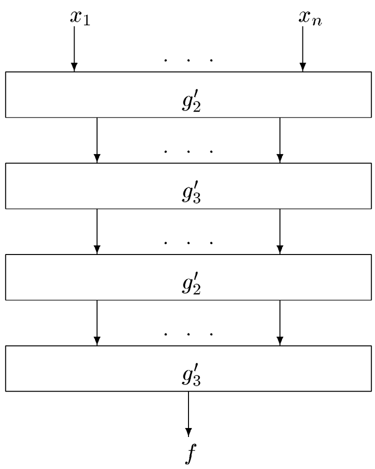


Рис. 3.

$g_1 \notin T_0, g_1 \notin T_1, g_1 \notin M$.

1) $g_1 \notin S, g_1 \in L$

Тогда $g_1(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^m a_i x_i + c$. $g_1(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_m}) = \sum_{i=1}^m a_i x_i + \sum_{i=1}^m a_i + c$. Так как $g_1 \notin S$, то существует набор $\tilde{\sigma}$, такой, что $g_1(\tilde{\sigma}) = g_1(\overline{\tilde{\sigma}})$. Следовательно, $\sum_{i=1}^m a_i = 0$, то есть среди чисел $a_i, i = 1, \ldots m$, четное число ненулевых. Значит, $g_1(x_1, \ldots, x_m) = a_{i_1} x_{i_1} + \ldots a_{i_{2k}} x_{i_{2k}} + c, i_j \in [1, m], j \in [1, 2k]; i_s \neq i_l$ при $s \neq l$. $g_1(x, \ldots, x) = c$. Это противоречит тому, что $g_1(x, \ldots, x) \in \{x, x+1\}$.

2) $g_1 \notin S, g_1 \notin L$. В этом случае система $\{g_1\}$ является полной и ее слоистость равна 1.

3) $g_1 \in S$. Тогда в полной системе G есть также функция $g_2 \notin S$.

Представим функцию $g_2(x_1, \ldots x_m)$ в виде полинома Жегалкина [1]: $g_2(x_1, \ldots x_m) = K_1 + \ldots + K_s + c, c \in \{0, 1\}, s \geqslant 0$, $K_i = x_{j_1} \cdot \ldots \cdot x_{j_{n_i}}, n_i \in [1, m], j_l \in [0, m], l \in [1, n_i], j_p \neq j_q$, если $p \neq q$. $g_2(x, \ldots x) = \bigoplus_{i=1}^s x + c$. Так как $g_2(x, \ldots, x) = x + c$, то s должо быть нечетным. Это свойство (нечетность количества коньюнкций в представлении функции полиномом Жегалкина) останется верным для любого отождествления переменных в g_2. Значит, при 2-сужении функции g_2 относительно любого отождествления переменных $(i_1, \ldots, i_p)$, могут

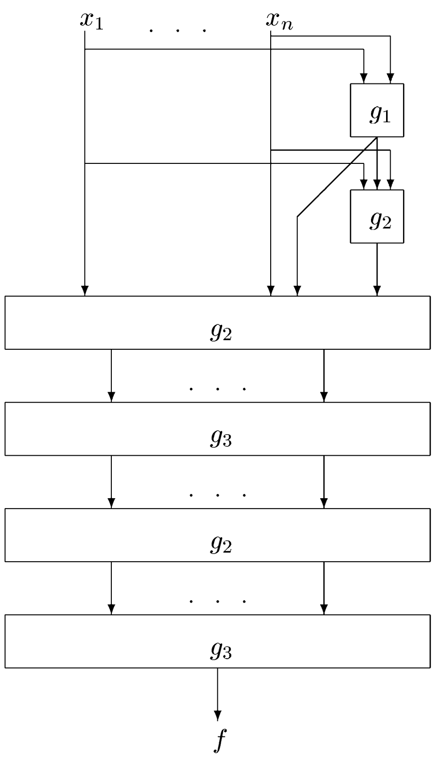


Рис. 4.

получиться только такие функции: $xy + c, xy + x + y + c, x + c, y + c$, где $c \in \{0, 1\}$.

a) Пусть каким-либо 2-сужением функции g_2 будет функция $xy{+}1$ (или $xy{+}x{+}y{+}1$). Функция $xy{+}1$ (или $xy{+}x{+}y{+}1$) Шефферовская, значит система $\{g_2\}$ является полной и имеет слоистость, равную 1. Следовательно, слоистость системы G равна 1.

b) Пусть каким-либо 2-сужением функции g_2 будет функция xy. Система $\{\overline{x}, xy\}$ является полной и имеет слоистость, равную 4, значит система $\{g_1, g_2\}$ является полной и имеет слоистость не более 4. Следовательно, слоистость системы G не больше 4.

c) Пусть каким-либо 2-сужением функции g_2 будет функция $xy + x + y = x \vee y$. Система $\{\overline{x}, xy + x + y\}$ является полной и имеет слоистость, равную 4, значит система $\{g_1, g_2\}$ является полной и имеет слоистость не более 4. Следовательно, слоистость системы G не больше 4.

d) Предположим, что 2-сужением функции g_2 относительно любого отождествления переменных $(i_1, \ldots, i_s)$ будет функция $x+c$ или $y+c, c \in \{0,1\}$. По лемме 12, функция $g_2 \in S$, что противоречит условию пункта 3).

Значит, слоистость любой полной системы при $k=3$ не больше 5. Следовательно, не существует полных систем, имеющих слоистость больше 5. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3.

Возьмем произвольную полную систему G в P_k, где $k \geqslant 3$. Пусть $g(x_1, \ldots, x_n) \in G$ — существенная функция, принимающая все k значений, такая, что соответствующая ей система Слупецкого $H = \{g(x_1, \ldots, x_n)\} \cup \{h(x) | h(x) \in P_k^{(1)}\}$ имеет конечную слоистость N. Пусть все функции одной переменной имеют слоистость не более M над системой G. Возьмем произвольную функцию $f \in P_k$. Представим ее схемой Φ слоистости не более N над H. Очевидно, любую схему над G можно привести к виду, в котором у ее элементов не будет разветвляющихся выходов, а слоистость не станет больше. Пусть схема Φ_1 получается из схемы Φ таким преобразованием.

Рассмотрим произвольный путь в схеме Φ_1. Если в нем есть несколько подряд идущих элементом с одним входом: $h_1, h_2, \ldots, h_k$, то их можно заменить элементом, реализующим функцию $h(x) = h_k(h_{k-1}(\ldots h_2(h_1(x)) \ldots))$. При таком преобразовании слоистость схемы не увеличится. Такую же операцию произведем для всех путей в схеме. Слоистость получившейся схемы над H не более, чем N. Поэтому в каждом пути этой схемы не более N слоев, состоящих из элементов, реализующих существенную функцию $g(x_1, \ldots, x_n)$.

Теперь элементы h_i заменим подсхемами, реализующими функции $h_i(x)$ над G. Так как $g \in G$, получим схему над G. В ней выберем произвольный путь. Он проходит через не более, чем N подсхем, реализующих функции $h_i(x)$ над G. Слоистость каждой такой подсхемы над G не больше, чем M. Остальные части этого пути представляют собой слои, состоящие из элементов, реализующих существенную функцию $g(x_1, \ldots, x_n)$. Их не больше N. Следовательно, количество слоев в выбранном пути не больше $N + N \cdot M$. В силу произвольности выбора пути, слоистость схемы, а значит, и слоистость функции f не больше $N + N \cdot M$. В силу произвольности выбора функции, слоистость полной системы G не больше $N + N \cdot M$, а значит, конечна. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4.

Пусть G — система Слупецкого в $P_k, k \geqslant 3$, $g(x_1, \ldots, x_n)$ — существенная функция, принимающая k значений. Покажем, пользуясь индукцией, как с помощью этой системы можно получить все функции из P_k и оценим их слоистость.

1) Базис индукции. Получим из G все функции, принимающие два значения.

Обозначим

$$x \vee_{01} y = g(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{j-1}, y, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n)$$

— это максимум на множестве $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$.

Введем функцию $j_0(x) = 1$ при $x = 0$ и 0, иначе.

Тогда $x \&_{01} y = j_0(j_0(x) \vee_{01} j_0(y))$, есть минимум на множестве $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$. Пусть $h(x_1, \ldots, x_m), h \not\equiv \text{const}$, — произвольная функция, принимающая два значения, 0 и 1; тогда

$$h(x_1, \ldots, x_m) = \bigvee_{\sigma_1 \ldots \sigma_m} j_{\sigma_1}(x_1) \& \ldots \& j_{\sigma_m}(x_m) \& h(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) =$$
$$= \bigvee_{\sigma_1 \ldots \sigma_m}{}^{01} j_{\sigma_1}(x_1) \&_{01} \ldots \&_{01} j_{\sigma_m}(x_m) \&_{01} h(\sigma_1, \ldots, \sigma_m).$$

Таким образом, функция $h(x_1, \ldots, x_m)$ может быть получена из системы G, причем ее слоистость над G не больше 5. Так как G содержит все функции одной переменной, принимающие любые два значения, то мы можем также получить из G все функции, принимающие любые два значения, используя схемы слоистости не более 6.

2) Пусть из G построены все функции, принимающие не более $l - 1$ значений, $l - 1 < k$. Покажем, что тогда можно построить все функции из P_k, принимающие l значений.

Для дальнейшего доказательства необходима

Лемма 14. *Если $g(x_1, \ldots, x_n)$ — существенная функция, принимающая не менее $l, l \geqslant 3$ значений, то найдутся n подмножеств $G_1, \ldots, G_n$ множества Z_k таких, что $1 \leqslant\mid G_i \mid\leqslant l-1, (i = 1, \ldots, n)$ и на множестве наборов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \in G_i$, то есть на $G_1 \times \ldots \times G_n$, функция f принимает l значений.*

Доказательство приведено в [1] стр. 57.

Возьмем функцию $g(x_1, \ldots, x_n)$. На основании леммы 1 найдутся n подмножеств $G_1, \ldots, G_n$ таких, что $\mid G_i \mid\leqslant l-1 (i = 1, \ldots, n)$, и на $A = G_1 \times \ldots \times G_n$ функция f принимает l значений $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{l-1}$. Пусть эти значения принимаются соответственно на наборах из A:

$$\tilde{\alpha}^{(0)} = (\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \ldots, \alpha_n^{(0)}),$$
$$\tilde{\alpha}^{(1)} = (\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \ldots, \alpha_n^{(1)}),$$
$$\ldots$$
$$\tilde{\alpha}^{(l-1)} = (\alpha_1^{(l-1)}, \alpha_2^{(l-1)}, \ldots, \alpha_n^{(l-1)}),$$

то есть
$$f(\tilde{\alpha}^{(0)}) = \eta_0, f(\tilde{\alpha}^{(1)}) = \eta_1, \ldots, f(\tilde{\alpha}^{(l-1)}) = \eta_{l-1}.$$

Покажем, каким образом из функций системы G можно построить произвольную функцию $h(x_1, \ldots, x_m)$, принимающую значения $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{l-1}$.

В самом деле, функцию $h(x_1, \ldots, x_m)$ можно задать при помощи таблицы 2, в которой $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$. Определим функции $\psi_j(x_1, \ldots, x_m)$, $(j = 1, \ldots, n)$, принимающие не более $l-1$ значений, так, как указано в таблице 3.

$x_1, \ldots, x_m$	$h(x_1, \ldots, x_m)$
$\sigma_1, \ldots, \sigma_m$	$\eta_{i(\tilde{\sigma})}$

Таблица 2.

Тогда

$h(x_1, \ldots, x_m) = f(\psi_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \psi_n(x_1, \ldots, x_m)),$ так как

$x_1,\dots,x_m$	$\psi_j(x_1,\dots,x_m)$
$\sigma_1,\dots,\sigma_m$	$\alpha_j^{i(\tilde\sigma)}$

Таблица 3.

$$f(\psi_1(\sigma_1,\dots,\sigma_m),\dots,\psi_n(\sigma_1,\dots,\sigma_m)) = f(\alpha_1^{i(\tilde\sigma)},\dots,\alpha_n^{i(\tilde\sigma)}) = \eta_{i(\tilde\sigma)},$$
$$h(\sigma_1,\dots,\sigma_m) = \eta_{i(\tilde\sigma)}.$$

Если слоистость всех функций $\psi_j(x_1,\dots,x_m),(j = 1,\dots,n)$ не больше N_{l-1}, то слоистость функции $h(x_1,\dots,x_m)$ не больше $N_{l-1}+1$.

Имея все функции с заданными l значениями $\eta_0,\eta_1,\dots,\eta_{l-1}$, можно в случае $l < k$ получить при помощи функции одной переменной остальные функции с l значениями, причем их слоистость будет не больше $N_{l-1}+2$.

Повторяем этот процесс до тех пор, пока не дойдем до $l = k$, и тогда построим все функции из P_k. Их слоистость не больше, чем

$$N_{k-1}+2 = N_{k-2}+4 = \ldots = N_2 + 2(k-2) = 6 + 2(k-2) = 2k+4.$$

Следовательно, слоистость системы G не больше $2k+4$, то есть конечна. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность Часовских А. А. за постановку задачи и помощь в работе.

Список литературы

[1] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2003.

[2] Лупанов О. Б. О синтезе некоторых классов управляющих систем // Проблемы кибернетики. Вып. 10. М.: Физматгиз, 1963. С. 63–97.

[3] Касим-Заде О. М. О глубине булевых функций при реализации схемами над произвольным базисом // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2007. № 1. С. 18–21.

[4] Половников В. С. О некоторых характеристиках нейронных схем // Интеллектуальные системы. 2004. Т. 8, вып. 1–4. С. 121–145.