О состояниях конденсации автоматной модели легких в чистой среде

Ю. Г. Чернова

В статье предложена автоматная модель процесса самоочищения легких и продолжается изучение свойств её диаграммы Мура. Выделен особый класс состояний этой диаграммы, а именно те состояния, которые имеют наибольшее число предшественников в чистой среде. В работе представлено критериальное описание таких состояний, их количество, а также найдено число прямых предшественников каждого состояния конденсации.

Ключевые слова: автомат, диаграмма Мура, лёгкие, процесс самоочищения, состояние конденсации.

Введение

В предлагаемой работе продолжается изучение функционирования легких человека, начатое в работах [2], [3] и [4]. В качестве главной функции легких рассматривается свойство их самоочищения как от внутреннего секрета, так и от поступающего извне вещества в легкие. В работе [2] установлено, что процесс самоочищения легких может быть промоделирован с помощью автоматов. Здесь мы изучаем свойства таких автоматов.

Легкие образуют древовидную структуру бронхов, в которых имеются реснички, играющие роль эскалаторного механизма вывода как внутреннего секрета, так и привнесенного извне вещества во внешнюю среду. Бронхи имеют разные пропускные способности и разную эффективность ресничек. Чем выше от самых мелких бронхов, тем мощнее механизм передачи вещества изнутри вовне.

Предполагается, что в момент t распределено некоторое количества вещества по ресничкам легких. Тогда в момент $t+1$ по определенным правилам происходит перемещение вещества в легких с помощью ресничек по направлению к трахее. Этот процесс продолжается до полного освобождения легких от этого вещества.

Возникает задача построения модели легочного механизма самоочищения как в условиях чистой среды, так и в условиях возможного запыления легких из среды в процессе дыхания, а также задача изучения свойств этой модели.

Ранее автором была построена такая модель процесса самоочищения запыленных легких в предположении чистой среды [3], в которой оно функционирует. Как отмечено выше, автором было показано, что такая модель является автоматной, и потому разные свойства процесса самоочищения могут быть исследованы с помощью изучения соответствующих автоматов.

Основной характеристикой автоматов, как известно [1], является его диаграмма Мура, построение и изучение свойств которой для модели легких означало бы установление свойств процесса их самоочищения.

В предлагаемой работе проводится изучение этой диаграммы Мура. В качестве характерных состояний диаграммы выбраны те состояния, которые имеют наибольшее число предшественников. Такие состояния называются состояниями конденсации. Содержательно, это те состояния, для которых предыстория наиболее неопределена.

Основными результатами предлагаемой работы являются критериальное описание таких состояний конденсации, нахождение количества этих состояний, а также получение оценок для количества их предшественников.

1. Основные понятия, постановка задач и результаты

Представим легкие полным дихотомическим ориентированным к корню деревом, которое будем называть I-*деревом* и обозначать D^{-1}, со следующими параметрами.

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел и l, $l \in \mathbb{N}$, считаем глубиной этого I-дерева. Полагаем, что ребро I-дерева D^{-1}, инцидентное корню, имеет глубину 1.

Каждое ребро из D^{-1} разделено на n, $n \in \mathbb{N}$, равных частей, называемых *ресничками*, и занумерованных числами i, $i = 1, 2, \ldots, n$, возрастающими в направлении, обратном ориентации ребра.

Припишем каждому ребру глубины j, $j = 1, 2, \ldots, l$, два числа $2^{l-j}b$ и $2^{l-j}r$, где $b, r \in \mathbb{N}$ и $r \leqslant b$, называемых *максимальной нагрузкой* и *мерой переброса* ресничек ребер глубины j соответственно.

Такое I-дерево D^{-1} с описанными выше параметрами b, r, n и l обозначим $D^{-1}(b, r, n, l)$.

Свяжем с ним некоторый процесс, который назовем *процессом дыхания*. Он обусловлен рядом допущений.

Считаем, что в $D^{-1}(b, r, n, l)$ заданы распределения значений нагрузок по всем ресничкам, учитывая, что нагрузка может быть нулевой. Пусть V' — суммарная нагрузка по всем ресничкам, а V — максимально возможная суммарная нагрузка по всем ресничкам. V назовем *объемом I-дерева (легких)*, а V' — *исходным объемом загруженности I-дерева*.

I-дерево $D^{-1}(b, r, n, l)$ с исходным объемом загруженности V' обозначим $D^{-1}(b, r, n, l; V')$.

Каждая ресничка осуществляет прием вещества извне и переброс своей нагрузки на следующую ресничку с меньшим номером внутри ребра.

Прием ресничкой вещества, имеющего массу d, $d \in \mathbb{N}_0$ и $d \leqslant V - V'$, из внешней среды внутри ребра осуществляется по следующему правилу (для этого правила ориентация считается обратной к заданной).

А$_1$) Если ресничка имеет максимальную нагрузку, то прием вещества не осуществляется.

Б$_1$) При немаксимальной нагрузке d_1 первой такой реснички она осуществляет прием вещества максимально возможной массы d_2, такой, что $d_1 + d_2 \leqslant \min(b, d)$, где b — максимальная нагрузка этой реснички.

В$_1$) Следующая за ресничкой из Б$_1$) принимает массу d_3, как и в Б$_1$), с заменой там d на $d - d_2$.

Γ_1) Оставшаяся масса вещества опускается до следующей реснички с большим номером в ребре, для которой не выполняется условие А_1). Она осуществляет прием вещества по правилу В_1) или Б_1).

Д_1) Если ресничка в рассматриваемом ребре является последней, не удовлетворяющей условию А_1), то оставшаяся масса вещества делится пополам (если число нечетное, то одна из частей на единицу больше другой); и каждая из частей вещества воспринимается соответствующими ребрами, как описано выше.

Е_1) Процесс, описываемый позициями А_1)–Д_1), начинается с ребра, которое инцидентно корню.

Переброс ресничкой вещества осуществляется на следующую ресничку с меньшим номером внутри ребра по такому правилу.

А_2) Если следующая ресничка имеет не нулевую нагрузку, то переброс с реснички не осуществляется.

Б_2) Если нагрузка реснички не превосходит r, где r — ее мера переброса, и не выполнено условие А_2), то перебрасывается на следующую вся нагрузка реснички и считается, что ее нагрузка становится равной нулю.

В_2) Если на ресничке нагрузка m и $m > r$, то она перебрасывает на следующую ресничку нагрузку r и оставляет у себя нагрузку $m-r$.

Если ресничка в ребре последняя, то переброс нагрузки осуществляется по правилам А_2), Б_2), В_2).

Γ_2) Если ребро инцидентно корню, то переброс с наименьшей по номеру реснички осуществляется в среду по правилам Б_2) и В_2) в предположении, что среда играет роль реснички с нулевой нагрузкой.

Д_2) Если ребро не инцидентно корню, то есть его вершина инцидентна следующему ребру, то нагрузка с наименьшей по номеру реснички этого ребра передается наибольшей по номеру ресничке другого ребра по правилам А_2), Б_2), В_2).

Считаем, что процесс дыхания осуществляется в дискретные моменты времени $t = 1, 2, 3, \ldots$

В первый момент I-дерево $D^{-1}(b, r, n, l; V')$ имеет заданное распределение нагрузок по его ресничкам.

Ко второму моменту осуществляется прием вещества массой $d(1)$ по правилам А_1)–Е_1), и затем осуществляется переброс нагрузок с реснички на ресничку во всем I-дереве или выброс в среду в соответствии с правилами А$_2$), Б$_2$), В$_2$), Г$_2$), Д$_2$). А если в легкие подается масса d, не превосходящая объема легких, то та ее часть, которая не осела на ресничках, выбрасывается в среду.

Другими словами, за один момент (шаг) происходит «вдох» и «выдох».

Если в каждый момент $t = 1, 2, 3, \ldots$ все реснички I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l; V')$ осуществляют прием вещества нулевой массы, то такой процесс называется *процессом самоочищения* этого I-дерева. Процесс самоочищения заканчивается в такой момент t, в котором нагрузки всех ресничек I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l; V')$ впервые стали равными нулю.

Под распределением нагрузки V' I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l; V')$ будем понимать любое из возможных распределений нагрузок всех его ресничек таких, что суммарный объем их нагрузок равен V'. Ясно, что $V' \leqslant V$, где V — объем I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l; V')$ и $V = 2^{l-1}bnl$. Такие распределения будем называть *конфигурациями* нагрузки V' по ресничкам I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$.

Занумеруем все реснички I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ таким образом, что ресничка с номером ijk является k-ой ресничкой j-го ребра глубины i, где $1 \leqslant i \leqslant l$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, а нумерация ребер одной глубины идет слева направо. Тогда в каждый момент t конфигурацию нагрузки $V'(t)$ в I-дереве $D^{-1}(b, r, n, l)$ можно задать набором

$$q(t) = (q_{111}(t), q_{112}(t), \ldots, q_{ijk}(t), \ldots, q_{l2^{l-1}n}(t)),$$

в котором каждая координата $q_{ijk}(t)$ равна нагрузке реснички с номером ijk в момент t, причем $0 \leqslant q_{ijk}(t) \leqslant 2^{l-i}b$ и $\sum_{111}^{l2^{l-1}n} q_{ijk}(t) = V'(t)$.

Пусть в процессе самоочищения конфигурации нагрузки $V'(t)$ в каждый момент t изменяются по правилам $A_2) - Д_2)$. Тогда процесс самоочищения можно представить некоторым инициальным конечным автоматом без выхода с одним финальным состоянием, что было сделано автором ранее в статье [2]. Там построен такой автомат и представлена схематическая диаграмма Мура этого автомата. Состояниями построенного автомата являются конфигурации нагрузки $V'(t)$ в I-дереве $D^{-1}(b, r, n, l)$. Такие конфигурации нагрузок I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ будем называть далее состояниями этого I-дерева.

Обозначим множество состояний I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ при всевозможных его нагрузках $V'(t)$ через $Q(b,n,l)$.

Введем понятие состояния конденсации для I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$. Именно, q из $Q(b,n,l)$ считаем *состоянием конденсации* для I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$, если в него за один шаг переходит наибольшее число состояний из $Q(b,n,l)$, то есть состояние q имеет наибольшее число предшественников (прообразов).

Нашими задачами будут выяснение того, какие состояния q из $Q(b,n,l)$ являются состояниями конденсации для I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$, нахождение их количества, а также нахождение числа прообразов состояний конденсации.

Для решения этих задач выделим некоторые свойства состояний, которые назовем *c_i-свойствами* при $i=1,2,3,4,5$.

Отметим, что c_1-свойство будет определено только при $b \geqslant 2r$, c_2- и c_3-свойства — только при $r<b<2r$, а c_4- и c_5-свойства — только при $b=r$.

Будем говорить, что состояние q из $Q(b,n,l)$ обладает:

– *c_1-свойством*, если при данном q выполнено: $q_{ij1}=0$, $q_{ijn}=2^{l-(i+1)}r$, $q_{ijk}=2^{l-i}r$, где $1 \leqslant i<l$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$, $2 \leqslant k \leqslant n-1$; при $i=l$ выполнено $q_{lj1}=0$, $q_{ljk}=r$, где $1 \leqslant j \leqslant 2^{l-1}$, $2 \leqslant k \leqslant n-2$, и либо $q_{lj(n-1)}=r$ и $0 \leqslant q_{ljn} \leqslant b-r$, либо $1 \leqslant q_{lj(n-1)} \leqslant r-1$ и $q_{ljn}=0$;

– *c_2-свойством*, если n — четное и при данном q выполнено: $q_{ijn}=2^{l-(i+1)}r$, $q_{ij1}=0$, $q_{ij(2k)}=2^{l-i}r$ и $1 \leqslant q_{ij(2k+1)} \leqslant 2^{l-i}(b-r)$, где $1 \leqslant i<l$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$, $1 \leqslant k \leqslant \frac{n-2}{2}$; при $i=l$ выполнено $q_{lj1}=0$, $q_{ljn}=0$, $1 \leqslant q_{lj(2k+1)} \leqslant b-r$ и $q_{lj(2k)}=r$, где $1 \leqslant j \leqslant 2^{l-1}$, $1 \leqslant k \leqslant \frac{n-2}{2}$;

– *c_3-свойством*, если n — нечетное и при данном q выполнено: при четном i $q_{ijn}=2^{l-(i+1)}r$, $1 \leqslant q_{ij(2k)} \leqslant 2^{l-i}(b-r)$ и $q_{ij(2k-1)}=2^{l-i}r$ и при нечетном i $q_{ij1}=0$, $1 \leqslant q_{ij(2k+1)} \leqslant 2^{l-i}b$ и $q_{ij(2k)}=2^{l-i}r$, $1 \leqslant i<l$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$, $1 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}$; при $i=l$, когда l четно, выполнено $q_{ljn}=0$, $1 \leqslant q_{lj(2k)} \leqslant b-r$ и $q_{lj(2k-1)}=r$, где $1 \leqslant j \leqslant 2^{l-1}$, $1 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}$; при $i=l$, когда l нечетно, выполнено $q_{lj1}=0$, $q_{lj2}=r$, $0 \leqslant q_{ljn} \leqslant b-r$, $1 \leqslant q_{lj(2k-1)} \leqslant b-r$ и $q_{lj(2k)}=r$, где $1 \leqslant j \leqslant 2^{l-1}$, $1<k \leqslant \frac{n-1}{2}$;

– *c_4-свойством*, если n — четное и при данном q выполнено: $q_{ij(n-1)}=0$, $q_{ijn}=2^{l-(i+1)}b$, $1 \leqslant q_{ij(2k)} \leqslant 2^{l-i}b$ и $q_{ij(2k-1)}=0$, где $1 \leqslant i<l$,

$1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$, $1 \leqslant k \leqslant \frac{n-2}{2}$; при $i = l$ выполнено $q_{lj(n-1)} = 0$, $q_{ljn} = 0$, $1 \leqslant q_{lj(2k)} \leqslant b$ и $q_{lj(2k-1)} = 0$, где $1 \leqslant j \leqslant 2^{l-1}$, $1 \leqslant k \leqslant \frac{n-2}{2}$;

– c_5-*свойством*, если n — нечетное и при данном q выполнено: при четном i $q_{ijn} = 2^{l-(i+1)}b$, $1 \leqslant q_{ij(2k-1)} \leqslant 2^{l-i}b$ и $q_{ij(2k)} = 0$ и при нечетном i $q_{ijn} = 0$, $1 \leqslant q_{ij(2k)} \leqslant 2^{l-i}b$ и $q_{ij(2k-1)} = 0$, где $1 \leqslant i < l$, если l четно и $1 \leqslant i \leqslant l$, если l нечетно, $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$, $1 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}$; при $i = l$, когда l четно, выполнено $q_{ljn} = 0$, $1 \leqslant q_{lj(2k-1)} \leqslant b$ и $q_{lj(2k)} = 0$, где $1 \leqslant j \leqslant 2^{l-1}$, $1 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}$.

Пусть $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$. Класс всех состояний q из $Q(b,n,l)$ с c_i-свойством при $c_i \in C$ обозначим через K_{c_i}, мощность множества K_{c_i} – через $|K_{c_i}|$, а число прообразов каждого состояния q из K_{c_i} обозначим через $S_{K_{c_i}}$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Множество состояний конденсации I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ совпадает с:*

а) K_{c_1}, если $b \geqslant 2r$;

б) K_{c_2} при четном n и с K_{c_3} при нечетном n, если $r < b < 2r$;

в) K_{c_4} при четном n и с K_{c_5} при нечетном n, если $b = r$.

Следующее утверждение дает решение задачи нахождения количества всех состояний конденсации I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$.

Теорема 2. *Справедливы следующие равенства:*

1) $|K_{c_1}| = b^{2^{l-1}}$,

2) $|K_{c_2}| = ((b-r)^{2^l-1} \cdot 2^{2^l-l-1})^{\frac{n}{2}-1}$,

3) $|K_{c_3}| = \begin{cases} ((b-r)^{2^l-1} \cdot 2^{2^l-l-1})^{\frac{n-1}{2}}, & \text{если } l \text{ четно}, \\ (b-r)^{2^{l-1}(n-2)-\frac{n-1}{2}} \cdot (b-r+1)^{2^{l-1}} \cdot 2^{\frac{n-1}{2}(2^l-l-1)}, & \text{иначе}, \end{cases}$

4) $|K_{c_4}| = (b^{2^l-1} \cdot 2^{2^l-l-1})^{\frac{n}{2}-1}$,

5) $|K_{c_5}| = (b^{2^l-1} \cdot 2^{2^l-l-1})^{\frac{n-1}{2}}$.

Следствие 1. *Имеет место:*

1) $|K_{c_2}| \asymp 2^{(2^l \cdot c_2 - l)\cdot(\frac{n}{2}-1)}$, *где* $c_2 = 1 + \log_2(b-r)$,

2) $|K_{c_3}| \asymp \begin{cases} 2^{(2^l \cdot c_2 - l)\cdot\frac{n-1}{2}}, & \text{если } l \text{ четно}, \\ 2^{2^{l-1}\cdot c_3 - \frac{n-1}{2}\cdot l}, & \text{если } l \text{ нечетно}, \end{cases}$

где $c_3 = n - 1 + (n-2)\log_2(b-r) + \log_2(b-r+1)$,

3) $|K_{c_4}| \asymp 2^{(2^l \cdot c_4 - l)\cdot(\frac{n}{2}-1)}$, *где* $c_4 = 1 + \log_2 b$,

4) $|K_{c_5}| \asymp 2^{(2^l \cdot c_4 - l)\cdot\frac{n-1}{2}}$

при $l \to \infty$.

Теперь рассмотрим задачу нахождения числа прообразов $S_{K_{c_i}}$ состояния конденсации q из K_{c_i} для всех $c_i \in C$.

Пусть $d_1' = \log_2\left(2 \cdot r \cdot \left(\frac{(1+\sqrt{5})^{n-3} - (1-\sqrt{5})^{n-3}}{2^{n-3}\sqrt{5}}\right)^2\right)$,

$d_1'' = \log_2\left(6\sqrt{3} \cdot r \cdot \left(\frac{(1+\sqrt{5})^{n} - (1-\sqrt{5})^{n}}{2^{n}\sqrt{5}}\right)^2\right)$,

$d_2' = n - 3 + \log_2 r, \quad d_2'' = n + 1 + \log_2(3\sqrt{3} \cdot r)$,

$d_3' = \frac{3n+2}{9} + \frac{1}{3} \cdot \log_2 r, \quad d_3'' = \frac{9n+17}{9} + \frac{1}{3} \cdot \log_2(3 \cdot r)$,

$p_3' = \frac{9n-23}{9} + \frac{2}{3} \cdot \log_2 r, \quad p_3'' = \frac{9n+2}{9} + \frac{2}{3} \cdot \log_2(3 \cdot r)$,

$d_4' = \log_2\left(2 \cdot r \cdot \left(\frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n}{2}} - (1-\sqrt{5})^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\sqrt{5}}\right)^2\right)$,

$d_4'' = \log_2\left(6\sqrt{3} \cdot r \cdot \left(\frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n}{2}+1} - (1-\sqrt{5})^{\frac{n}{2}+1}}{2^{\frac{n}{2}+1}\sqrt{5}}\right)^2\right)$,

$d_5' = \frac{5}{9} + \frac{1}{3} \cdot \log_2 r + \frac{2}{3} \cdot \log_2\left(\frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n-3}{2}} - (1-\sqrt{5})^{\frac{n-3}{2}}}{2^{\frac{n-3}{2}}\sqrt{5}}\right)$,

$d_5'' = \frac{14}{9} + \frac{1}{3} \cdot \log_2(27 \cdot r) + 2 \cdot \log_2\left(\frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n+1}{2}} - (1-\sqrt{5})^{\frac{n+1}{2}}}{2^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{5}}\right)$,

$p_5' = \frac{2}{9} + \frac{1}{3} \cdot \log_2 r + \log_2\left(\frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n-3}{2}} - (1-\sqrt{5})^{\frac{n-3}{2}}}{2^{\frac{n-3}{2}}\sqrt{5}}\right)$,

$p_5'' = \frac{2}{9} + \frac{1}{3} \cdot \log_2(27 \cdot r) + \log_2\left(\frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n+1}{2}} - (1-\sqrt{5})^{\frac{n+1}{2}}}{2^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{5}}\right)$.

Теорема 3. *Имеет место:*

1) $2^{2^{l-1}\cdot d_1'} \preccurlyeq S_{K_{c_1}} \preccurlyeq 2^{2^{l-1}\cdot d_1''}$,

2) $2^{2^{l-1}\cdot d_2'} \preccurlyeq S_{K_{c_2}} \preccurlyeq 2^{2^{l-1}\cdot d_2''}$,

3) $2^{2^{l-1}\cdot \min(d_3', p_3') + \frac{1}{3}\cdot l} \preccurlyeq S_{K_{c_3}} \preccurlyeq 2^{2^{l-1}\cdot \max(d_3'', p_3'') + \frac{1}{3}\cdot l}$,

4) $2^{2^{l-1}\cdot d_4'} \preccurlyeq S_{K_{c_4}} \preccurlyeq 2^{2^{l-1}\cdot d_4''}$,

5) $2^{2^{l-1}\cdot \min(d_5', p_5') + \frac{1}{3}\cdot l} \preccurlyeq S_{K_{c_5}} \preccurlyeq 2^{2^{l-1}\cdot \max(d_5'', p_5'') + \frac{1}{3}\cdot l}$

при $l \to \infty$.

Следствие 2. *Имеет место* $\log_2 S_{K_{c_i}} \asymp 2^l$ *при* $l \to \infty$ *для всех* $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

2. Доказательства теорем

Докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Если ребра* j *и* $j+1$ *уровня* i *инцидентны ребру* j' *уровня* $i-1$, *где* $2 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j < 2^{i-1}$, $1 \leqslant j' \leqslant 2^{i-2}$, *то состояние* q *I-дерева* $D^{-1}(b, r, n, l)$, *при котором распределение нагрузок по трем ресничкам с номерами* $ij1$, $i(j+1)1$ *и* $(i-1)j'n$ *такое, что* $q_{ij1} = q_{i(j+1)1} = 0$ *и* $q_{(i-1)j'n} = 2^{l-i}r$, *имеет наибольшее число предшественников из всех состояний с иным распределение нагрузок по указанным трем ресничкам.*

Доказательство. С первых ресничек ребер уровня i на последнюю ресничку ребра уровня $i-1$ может передаться нагрузка не более $2 \cdot 2^{l-i}r$ при нулевой нагрузке последней реснички ребра уровня $i-1$, то есть с каждой реснички с номерами $ij1$ и $i(j+1)1$ не более, чем по $2^{l-i}r$, соответственно. Покажем теперь, что наибольшее число вариантов нагрузок ресничек с номерами $ij1$ и $i(j+1)1$ будет при условии $q_{ij1} + q_{i(j+1)1} = 2^{l-i}r$.

Пусть $q_{ij1} + q_{i(j+1)1} = 2^{l-i}r - x$, где $x = 0, 1, 2, \ldots, 2^{l-i}r$. Тогда для пары $(q_{ij1}, q_{i(j+1)1})$ возможны следующие варианты нагрузок: $(0, 2^{l-i}r - x)$, $(1, 2^{l-i}r - x - 1)$, $(2, 2^{l-i}r - x - 2)$, $\ldots$, $(2^{l-i}r - x - 1, 1)$ и $(2^{l-i}r - x, 0)$. Отсюда следует, что число вариантов распределения нагрузок по этим двум ресничкам равно $2^{l-i}r - x + 1$. Заметим, что при x=0 число вариантов будет наибольшим, а именно $2^{l-i}r + 1$.

Пусть $q_{ij1} + q_{i(j+1)1} = 2^{l-i}r + x$, где $x = 0, 1, 2, \ldots, 2^{l-i}r$. Тогда для пары $(q_{ij1}, q_{i(j+1)1})$ возможны следующие варианты нагрузок: $(x, 2^{l-i}r)$, $(x+1, 2^{l-i}r - 1)$, $(x+2, 2^{l-i}r - 2)$, $\ldots$, $(2^{l-i}r - 1, x+1)$ и $(2^{l-i}r, x)$. Отсюда следует, что число вариантов распределения нагрузок по этим двум ресничкам равно также $2^{l-i}r - x + 1$ и при x=0 число вариантов будет наибольшим, а именно $2^{l-i}r + 1$.

Следовательно, состояние, при котором распределение нагрузок по трем ресничкам с номерами $ij1$, $i(j+1)1$ и $(i-1)j'n$ такое, что

$q_{ij1} = q_{i(j+1)1} = 0$ и $q_{(i-1)j'n} = 2^{l-i}r$, будет иметь наибольшее число предшественников из всех состояний, имеющих иное распределение нагрузок по указанным трем ресничкам. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если $b \geqslant 2r$, то множество состояний конденсации I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ совпадает с K_{c_1}.*

Доказательство. Пусть I-дерево $D^{-1}(b,r,n,l)$ в момент t, где $t = 1,2,3,\dots$, находится в состоянии конденсации $q(t)$ из $Q(b,n,l)$. Рассмотрим, как оно устроено.

Если $n \leqslant 5$, то перебором вариантов распределения нагрузок по ресничкам I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ можно убедиться, что в этом случае множество состояний конденсации совпадают с классом K_{c_1}.

Пусть $n > 5$. Заметим, что, если две соседние реснички одного ребра в момент t имеют нагрузки, равные их мере переброса, то такое распределение нагрузок по этим двум ресничкам имеет наибольшее число предшественников. Рассмотрим в I-дереве $D^{-1}(b,r,n,l)$ четыре подряд идущих реснички ребра j уровня i, имеющие в ребре порядковые номера k, $k-1$, $k-2$ и $k-3$, где $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$, $1 \leqslant i \leqslant l$ и $4 < k < n$, загруженные таким образом, что $0 \leqslant q_{ijk}(t) \leqslant 2^{l-i}(b-r)$, $q_{ij(k-1)}(t) = 2^{l-i}r$, $q_{ij(k-2)}(t) = 2^{l-i}r$ и $0 < q_{ij(k-3)}(t) \leqslant 2^{l-i}b$.

Учитывая правила переброса вещества ресничками I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$, заметим, что указанное распределение нагрузок по ресничкам с номерами ijk, $ij(k-1)$, $ij(k-2)$ и $ij(k-3)$ может возникнуть в момент времени t, где $t = 1,2,3,\dots$, только и только в том случае, когда в момент времени $t-1$ имеет место одно из следующих распределений нагрузок по ним:

1) $q_{ijk}(t–1) = q_{ijk}(t)+2^{l-i}r,\ q_{ij(k-1)}(t–1) = 0,\ q_{ij(k-2)}(t–1) = 2^{l-i}r$ и $q_{ij(k-3)}(t-1) = \begin{cases} q_{ij(k-3)}(t), \\ q_{ij(k-3)}(t)+2^{l-i}r, \text{ если } q_{ij(k-3)}(t) \leqslant 2^{l-i}(b-r) \end{cases}$;

2) $q_{ijk}(t-1) = q_{ijk}(t),\ q_{ij(k-1)}(t-1) = 2\cdot 2^{l-i}r,\ q_{ij(k-2)}(t-1) = 0$ и $q_{ij(k-3)}(t-1) = \begin{cases} q_{ij(k-3)}(t), \\ q_{ij(k-3)}(t)+2^{l-i}r, \text{ если } q_{ij(k-3)}(t) \leqslant 2^{l-i}(b-r) \end{cases}$.

Если $q_{ij(k-3)}(t) = 2^{l-i}r$, то дополнительно к 1) и 2) возникают еще два возможных варианта распределения нагрузок по этим четырем ресничкам в момент времени $t-1$:

3) $q_{ijk}(t-1) = q_{ijk}(t)$, $q_{ij(k-1)}(t-1) = 2^{l-i}r$, $q_{ij(k-2)}(t-1) = 2 \cdot 2^{l-i}r$ и $q_{ij(k-3)}(t-1) = 0$;

4) $q_{ijk}(t-1) = q_{ijk}(t) + 2^{l-i}r$, $q_{ij(k-1)}(t-1) = 0$, $q_{ij(k-2)}(t-1) = 2 \cdot 2^{l-i}r$ и $q_{ij(k-3)}(t-1) = 0$.

Если $q_{ijk}(t) = 2^{l-i}r$ и при этом $0 \leqslant q_{ij(k+1)}(t) \leqslant 2^{l-i}(b-r)$ или $0 < q_{ijk}(t) < 2^{l-i}r$ и при этом $q_{ij(k+1)}(t) = 0$, то дополнительно к 1) и 2) возникают еще два возможных варианта распределения нагрузок по этим четырем ресничкам в момент времени $t-1$ (причем отличных от 3) и 4)):

5) $q_{ij(k+1)}(t-1) = \begin{cases} q_{ij(k+1)}(t), \\ q_{ij(k+1)}(t) + 2^{l-i}r \end{cases}$, $q_{ijk}(t-1) = 0$, $q_{ij(k-1)}(t-1) = 2^{l-i}r$, $q_{ij(k-2)}(t-1) = 2^{l-i}r$ и $q_{ij(k-3)}(t-1) = \begin{cases} q_{ij(k-3)}(t), \\ q_{ij(k-3)}(t) + 2^{l-i}r \end{cases}$;

6) $q_{ij(k+1)}(t-1) = \begin{cases} q_{ij(k+1)}(t), \\ q_{ij(k+1)}(t) + 2^{l-i}r \end{cases}$, $q_{ijk}(t-1) = 0$, $q_{ij(k-1)}(t-1) = 2 \cdot 2^{l-i}r$, $q_{ij(k-2)}(t-1) = 0$ и $q_{ij(k-3)}(t-1) = \begin{cases} q_{ij(k-3)}(t), \\ q_{ij(k-3)}(t) + 2^{l-i}r \end{cases}$.

Следовательно, чтобы число предшественников для состояния, имеющего указанное распределение нагрузок по четырем ресничкам с номерами ijk, $ij(k-1)$, $ij(k-2)$ и $ij(k-3)$, было максимально возможным необходимо, чтобы $q_{ij(k-3)}(t) = 2^{l-i}r$ и при этом либо $q_{ijk}(t) = 2^{l-i}r$ и $0 \leqslant q_{ij(k+1)}(t) \leqslant 2^{l-i}(b-r)$, либо $0 < q_{ijk}(t) < 2^{l-i}r$ и $q_{ij(k+1)}(t) = 0$.

Далее применяем описанное выше рассуждение к ресничкам с номерами $ij(k+1)$, ijk, $ij(k-1)$, $ij(k-2)$ и $ij(k-1)$, $ij(k-2)$, $ij(k-3)$, $ij(k-4)$, затем — с номерами $ij(k+2)$, $ij(k+1)$, ijk, $ij(k-1)$ и $ij(k-2)$, $ij(k-3)$, $ij(k-4)$, $ij(k-5)$ и так далее, пока не дойдем до ресничек с номерами $ij2$ и $ij(n-1)$ ребра j уровня i I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$.

Заметим, что ресничка с номером 111 имеет особую ситуацию. Она должна иметь нулевую нагрузку, чтобы число предшественников описанного состояния ребра первого уровня было наибольшим. Действительно, так как в каждый момент времени ресничка с номером 111 может выбрасывать в среду нагрузку не более $2^{l-1}r$, то в указанное состояние этого ребра перейдет любое состояние, при котором либо $1 \leqslant q_{111}(t) \leqslant 2^{l-1}r$, либо $0 \leqslant q_{111}(t) \leqslant 2^{l-1}r$, а остальные реснички имеют такие же нагрузки, при которых это состояние в следующий момент времени перейдет в описанное состояние этого ребра.

Таким образом показали, что из всевозможных распределений нагрузок по ресничкам ребра уровня i распределение, при котором $q_{ijk}(t) = 2^{l-i}$, где $1 < i \leqslant l$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$, $2 \leqslant k \leqslant n-2$ и либо $q_{ij(n-1)}(t) = 2^{l-i}r$ и $1 \leqslant q_{ijn}(t) \leqslant 2^{l-i}(b-r)$, либо $1 \leqslant q_{ij(n-1)}(t) \leqslant 2^{l-i}r$ и $q_{ijn}(t) = 0$, а при $i = 1$ $q_{111}(t) = 0$ и $q_{11k}(t) = 2^{l-i}$, где $1 < k < n$, имеет наибольшее число предшественников.

Рассмотрим теперь ситуацию на «стыках», то есть где два ребра входят в одно.

Пусть ребра j и $j+1$ уровня i инцедентны ребру j' уровня $i-1$, где $2 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j < 2^{i-1}$, $1 \leqslant j' \leqslant 2^{i-2}$.

По лемме 1 при распределении нагрузок по трем ресничкам на указанном «стыке», при котором $q_{ij1}(t) = q_{i(j+1)1}(t) = 0$ и $q_{(i-1)j'n}(t) = 2^{l-i}r$, будет иметь наибольшее число предшественников.

Таким образом, состояние $q(t)$ из $Q(b,n,l)$, такое что $q_{ij1}(t) = 0$, $q_{ijn}(t) = 2^{l-(i+1)}r$, $q_{ijk}(t) = 2^{l-i}r$, где $1 \leqslant i < l$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$, $2 \leqslant k \leqslant n-1$; при $i = l$ выполнено $q_{lj1}(t) = 0$, $q_{ljk}(t) = r$, где $1 \leqslant j \leqslant 2^{l-1}$, $2 \leqslant k \leqslant n-2$, и либо $q_{lj(n-1)}(t) = r$ и $0 \leqslant q_{ljn}(t) \leqslant b-r$, либо $1 \leqslant q_{lj(n-1)}(t) \leqslant r-1$ и $q_{ljn}(t) = 0$, имеет наибольшее число предшественников.

Следовательно, если $b \geqslant 2r$, то все состояния конденсации обладают c_1-свойством. Значит, множество состояний конденсации I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в этом случае совпадает с классом K_{c_1}. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если $r < b < 2r$, то множество состояний конденсации I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ совпадает с K_{c_2} при четном n и с K_{c_3} при нечетном n.*

Доказательство. Пусть I-дерево $D^{-1}(b,r,n,l)$ в момент t, где $t = 1,2,3,\ldots$, находится в состоянии конденсации $q(t)$ из $Q(b,n,l)$. Рассмотрим, как оно устроено.

Заметим, что так как $r < b < 2r$, то вся ненулевая нагрузка реснички с номером k ребра уровня i не более, чем за два приема перебрасывается на соседнюю вышележащую ресничку с номером $k-1$:

– либо перебрасывается вся ненулевая нагрузка реснички с номером k, если она не превосходит $2^{l-i}r$, при нулевой нагрузке реснички с номером $k-1$;

– либо сначала перебрасывается нагрузка $2^{l-i}r$ на ресничку с номером $k-1$, если последняя имеет нулевую нагрузку, а затем, когда она освободится, перебрасывается на нее оставшаяся нагрузка реснички с номером k, не превосходящая $2^{l-i}(b-r)$.

Отсюда следует, что рассматривать как возможный вариант для состояния конденсации нагрузку реснички большую, чем ее мера переброса не имеет смысла, так как в этом случае подобная нагрузка этой реснички могла возникнуть только изначально, то есть в состоянии, которое имело место в нулевой момент времени.

Заметим, что ресничка с номером 111 имеет особую ситуацию. Она должна иметь нулевую нагрузку, чтобы число предшественников описанного состояния ребра первого уровня было наибольшим. Действительно, так как в каждый момент времени ресничка с номером 111 может выбрасывать в среду нагрузку не более $2^{l-1}r$, то в указанное состояние этого ребра перейдет любое состояние, при котором либо $1 \leqslant q_{111}(t) \leqslant 2^{l-1}r$, либо $0 \leqslant q_{111}(t) \leqslant 2^{l-1}r$, а остальные реснички имеют такие же нагрузки, при которых это состояние в следующий момент времени перейдет в описанное состояние этого ребра.

Заметим, что нагрузка второй реснички ребра первого уровня в состоянии $q(t)$ должна быть $2^{l-1}r$, чтобы число предшественников было наибольшим. Действительно, если в момент времени t, где $t = 1, 2, 3, \ldots$, нагрузка реснички с номером 112 равна $2^{l-1}r$, то в момент времени $t-1$ возможно одно из следующих распределений нагрузок по ресничкам с номерами 112 и 113: $q_{112}(t-1) = 0$, $q_{113}(t-1) = 2^{l-1}r + q_{113}(t)$, где $q_{113}(t) = 0, 1, 2, \ldots, 2^{l-1}(b-r)$. То есть в этом случае имеем $2^{l-1}(b-r)+1$ предшественников. Если же в момент времени t, нагрузка реснички с номером 112 была бы равна q_{112}, где $0 < q_{112} < 2^{l-1}r$, то в момент времени $t-1$ возможно было бы только одно распределение нагрузок по ресничкам с номерами 112 и 113 — $q_{112}(t-1) = 0$, $q_{113}(t-1) = q_{112}(t)$. Следовательно, чтобы $q(t)$ было состоянием конденсации необходимо, чтобы выполнялось $q_{112}(t) = 2^{l-1}r$.

Рассмотрим реснички ребра первого уровня с номерами 112, 113, 114 и 115 (для удобства доказательства считаем, что количество ресничек в каждом ребре I-дерева больше 5, в противном случае можно убедиться в справедливости утверждения перебором вариантов нагрузки по ресничкам I-дерева). Покажем, что если в состоянии $q(t)$, где $t = 1, 2, 3, \ldots$, имеет место распределение нагрузок по этим четырем ресничкам такое, что $q_{112}(t) = 2^{l-1}r$, $1 \leqslant q_{113}(t) \leqslant 2^{l-1}(b-r)$, $q_{114}(t) = 2^{l-1}r$ и $1 \leqslant q_{115}(t) \leqslant 2^{l-1}(b-r)$, то состояние $q(t)$ имеет наибольшее число предшественников. Действительно, указанное распределение нагрузок по ресничкам с номерами 112, 113, 114 и 115 может возникнуть в момент времени t только и только в том случае, когда в момент времени $t-1$ имеет место одно из следующих четырех распределений нагрузок по ним:

1) $q_{112}(t-1) = 0$, $q_{113}(t-1) = 2^{l-1}r + q_{113}(t)$, $q_{114}(t-1) = 2^{l-1}r$ и $q_{115}(t-1) = q_{115}(t)$;

2) $q_{112}(t-1) = 0$, $q_{113}(t-1) = 2^{l-1}r + q_{113}(t)$, $q_{114}(t-1) = 0$ и $q_{115}(t-1) = 2^{l-1}r + q_{115}(t)$;

3) $q_{112}(t-1) = 2^{l-1}r$, $q_{113}(t-1) = q_{113}(t)$, $q_{114}(t-1) = 0$ и $q_{115}(t-1) = 2^{l-1}r + q_{115}(t)$;

4) $q_{112}(t-1) = 2^{l-1}r$, $q_{113}(t-1) = q_{113}(t)$, $q_{114}(t-1) = 2^{l-1}r$ и $q_{115}(t-1) = q_{115}(t)$.

Если же в момент времени t нагрузки ресничек с номерами 114 и 115 в ребре первого уровня имеют нагрузки $q_{114}(t) = 0$ и $q_{115}(t) \leqslant 2^{l-1}r$ соответственно, то в момент времени $t-1$ может иметь место одно из следующих трех распределений нагрузок по ресничкам с номерами 112, 113, 114 и 115:

1′) $q_{112}(t-1) = 0$, $q_{113}(t-1) = 2^{l-1}r + q_{113}(t)$, $q_{114}(t-1) = 0$ и $q_{115}(t-1) = 0$;

2′) $q_{112}(t-1) = 2^{l-1}r$, $q_{113}(t-1) = 0$, $q_{114}(t-1) = q_{113}(t)$ и $q_{115}(t-1) = q_{115}(t)$;

3′) $q_{112}(t-1) = 2^{l-1}r$, $q_{113}(t-1) = q_{113}(t)$, $q_{114}(t-1) = 0$ и $q_{115}(t-1) = 0$.

Если же в момент времени t нагрузки ресничек с номерами 114 и 115 в ребре первого уровня имеют нагрузки $0 < q_{114}(t) < 2^{l-1}r$ и $q_{115}(t) \leqslant 2^{l-1}r$ соответственно, то в момент времени $t-1$ может иметь место одно из следующих четырех распределений нагрузок по ресничкам с номерами 112, 113, 114 и 115:

$1'')$ $q_{112}(t-1)=0$, $q_{113}(t-1)=2^{l-1}r+q_{113}(t)$, $q_{114}(t-1)=q_{114}(t)$ и $q_{115}(t-1)=q_{115}(t)$;

$2'')$ $q_{112}(t-1)=0$, $q_{113}(t-1)=2^{l-1}r+q_{113}(t)$, $q_{114}(t-1)=0$ и $q_{115}(t-1)=q_{114}(t)$;

$3'')$ $q_{112}(t-1)=2^{l-1}r$, $q_{113}(t-1)=q_{113}(t)$, $q_{114}(t-1)=0$ и $q_{115}(t-1)=q_{114}(t)$;

$4'')$ $q_{112}(t-1)=2^{l-1}r$, $q_{113}(t-1)=q_{113}(t)$, $q_{114}(t-1)=q_{114}(t)$ и $q_{115}(t-1)=q_{115}(t)$.

Но заметим, что в случаях $2'')$ и $3'')$ в момент t имеет место $q_{115}(t)=0$. Но тогда, если $q_{115}(t)=0$, не выполняются случаи $1'')$ и $4'')$ при ненулевой нагрузке реснички с номером 116. Отметим, что если ресничка с номером 116 имеет нулевую нагрузку, то в этом случае возможно выполнение всех четырех случаев $1'')$, $2'')$, $3'')$ и $4'')$, но тогда число предшественников у такого состояния не будет наибольшим, так как ненулевая нагрузка реснички с номером 115 (не превосходящей ее меры переброса) могла бы возникнуть за счет переброса этой нагрузки с реснички с номером 116. Следовательно, либо выполняются случаи $2'')$ и $3'')$, либо случаи $1'')$ и $4'')$.

Далее применяем описанное рассуждение к ресничкам с номерами 114, 115, 116 и 117 и так далее, применяя описанные рассуждения к ресничкам каждого ребра I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$, но с соответствующими этому ребру параметрами.

Рассмотрим теперь ситуацию на «стыках». Здесь возможны два случая, в зависимости от четности или нечетности числа ресничек n в каждом ребре.

Пусть n — четное и ребра j и $j+1$ уровня i инцедентны ребру j' уровня $i-1$, где $2\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j<2^{i-1}$, $1\leqslant j'\leqslant 2^{i-2}$.

По лемме 1 при распределении нагрузок по указанным трем ресничкам, при котором $q_{ij1}(t)=q_{i(j+1)1}(t)=0$ и $q_{(i-1)j'n}(t)=2^{l-i}r$, будет иметь наибольшее число предшественников.

Следовательно, наибольшее число вариантов распределения нагрузки по ресничкам с номерами $ij1$ и $i(j+1)1$ будет при условии $q_{ij1}(t)+q_{i(j+1)1}(t)=2^{l-i}r$. Значит, чтобы число предшественников было максимально возможным должно выполняться условие $q_{(i-1)j'n}(t) = 2^{l-i}r$.

Заметим, что в случае, когда n четно, все нижние реснички I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ с номерами ljn, где $j = 1, 2, \dots, 2^{l-1}$, должны иметь нулевые нагрузки, чтобы мог иметь место случай переброса всей нагрузки для нижних ресничек ребер уровня l.

Таким образом, состояние $q(t)$ из $Q(b, n, l)$, такое что $q_{ijn}(t) = 2^{l-(i+1)}r$, $q_{ij1}(t) = 0$, $q_{ij(2k)}(t) = 2^{l-i}r$ и $1 \leqslant q_{ij(2k+1)}(t) \leqslant 2^{l-i}(b-r)$, где $1 < i < l$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$, $1 \leqslant k \leqslant \frac{n-2}{2}$; при $i = 1$ выполнено $q_{111}(t) = 0$, $q_{11n}(t) = 2^{l-2}r$, $1 \leqslant q_{11(2k+1)}(t) \leqslant 2^{l-1}(b-r)$ и $q_{11(2k)}(t) = 2^{l-1}r$, где $1 < k \leqslant \frac{n-2}{2}$; при $i = l$ выполнено $q_{lj1}(t) = 0$, $q_{ljn}(t) = 0$, $1 \leqslant q_{lj(2k+1)}(t) \leqslant b - r$ и $q_{lj(2k)}(t) = r$, где $1 \leqslant j \leqslant 2^{l-1}$, $1 \leqslant k \leqslant \frac{n-2}{2}$, имеет наибольшее число предшественников.

Следовательно, если $r < b < 2r$ и n четно, то все состояния конденсации обладают c_2-свойством. Значит, множество состояний конденсации I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ в этом случае совпадает с классом K_{c_2}.

Пусть n — нечетное и ребра j и $j+1$ уровня i инцедентны ребру j' уровня $i-1$, где $2 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j < 2^{i-1}$, $1 \leqslant j' \leqslant 2^{i-2}$.

Здесь возможны два рода «стыков».

а) Два ребра четного уровня i, где $i = 2, 4, 6, \dots, l$, если l четно и $i = 2, 4, 6, \dots, l-1$, если l нечетно, входят в ребро нечетного уровня $i-1$;

б) Два ребра нечетного уровня i', где $i' = 3, 5, 7, \dots, l-1$, если l четно и $i' = 3, 5, 7, \dots, l$, если l нечетно, входят в ребро четного уровня $i'-1$.

В случае а) два ребра уровня i можно рассматривать как продолжение ребра уровня $i-1$ и применять к ресничкам на «стыке» этих ребер вышеописанное рассуждение (так как не осуществляется переброс с первых ресничек ребер уровня i на последнюю ресничку ребра уровня $i-1$). Тогда число предшественников будет наибольшим при следующем распределение нагрузок по этим ресничкам: $q_{ij1}(t) = q_{i(j+1)1}(t) = 2^{l-i}r$ и $1 \leqslant q_{(i-1)j'n}(t) \leqslant 2^{l-(i-1)}(b-r)$.

В случае б) ситуация на «стыках» аналогична ситуации на «стыках» в случае четного n, рассмотренного выше. То есть, если $q(t)$

является состоянием конденсации для I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$, то распределение нагрузок по трем ресничкам с номерами $i'j1$, $i'(j+1)1$ и $(i'-1)j'n$ должно быть таким — $q_{i'j1}(t) = q_{i'(j+1)1}(t) = 0$ и $q_{(i'-1)j'n}(t) = 2^{l-i'}r$.

Заметим, что в случае, когда l четно, все нижние реснички I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ с номерами ljn, где $j = 1, 2, \dots, 2^{l-1}$, должны иметь нулевые нагрузки, чтобы мог иметь место случай переброса всей нагрузки для нижних ресничек ребер уровня l. А в случае, когда l нечетно, все нижние реснички I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ с номерами ljn, где $j = 1, 2, \dots, 2^{l-1}$, могут иметь еще и нулевые нагрузки, то есть $q_{ljn}(t) = 0, 1, 2, \dots, (b-r)$.

Таким образом, наибольшее число предшественников имеет состояние $q(t)$ из $Q(b,n,l)$, такое что: при четном i $q_{ijn}(t) = 2^{l-(i+1)}r$, $1 \leqslant q_{ij(2k)}(t) \leqslant 2^{l-i}(b-r)$ и $q_{ij(2k-1)}(t) = 2^{l-i}r$ и при нечетном i $q_{ij1}(t) = 0$, $1 \leqslant q_{ij(2k+1)}(t) \leqslant 2^{l-i}b$ и $q_{ij(2k)}(t) = 2^{l-i}r$, $1 \leqslant i < l$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$, $1 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}$; при $i = l$, когда l четно, выполнено $q_{ljn}(t) = 0$, $1 \leqslant q_{lj(2k)}(t) \leqslant b-r$ и $q_{lj(2k-1)}(t) = 2^{l-i}r$, где $1 \leqslant j \leqslant 2^{l-1}$, $1 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}$; при $i = l$, когда l нечетно, выполнено $q_{lj1}(t) = 0$, $q_{lj2}(t) = r$, $0 \leqslant q_{ljn}(t) \leqslant b-r$, $1 \leqslant q_{lj(2k-1)}(t) \leqslant b-r$ и $q_{lj(2k)}(t) = 2^{l-i}r$, где $1 \leqslant j \leqslant 2^{l-1}$, $1 < k \leqslant \frac{n-1}{2}$.

Следовательно, если $r < b < 2r$ и n нечетно, все состояния конденсации обладают c_3-свойством. Значит, множество состояний конденсации I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в этом случае совпадает с классом K_{c_3}. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если $b = r$, то множество состояний конденсации I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ совпадает с K_{c_4} при четном n и с K_{c_5} при нечетном n.*

Доказательство. Пусть I-дерево $D^{-1}(b,r,n,l)$ в момент t, где $t = 1, 2, 3, \dots$, находится в состоянии конденсации $q(t)$ из $Q(b,n,l)$. Рассмотрим, как оно устроено.

Заметим, что так как $b = r$, то вся ненулевая нагрузка реснички за один шаг перебрасывается на соседнюю вышележащую ресничку, если последняя имеет нулевую нагрузку.

Заметим, что ресничка с номером 111 имеет особую ситуацию. Она должна иметь нулевую нагрузку, чтобы число предшественников описанного состояния ребра первого уровня было наибольшим. Действительно, так как в каждый момент времени ресничка с номером 111 может выбрасывать в среду нагрузку не более $2^{l-1}r$, то в указанное состояние этого ребра перейдет любое состояние, при котором либо $1 \leqslant q_{111}(t) \leqslant 2^{l-1}r$, либо $0 \leqslant q_{111}(t) \leqslant 2^{l-1}r$, а остальные реснички имеют такие же нагрузки, при которых это состояние в следующий момент времени перейдет в описанное состояние этого ребра.

Рассмотрим реснички ребра первого уровня с такими четными номерами $11k$, что $k = 2, 4, 6, \ldots, n-2$ при четном n и $k = 2, 4, 6, \ldots, n-1$ при нечетном n.

Пусть n — четное. Тогда, чтобы состояние $q(t)$ имело наибольшее число предшественников необходимо, чтобы реснички с четными номерами $11k$, где $k = 2, 4, 6, \ldots, n-2$, ребра первого уровня имели нагрузку $q_{11k}(t)$ такую, что $1 \leqslant q_{11k}(t) \leqslant 2^{l-1}b$ для каждого k, а реснички того же ребра с нечетными номерами — нулевую нагрузку. Действительно, если в момент t, где $t = 1, 2, 3, \ldots$, ресничка с четным номером $11k$, где $k = 2, 4, 6, \ldots, n-2$, в ребре первого уровня имеет ненулевую нагрузку $q_{11k}(t)$, а ресничка с нечетным номером $11(k+1)$ — нулевую нагрузку, то в момент времени $t-1$ может иметь место одно из следующих трех распределений нагрузок по ресничкам с номерами $11(k-1)$, $11k$, $11(k+1)$ и $11(k+2)$:

1) $q_{11k}(t-1) = 0$, $q_{11(k-1)}(t-1) = 0$ и $q_{11(k+1)}(t-1) = q_{11k}(t)$;

2) $q_{11k}(t-1) = 0$, $q_{11(k-1)}(t-1) > 0$ и $q_{11(k+1)}(t-1) = q_{11k}(t)$;

3) $q_{11k}(t-1) = q_{11k}(t)$, $q_{11(k+1)}(t-1) = 0$, $q_{11(k+2)}(t-1) = 0$ и $q_{11(k-1)}(t-1) > 0$.

Если же в момент t, где $t = 1, 2, 3, \ldots$, реснички с четным номером $11k$ и нечетным номером $11(k+1)$ в ребре первого уровня имеют ненулевые нагрузки $q_{11k}(t)$ и $q_{11(k+1)}(t)$ соответственно, то в момент $t-1$ может иметь место одно из следующих двух распределений нагрузок по ресничкам с номерами $11(k-1)$, $11k$, $11(k+1)$ и $11(k+2)$:

$1'$) $q_{11k}(t-1) = q_{11k}(t)$, $q_{11(k-1)}(t-1) > 0$ и $q_{11(k+1)}(t-1) = q_{11(k+1)}(t)$;

$2'$) $q_{11k}(t-1) = q_{11k}(t)$, $q_{11(k-1)}(t-1) > 0$, $q_{11(k+1)}(t-1) = 0$ и $q_{11(k+2)}(t-1) = q_{11(k+1)}(t)$.

Таким образом, если хотя бы одна ресничка с нечетным номером в ребре первого уровня имеет ненулевую нагрузку в момент t, то состояние $q'(t)$ I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$, при котором имеет место указанное распределение нагрузок по ресничкам ребра первого уровня, имеет меньшее число предшественников, чем состояние $q(t)$ I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$, при котором распределение нагрузок по ресничкам ребра первого уровня такого, что все реснички с нечетными номерами имеют нулевые нагрузки, а с четными — ненулевые.

Далее применяем описанное рассуждение к каждому ребру I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$.

Но заметим, что все нижние реснички I-дерева с четными номерами ljn, где $j = 1, 2, \ldots, 2^{l-1}$, должны иметь нулевые нагрузки, чтобы мог иметь место случай 3) для нижних ресничек ребер уровня l, а, тем самым, состояние $q(t)$ — наибольшее число предшественников.

Рассмотрим теперь ситуацию на «стыках».

Пусть ребра j и $j+1$ уровня i инцедентны ребру j' уровня $i-1$, где $2 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j < 2^{i-1}$, $1 \leqslant j' \leqslant 2^{i-2}$.

По лемме 1 состояние, при котором распределение нагрузок по указанным трем ресничкам такого, что $q_{ij1}(t) = q_{i(j+1)1}(t) = 0$ и $q_{(i-1)j'n}(t) = 2^{l-i}b$, будет иметь наибольшее число предшественников.

Таким образом, состояние $q(t)$ из $Q(b,n,l)$, при котором $q_{ij(n-1)}(t) = 0$, $q_{ijn}(t) = 2^{l-(i+1)}b$, $1 \leqslant q_{ij(2k)} \leqslant 2^{l-i}b$ и $q_{ij(2k-1)}(t) = 0$, где $1 \leqslant i < l$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$, $1 \leqslant k \leqslant \frac{n-2}{2}$; при $i = l$ выполнено $q_{lj(n-1)}(t) = 0$, $q_{ljn}(t) = 0$, $1 \leqslant q_{lj(2k)}(t) \leqslant b$ и $q_{lj(2k-1)}(t) = 0$, где $1 \leqslant j \leqslant 2^{l-1}$, $1 \leqslant k \leqslant \frac{n-2}{2}$, имеет наибольшее число предшественников.

Следовательно, если $b = r$ и n четно, то все состояния конденсации обладают c_4-свойством. Значит, множество состояний конденсации I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в этом случае совпадает с классом K_{c_4}.

Пусть n нечетно. Тогда, чтобы состояние $q(t)$ имело наибольшее число предшественников необходимо, чтобы реснички с четными номерами $11k$, где $k = 2, 4, 6, \ldots, n-1$, ребра первого уровня имели нагрузку $q_{11k}(t)$ такую, что $1 \leqslant q_{11k}(t) \leqslant 2^{l-1}b$ для каждого k, а реснички того же ребра с нечетными номерами — нулевую нагрузку. Действительно, если в момент t, $t = 1, 2, 3, \ldots,$ ресничка с четным номером $11k$, $k = 2, 4, 6, \ldots, n-1$, в ребре первого уровня имеет ненулевую нагрузку $q_{11k}(t)$, а ресничка с нечетным номером $11(k+1)$ —

нулевую нагрузку, то в момент времени $t-1$ может иметь место одно из следующих трех распределений нагрузок по ресничкам с номерами $11(k-1)$, $11k$, $11(k+1)$ и $11(k+2)$: 1), 2) и 3).

Если же в момент t, $t=1,2,3,\ldots$, реснички с четным номером $11k$ и нечетным номером $11(k+1)$ в ребре первого уровня имеют ненулевые нагрузки $q_{11k}(t)$ и $q_{11(k+1)}(t)$ соответственно, то в момент $t-1$ может иметь место одно из следующих двух распределений нагрузок по ресничкам с номерами $11(k-1)$, $11k$, $11(k+1)$ и $11(k+2)$: $1'$) и $2'$).

Таким образом, если хотя бы одна ресничка с нечетным номером в ребре первого уровня имеет ненулевую нагрузку в момент t, то состояние $q'(t)$ I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$, при котором имеет место указанное распределение нагрузок по ресничкам ребра первого уровня, имеет меньшее число предшественников, чем состояние $q(t)$ I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$, при котором распределение нагрузок по ресничкам ребра первого уровня такого, что все реснички с нечетными номерами имеют нулевые нагрузки, а с четными — ненулевые.

Далее применяем описанное рассуждение к каждому ребру I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$.

Рассмотрим теперь ситуацию на «стыках».

Здесь возможны два рода «стыков».

а) Два ребра четного уровня i, где $i=2,4,6,\ldots,l$, если l четно и $i=2,4,6,\ldots,l-1$, если l нечетно, входят в ребро нечетного уровня $i-1$;

б) Два ребра нечетного уровня i', где $i'=3,5,7,\ldots,l-1$, если l четно и $i'=3,5,7,\ldots,l$, если l нечетно, входят в ребро четного уровня $i'-1$;

В случае а) два ребра уровня i можно рассматривать как продолжение ребра уровня $i-1$ и применять к ресничкам на «стыке» этих ребер вышеописанное рассуждение. Тогда число предшественников будет наибольшим при следующем распределение нагрузок по этим ресничкам: $1 \leqslant q_{ij1}(t) \leqslant 2^{l-i}b$, $1 \leqslant q_{i(j+1)1}(t) \leqslant 2^{l-i}b$ и $q_{(i-1)j'n}(t)=0$.

В случае б) ситуация на «стыках» аналогична ситуации на «стыках» в случае четного n, рассмотренного выше. То есть, если $q(t)$ является состоянием конденсации для I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$, то распределение нагрузок по трем ресничкам с номерами $i'j1$, $i'(j+1)1$

и $(i'-1)j'n$ должно быть таким — $q_{i'j1}(t) = q_{i'(j+1)1}(t) = 0$ и $q_{(i'-1)j'n}(t) = 2^{l-i'}b$.

Заметим, что в случае, когда l четно, все нижние реснички I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ с номерами ljn, где $j = 1,2,\dots,2^{l-1}$, должны иметь нулевые нагрузки, чтобы мог иметь место случай 3) для нижних ресничек ребер уровня l, так же как и в случае, когда n четно.

Таким образом, наибольшее число предшественников имеет состояние $q(t)$ из $Q(b,n,l)$, при котором выполнено: при четном i $q_{ijn}(t) = 2^{l-(i+1)}b$, $1 \leqslant q_{ij(2k-1)}(t) \leqslant 2^{l-i}b$ и $q_{ij(2k)}(t) = 0$ и при нечетном i $q_{ijn}(t) = 0$, $1 \leqslant q_{ij(2k)}(t) \leqslant 2^{l-i}b$ и $q_{ij(2k-1)}(t) = 0$, где $1 \leqslant i < l$, если l четно и $1 \leqslant i \leqslant l$, если l нечетно, $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$, $1 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}$; при $i = l$, когда l четно, выполнено $q_{ljn}(t) = 0$, $1 \leqslant q_{lj(2k-1)}(t) \leqslant b$ и $q_{lj(2k)}(t) = 0$, где $1 \leqslant j \leqslant 2^{l-1}$, $1 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}$.

Следовательно, если $b = r$ и n нечетно, то все состояния конденсации обладают c_5-свойством. Значит, множество состояний конденсации I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в этом случае совпадает с классом K_{c_5}. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если n — четное, $n \geqslant 2$ и ребро j уровня i, где $i = 1,2,3,\dots,l$, $j = 1,2,3,\dots,2^{i-1}$, в момент t, $t \in \mathbb{N}$, образует состояние $q(t)$, такое что $q_{ijn}(t) = \begin{cases} 2^{l-(i+1)}r & \text{при } i < l, \\ 0 & \text{при } i = l \end{cases}$, $q_{ij(n-1)}(t) = 0$, $q_{ij(2k)}(t) = 1$, $q_{ij(2k-1)}(t) = 0$ для всех $k = 1,2,3,\dots,\frac{n}{2}-1$, то количество предшественников состояния $q(t)$ этого ребра равно:*

а) $\frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n}{2}} - (1-\sqrt{5})^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\sqrt{5}}$, *если* $q_{ij1}(t-1) = 0$ *и* $q_{ijn}(t-1) = 0$,

б) $2^{l-i}r \cdot \frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n}{2}+1} - (1-\sqrt{5})^{\frac{n}{2}+1}}{2^{\frac{n}{2}+1}\sqrt{5}}$, *если* $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r$ *и* $q_{ijn}(t-1) = 0$,

в) $\frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n}{2}-1} - (1-\sqrt{5})^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}-1}\sqrt{5}}$, *если* $q_{ij1}(t-1) = 0$ *и* $q_{ijn}(t-1) = 2^{l-(i+1)}r$,

г) $2^{l-i}r \cdot \frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n}{2}} - (1-\sqrt{5})^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\sqrt{5}}$, *если* $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r$ *и* $q_{ijn}(t-1) = 2^{l-(i+1)}r$.

Доказательство. Если $n = 2$, то утверждение легко проверяется подстановкой двойки вместо n в выражения.

Пусть $n > 2$.

Случай а). Посчитаем число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $q_{ij1}(t-1) = 0$ и $q_{ijn}(t-1) = 0$.

Заметим, что у всех предшественников указанного состояния данного ребра ресничка с номером $ij2$ в момент $t-1$ должна иметь нулевую нагрузку, чтобы в момент t нагрузка первой реснички оставалась нулевой. Тогда ресничка с номером $ij3$ в момент $t-1$ должна иметь единичную нагрузку, чтобы в момент t эта нагрузка перебросилась на ресничку с номером $ij2$. Ненулевые нагрузки остальных ресничек могут быть как опущены на соседние нижние реснички с нулевыми нагрузками, так и находиться на «своих» ресничках, но, учитывая правила переброса ресничкой вещества, таким образом, что только две соседних реснички могут иметь ненулевые нагрузки (из которых нижняя имеет единичную нагрузку в моменты $t-1$ и t, а верхняя ресничка имеет единичную нагрузку только в момент $t-1$), при этом две нижележащие и хотя бы одна вышележащая (относительно этих двух ресничек с единичными нагрузками) должны иметь нулевые нагрузки.

Таким образом, первым предшественником состояния $q(t)$ ребра j уровня i будет такое состояние, при котором все ненулевые нагрузки ресничек опущены на соседние нижние реснички, то есть $q_{ijn}(t-1)=0$, $q_{ij1}(t-1)=0$, $q_{ij(2k)}(t-1)=0$, $q_{ij(2k+1)}(t-1)=1$, где $k=1,2,3,\dots,\frac{n}{2}-1$.

Число предшественников, у которых все ненулевые нагрузки, кроме m, где $m=1,2,3,\dots,[\frac{n-2}{4}]$, опущены на соседние нижние реснички, равно $C^m_{\frac{n-2}{2}-m}$. Действительно, неопущенной нагрузкой может быть любая из единичных нагрузок кроме нагрузок ресничек с номерами $ij1$, $ij2$, $ij(n-1)$ и ijn, число пар соседних ресничек, которые по правилам переброса могут иметь единичные нагрузки, равно $\frac{n-4}{2}-(m-1)=\frac{n-2}{2}-m$ (из числа пар соседних ресничек вычитаем $m-1$, так как между парами соседних ресничек с единичными нагрузками должна быть хотя бы одна пара соседних ресничек с нулевыми нагрузками). Следовательно, число сочетаний из $\frac{n-2}{2}-m$ пар соседних ресничек по m таких пар ресничек равно $C^m_{\frac{n-2}{2}-m}$.

Таким образом, число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $q_{ij1}(t-1)=0$ и $q_{ijn}(t-1)=0$, равно $1+\sum_{m=1}^{[\frac{n-2}{4}]} C^m_{\frac{n-2}{2}-m} = \sum_{m=0}^{[\frac{n-2}{4}]} C^m_{\frac{n-2}{2}-m} = \frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n}{2}}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\sqrt{5}}$.

Случай б). Посчитаем число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r$ и $q_{ijn}(t-1) = 0$.

Пусть $q_{ij1}(t-1) = 1$. Заметим, что тогда у предшественников указанного состояния данного ребра ресничка с номером $ij2$ в момент $t-1$ может иметь как нулевую, так и единичную нагрузку.

В случае, когда $q_{ij2}(t-1) = 0$, применяем вышеописанное рассуждение и получаем, что число предшественников рассматривоемого состояния ребра j уровня i в этом случае будет $\frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n}{2}}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\sqrt{5}}$.

В случае, когда $q_{ij2}(t-1) = 1$, реснички с номерами $ij3$ и $ij4$ в момент $t-1$ должны иметь нулевые нагрузки. Ненулевые нагрузки остальных ресничек могут быть как опущены на соседние нижние реснички с нулевыми нагрузками, так и находиться на «своих» ресничках. Тем самым, если выбросить из рассмотрения реснички с номерами 111 и 112, то к оставшимся $n-2$ ресничкам можно применить вышеописанное рассуждение для нахождения числа предшественников, заменив при этом число ресничек n на число ресничек $n-2$.

Таким образом, получаем, что количество предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $q_{ij1}(t-1) = 1$ и $q_{ijn}(t-1) = 0$, равно $\frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n}{2}}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\sqrt{5}} + 1 + \sum_{m=1}^{[\frac{n-4}{4}]} C^m_{\frac{n-4}{2}-m} = \frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n}{2}}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\sqrt{5}} + \sum_{m=0}^{[\frac{n-4}{4}]} C^m_{\frac{n-4}{2}-m} = \frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n}{2}}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\sqrt{5}} + \frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n}{2}-1}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}-1}\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n}{2}-1}\cdot(3+\sqrt{5})-(1-\sqrt{5})^{\frac{n}{2}-1}\cdot(3-\sqrt{5})}{2^{\frac{n}{2}}\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n}{2}+1}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n}{2}+1}}{2^{\frac{n}{2}+1}\sqrt{5}}$.

Число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r$ и $q_{ijn}(t-1) = 0$, очевидно, равно $2^{l-i}r \cdot \frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n}{2}+1}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n}{2}+1}}{2^{\frac{n}{2}+1}\sqrt{5}}$.

Случай в). Посчитаем число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $q_{ij1}(t-1) = 0$ и $q_{ijn}(t-1) = 2^{l-(i+1)}r$.

Заметим, что у всех предшественников указанного состояния данного ребра ресничка с номером $ij(n-1)$ должна иметь в момент $t-1$ единичную нагрузку, а ресничка с номером $ij(n-2)$ в момент $t-1$ будет иметь при этом нулевую нагрузку. В момент $t-1$ возможные варианты нагрузок остальных ресничек совпадают с возможными вариантами нагрузок тех же ресничек, которые описаны в случае а). Тем самым, если выбросить из рассмотрения реснички с номерами

ijn и $ij(n-1)$, то к оставшимся $n-2$ ресничкам можно применить рассуждение из случая а), заменив n на $n-1$.

Таким образом, число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $q_{ij1}(t-1)=0$ и $q_{ijn}(t-1)=2^{l-(i+1)}r$, равно $\frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n}{2}-1}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}-1}\sqrt{5}}$.

Случай г). Посчитаем число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r$ и $q_{ijn}(t-1) = 2^{l-(i+1)}r$.

У всех предшественников указанного состояния данного ребра ресничка с номером $ij(n-1)$ должна иметь в момент $t-1$ единичную нагрузку, а ресничка с номером $ij(n-2)$ в момент $t-1$ будет иметь при этом нулевую нагрузку. В момент $t-1$ возможные варианты нагрузок остальных ресничек совпадают с возможными вариантами нагрузок тех же ресничек, которые описаны в случае б). Тем самым, если выбросить из рассмотрения реснички с номерами ijn и $ij(n-1)$, то к оставшимся $n-2$ ресничкам можно применить рассуждение из случая б), заменив n на $n-1$.

Таким образом, число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r$ и $q_{ijn}(t-1) = 2^{l-(i+1)}r$, равно $2^{l-i}r \cdot \frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n}{2}}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\sqrt{5}}$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Если n — нечетное, $n \geqslant 3$ и ребро j уровня i, где $i=2,4,6,\ldots,l$ при четном l и $i=2,4,6,\ldots,l-1$ при нечетном l, $j=1,2,3,\ldots,2^{i-1}$, в момент t, $t\in\mathbb{N}$, образует состояние $q(t)$, такое что $q_{ijn}(t)=2^{l-(i+1)}r$, $q_{ij(n-1)}(t)=0$, $q_{ij(2k)}(t)=0$, $q_{ij(2k-1)}(t)=1$ для всех $k=1,2,3,\ldots,\frac{n-1}{2}$, то количество предшественников состояния $q(t)$ этого ребра равно:*

а) $\frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n-1}{2}}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n-1}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{5}}$, *если* $q_{ij1}(t-1)=0$ *и* $q_{ijn}(t-1)=2^{l-(i+1)}r$,

б) $\frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n-3}{2}}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n-3}{2}}}{2^{\frac{n-3}{2}}\sqrt{5}}$, *если* $q_{ij1}(t-1)=1$ *и* $q_{ijn}(t-1)=2^{l-(i+1)}r$,

в) $\frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n+1}{2}}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n+1}{2}}}{2^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{5}}$, *если* $q_{ij1}(t-1)=0$ *и* $q_{ijn}(t-1)=0$,

г) $\frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n-1}{2}}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n-1}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{5}}$, *если* $q_{ij1}(t-1)=1$ *и* $q_{ijn}(t-1)=0$.

Доказательство. Рассмотрим каждый из этих случаев.

Случай а). Заметим, что, если убрать из рассмотрения ресничку с номером $ij1$, то возможные варианты распределения нагрузок по остальным $n-1$ ресничкам рассматриваемого ребра в момент $t-1$ полностью совпадают с возможными вариантами распределения нагрузок по ресничкам в момент $t-1$ в случае г) леммы 5 при $q_{ij1}=1$. Следовательно, по лемме 5 получаем, что число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $q_{ij1}(t-1)=0$ и $q_{ijn}(t-1)=2^{l-(i+1)}r$, равно $\frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n-1}{2}}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n-1}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{5}}$.

Случай б). Заметим, что, если убрать из рассмотрения ресничку с номером $ij1$, то возможные варианты распределения нагрузок по остальным $n-1$ ресничкам рассматриваемого ребра в момент $t-1$ полностью совпадают с возможными вариантами распределения нагрузок по ресничкам в момент $t-1$ в случае в) леммы 5. Следовательно, по лемме 5 получаем, что число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $q_{ij1}(t-1)=1$ и $q_{ijn}(t-1)=2^{l-(i+1)}r$, равно $\frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n-3}{2}}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n-3}{2}}}{2^{\frac{n-3}{2}}\sqrt{5}}$.

Случай в). Заметим, что, если убрать из рассмотрения ресничку с номером $ij1$, то возможные варианты распределения нагрузок по остальным $n-1$ ресничкам рассматриваемого ребра в момент $t-1$ полностью совпадают с возможными вариантами распределения нагрузок по ресничкам в момент $t-1$ в случае б) леммы 5. Следовательно, по лемме 5 получаем, что число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $q_{ij1}(t-1)=0$ и $q_{ijn}(t-1)=0$, равно $\frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n+1}{2}}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n+1}{2}}}{2^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{5}}$.

Случай г). Заметим, что, если убрать из рассмотрения ресничку с номером $ij1$, то возможные варианты распределения нагрузок по остальным $n-1$ ресничкам рассматриваемого ребра в момент $t-1$ полностью совпадают с возможными вариантами распределения нагрузок по ресничкам в момент $t-1$ в случае а) леммы 5. Следовательно, по лемме 5 получаем, что число предшественников состояния

$q(t)$ ребра j уровня i, таких что $q_{ij1}(t-1)=1$ и $q_{ijn}(t-1)=0$, равно $\frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n-1}{2}}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n-1}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{5}}$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Если n — нечетное, $n \geqslant 3$ и ребро j уровня i, где $i = 1,3,5,\dots,l$ при нечетном l и $i=1,3,5,\dots,l-1$ при четном l, $j = 1,2,3,\dots,2^{i-1}$, в момент t, $t\in\mathbb{N}$, образует состояние $q(t)$, такое что $q_{ijn}(t)=0$, $q_{ij(n-1)}(t)=1$, $q_{ij(2k)}(t)=1$, $q_{ij(2k-1)}(t)=0$ для всех $k=1,2,3,\dots,\frac{n-1}{2}$, то количество предшественников состояния $q(t)$ этого ребра равно:*

а) $\frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n-3}{2}}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n-3}{2}}}{2^{\frac{n-3}{2}}\sqrt{5}}$, *если* $q_{ij1}(t-1)=0$ *и* $q_{ijn}(t-1)=0$,

б) $2^{l-i}r\cdot\frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n-1}{2}}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n-1}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{5}}$, *если* $1\leqslant q_{ij1}(t-1)\leqslant 2^{l-i}r$ *и* $q_{ijn}(t-1)=0$,

в) $\frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n-1}{2}}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n-1}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{5}}$, *если* $q_{ij1}(t-1)=0$ *и* $q_{ijn}(t-1)=1$,

г) $2^{l-i}r\cdot\frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n+1}{2}}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n+1}{2}}}{2^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{5}}$, *если* $1\leqslant q_{ij1}(t-1)\leqslant 2^{l-i}r$ *и* $q_{ijn}(t-1)=1$.

Доказательство. Рассмотрим каждый из этих случаев.

Случай а). Заметим, что, если убрать из рассмотрения ресничку с номером ijn, то возможные варианты распределения нагрузок по остальным $n-1$ ресничкам рассматриваемого ребра в момент $t-1$ полностью совпадают с возможными вариантами распределения нагрузок по ресничкам в момент $t-1$ в случае в) леммы 5. Следовательно, по лемме 5 получаем, что число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $q_{ij1}(t-1)=0$ и $q_{ijn}(t-1)=0$, равно $\frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n-3}{2}}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n-3}{2}}}{2^{\frac{n-3}{2}}\sqrt{5}}$.

Случай б). Заметим, что, если убрать из рассмотрения ресничку с номером ijn, то возможные варианты распределения нагрузок по остальным $n-1$ ресничкам рассматриваемого ребра в момент $t-1$ полностью совпадают с возможными вариантами распределения нагрузок по ресничкам в момент $t-1$ в случае г) леммы 5. Следовательно, по лемме 5 получаем, что число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $1\leqslant q_{ij1}(t-1)\leqslant 2^{l-i}r$ и $q_{ijn}(t-1)=0$, равно $2^{l-i}r\cdot\frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n-1}{2}}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n-1}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{5}}$.

Случай в). Заметим, что, если убрать из рассмотрения ресничку с номером ijn, то возможные варианты распределения нагрузок по остальным $n-1$ ресничкам рассматриваемого ребра в момент $t-1$ полностью совпадают с возможными вариантами распределения нагрузок по ресничкам в момент $t-1$ в случае а) леммы 5. Следовательно, по лемме 5 получаем, что число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $q_{ij1}(t-1)=0$ и $q_{ijn}(t-1)=1$, равно $\frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n-1}{2}}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n-1}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{5}}$.

Случай г). Заметим, что, если убрать из рассмотрения ресничку с номером ijn, то возможные варианты распределения нагрузок по остальным $n-1$ ресничкам рассматриваемого ребра в момент $t-1$ полностью совпадают с возможными вариантами распределения нагрузок по ресничкам в момент $t-1$ в случае б) леммы 5. Следовательно, по лемме 5 получаем, что число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r$ и $q_{ijn}(t-1)=1$, равно $2^{l-i}r \cdot \frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n+1}{2}}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n+1}{2}}}{2^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{5}}$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Если n — четное, $n \geqslant 2$ и ребро j уровня i, где $i = 1,2,3,\ldots,l-1$, $j=1,2,3,\ldots,2^{i-1}$, в момент t, $t \in \mathbb{N}$, образует состояние $q(t)$, такое что $q_{ijn}(t)=2^{l-(i+1)}r$, $q_{ij1}(t)=0$, $q_{ij(2k)}(t)=2^{l-i}r$ и $q_{ij(2k+1)}(t)=1$, где $1 \leqslant i < l$, и при $i=l$ выполнено $q_{lj1}(t)=0$, $q_{ljn}(t)=0$, $q_{lj(2k+1)}(t)=1$ и $q_{lj(2k)}(t)=r$ для всех $k=1,2,3,\ldots,\frac{n-2}{2}$, то количество предшественников состояния $q(t)$ этого ребра равно:*
а) $2^{\frac{n}{2}-2}$ ($n>2$), если $q_{ij1}(t-1)=0$ и $q_{ijn}(t-1)=2^{l-(i+1)}r$,
б) $2^{l-i}r\cdot 2^{\frac{n}{2}-1}$, если $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r$ и $q_{ijn}(t-1)=2^{l-(i+1)}r$,
в) $2^{\frac{n}{2}-2}$ ($n>2$) при $1 \leqslant i < l$, если $q_{ij1}(t-1)=0$ и $q_{ijn}(t-1)=0$,
в′) $3\cdot 2^{\frac{n}{2}-3}$ ($n>4$) или 1 ($n=4$) при $i=l$, если $q_{lj1}(t-1)=0$,
г) $2^{l-i}r\cdot 2^{\frac{n}{2}-1}$ при $1 \leqslant i < l$, если $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r$ и $q_{ijn}(t-1)=0$,
г′) $r\cdot 3\cdot 2^{\frac{n}{2}-2}$ ($n>2$) при $i=l$, если $1 \leqslant q_{lj1}(t-1) \leqslant r$.

Доказательство. Если $n=2$, то утверждения б) и г) легко проверяются подстановкой двойки вместо n в выражения. В остальных случаях предшественников не существует.

Пусть $n>2$. Рассмотрим каждый из этих случаев.

Случай а). Посчитаем число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $q_{ij1}(t-1)=0$ и $q_{ijn}(t-1)=2^{l-(i+1)}r$.

Заметим, что у всех предшественников указанного состояния данного ребра ресничка с номером $ij2$ в момент $t-1$ должна иметь нулевую нагрузку, чтобы в момент t нагрузка первой реснички оставалась нулевой. Тогда ресничка с номером $ij3$ в момент $t-1$ должна иметь нагрузку $2^{l-i}r+1$, чтобы в момент t нагрузка $2^{l-i}r$ перебросилась на ресничку с номером $ij2$. Нагрузки $2^{l-i}r$ остальных ресничек могут быть как опущены на соседние нижние реснички с единичными нагрузками, так и находиться на «своих» ресничках, но, учитывая правила переброса ресничкой вещества, таким образом, что только две соседних реснички могут иметь нагрузки больше единицы (из которых нижняя имеет нагрузку $2^{l-i}r$ в моменты $t-1$ и t, а верхняя ресничка имеет нагрузку $2^{l-i}r+1$ в момент $t-1$), при этом одна нижележащая и одна вышележащая реснички (относительно этих двух ресничек с нагрузками, большими единицы) должны иметь нагрузки 1 и 0, соответственно.

Таким образом, первым предшественником состояния $q(t)$ ребра j уровня i будет такое состояние, при котором все нагрузки ресничек, большие единицы, опущены на соседние нижние реснички, то есть $q_{ijn}(t-1)=2^{l-(i+1)}r$, $q_{ij1}(t-1)=0$, $q_{ij(2k)}(t-1)=0$, $q_{ij(2k+1)}(t-1)=2^{l-i}r+1$, где $k=1,2,3,\dots,\frac{n}{2}-1$.

Число предшественников, у которых все нагрузки, большие единицы, кроме m таких нагрузок, где $m=1,2,3,\dots,[\frac{n-4}{4}]$, опущены на соседние нижние реснички, равно $C^{2m}_{\frac{n}{2}-1}$. Действительно, неопущенной нагрузкой может быть любая из нагрузок, больших единицы, кроме нагрузок ресничек с номерами $ij1$ и ijn. Число пар соседних ресничек, которые по правилам переброса могут иметь нагрузки, большие единицы, равно $\frac{n-2}{2}=\frac{n}{2}-1$. Заметим, что число пар соседних ресничек с нагрузками $2^{l-i}r+1$ и $2^{l-i}r$ совпадает с числом пар соседних ресничек с нагрузками 1 и 0, соответственно, так как последняя пара нагрузок ресничек образуется при опускании нагрузки $2^{l-i}r$ на соседнюю нижнюю ресничку с единичной нагрузкой при сохранении единичной нагрузки верхней реснички (можно считать, что ресничка с номером ijn имеет нулевую нагрузку вместо $2^{l-(i+1)}r$, чтобы получить пару соседних ресничек с нагрузками 1 и 0; на число предшественников этого ребра нагрузка самой нижней реснички в этом случае не влияет). Следовательно, число сочетаний из $\frac{n}{2} - 1$ пар соседних ресничек по m пар ресничек с нагрузками $2^{l-i}r + 1$ и $2^{l-i}r$ и m пар ресничек с нагрузками 1 и 0 равно $C_{\frac{n}{2}-1}^{2m}$.

Таким образом, число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $q_{ij1}(t-1) = 0$ и $q_{ijn}(t-1) = 2^{l-(i+1)}r$, равно $1 + \sum_{m=1}^{[\frac{n-4}{4}]} C_{\frac{n}{2}-1}^{2m} = \sum_{m=0}^{[\frac{n-4}{4}]} C_{\frac{n}{2}-1}^{2m} = 2^{\frac{n}{2}-2}$.

Случай б). Посчитаем число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r$ и $q_{ijn}(t-1) = 2^{l-(i+1)}r$.

Заметим, что в этом случае число предшественников указанного состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $q_{ij1}(t-1) = 1$ и $q_{ijn}(t-1) = 2^{l-(i+1)}r$, равно $2^{\frac{n}{2}-1}$. Действительно, если для всех предшественников из случая а) положить нагрузку реснички с номером 111 равную единицы, то для ресничек с номерами 112 и 113 возможны два варианта: $q_{112}(t-1) = 0$, $q_{113}(t-1) = 2^{l-i}r+1$ и $q_{112}(t-1) = 2^{l-i}r$, $q_{113}(t-1) = 1$. Возможные варианты нагрузок остальных ресничек индентичны вариантам нагрузок остальных ресничек в случае а). Таким образом, число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $q_{ij1}(t-1) = 1$ и $q_{ijn}(t-1) = 2^{l-(i+1)}r$, равно $2^{\frac{n}{2}-1}$. Следовательно, число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r$ и $q_{ijn}(t-1) = 2^{l-(i+1)}r$, равно $2^{l-i}r \cdot 2^{\frac{n}{2}-1}$.

Случай в). Посчитаем число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $q_{ij1}(t-1) = 0$ и $q_{ijn}(t-1) = 0$.

Заметим, что доказательство в этом случае при $1 \leqslant i \leqslant l-1$ индентично доказательству случая а) и, следовательно, число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $q_{ij1}(t-1) = 0$ и $q_{ijn}(t-1) = 0$, равно $2^{\frac{n}{2}-2}$.

Случай в$'$). При $i = l$ заметим, что кроме $2^{\frac{n}{2}-2}$ предшественников из случая в) есть еще предшественники с такими нагрузками ресничек с номерами ljn и $lj(n-1)$, что $q_{ljn}(t-1) = 1$ и $q_{lj(n-1)}(t-1) = 0$, а варианты нагрузок остальных ресничек такие же, как и в случае $1 \leqslant i \leqslant l-1$. Следовательно, число таких предшественников равно $2^{\frac{n-2}{2}-2} = 2^{\frac{n}{2}-3}$. Значит, число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня l, таких что $q_{lj1}(t-1) = 0$ и $q_{ljn}(t-1) = 0$, равно $2^{\frac{n}{2}-2} + 2^{\frac{n}{2}-3} = 3 \cdot 2^{\frac{n}{2}-3}$.

Случай г). Посчитаем число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r$ и $q_{ijn}(t-1) = 0$.

Заметим, что доказательство в этом случае при $1 \leqslant i \leqslant l-1$ индентично доказательству случая б) и, следовательно, число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r$ и $q_{ijn}(t-1) = 0$, равно $2^{l-i}r \cdot 2^{\frac{n}{2}-1}$.

Случай г$'$). При $i = l$ заметим, что кроме $r \cdot 2^{\frac{n}{2}-1}$ предшественников из случая г) есть еще предшественники с такими нагрузками ресничек с номерами ljn и $lj(n-1)$, что $q_{ljn}(t-1) = 1$ и $q_{lj(n-1)}(t-1) = 0$, а варианты нагрузок остальных ресничек такие же, как и в случае $1 \leqslant i \leqslant l-1$. Следовательно, число таких предшественников равно $r \cdot 2^{\frac{n-2}{2}-1} = r \cdot 2^{\frac{n}{2}-2}$. Значит, число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня l, таких что $1 \leqslant q_{lj1}(t-1) \leqslant r$ и $q_{ljn}(t-1) = 0$, равно $r \cdot (2^{\frac{n}{2}-1} + 2^{\frac{n}{2}-2}) = 3 \cdot r \cdot 2^{\frac{n}{2}-2}$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Если n — нечетное, $n \geqslant 3$ и ребро j уровня i, где $i = 1, 3, 5, \ldots, l$ при нечетном l и $i = 1, 3, 5, \ldots, l-1$ при четном l, $j = 1, 2, 3, \ldots, 2^{i-1}$, в момент t, $t \in \mathbb{N}$, образует состояние $q(t)$, такое что $q_{ij1}(t) = 0$, $q_{ij(2k+1)}(t) = 1$ и $q_{ij(2k)}(t) = 2^{l-i}r$ для всех $k = 1, 2, 3, \ldots, \frac{n-1}{2}$, то количество предшественников состояния $q(t)$ этого ребра равно:*
а) $2^{\frac{n+1}{2}-2}$, если $q_{ij1}(t-1) = 0$,
б) $2^{l-i}r \cdot 2^{\frac{n+1}{2}-1}$, если $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r$.

Доказательство. Рассмотрим каждый из этих случаев.

Случай а). Заметим, что, если добавить к рассматриваемому ребру ресничку с номером $ij(n+1)$, нагрузка которой в момент $t-1$ нулевая, то возможные варианты распределения нагрузок $n+1$ ресничек рассматриваемого ребра в момент $t-1$ полностью совпадают с возможными вариантами распределения нагрузок ресничек в момент $t-1$ в случае в) леммы 8. Следовательно, по лемме 8 получаем, что число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $q_{ij1}(t-1) = 0$, равно $2^{\frac{n+1}{2}-2}$.

Случай б). Заметим, что, если добавить к рассматриваемому ребру ресничку с номером $ij(n+1)$, нагрузка которой в момент $t-1$ нулевая, то возможные варианты распределения нагрузок $n+1$ ресничек рассматриваемого ребра в момент $t-1$ полностью совпадают с возможными вариантами распределения нагрузок ресничек в момент $t-1$ в случае г) леммы 8. Следовательно, по лемме 8 получаем, что число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r$, равно $2^{l-i}r \cdot 2^{\frac{n+1}{2}-1}$. Лемма доказана.

Лемма 10. *Если n — нечетное, $n \geqslant 3$ и ребро j уровня i, где $i = 2, 4, 6, \ldots, l$ при четном l и $i = 2, 4, 6, \ldots, l-1$ при нечетном l, $j = 1, 2, 3, \ldots, 2^{i-1}$, в момент t, $t \in \mathbb{N}$, образует состояние $q(t)$, такое что $q_{ij(2k)}(t) = 1$, $q_{ij(2k-1)}(t) = 2^{l-i}r$ и $q_{ijn}(t) = \begin{cases} 2^{l-(i+1)}r, & \text{при } i < l, \\ 0, & \text{при } i = l \end{cases}$ для всех $k = 1, 2, 3, \ldots, \frac{n-1}{2}$, то количество предшественников состояния $q(t)$ этого ребра равно:*
а) $2^{\frac{n+1}{2}-1}$, если $q_{ijn}(t-1) = 2^{l-(i+1)}r$,
б) $2^{\frac{n+1}{2}-1}$ при $2 \leqslant i < l$, если $q_{ijn}(t-1) = 0$,
б′) $3 \cdot 2^{\frac{n+1}{2}-2}$ при $i = l$.

Доказательство. Рассмотрим каждый из этих случаев.

Случай а). Заметим, что, если добавить к рассматриваемому ребру ресничку сверху с единичной нагрузкой в момент $t-1$ и положить, что ее номер — $ij1$, затем перенумеровать все остальные реснички таким образом, что последняя ресничка в этом ребре будет иметь номер $ij(n+1)$, то возможные варианты распределения нагрузок $n+1$ ресничек рассматриваемого ребра в момент $t-1$ полностью совпадают с возможными вариантами распределения нагрузок ресничек в момент $t-1$ в случае б) леммы 8. Следовательно, по лемме 8 получаем, что число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $q_{ijn}(t-1) = 2^{l-(i+1)}r$, равно $2^{\frac{n+1}{2}-1}$.

Случай б). Заметим, что этот случай индентичен случаю а), так как нагрузка нижней реснички не меняется в моменты $t-1$ и t, а следовательно, не влияет на число предшественников рассматриваемого ребра. Значит, число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $q_{ijn}(t-1) = 0$, равно $2^{\frac{n+1}{2}-1}$.

Случай б$'$). Заметим, что, если добавить к рассматриваемому ребру сверху ресничку с единичной наргрузкой в момент $t-1$ и положить, что ее номер — $lj1$, затем перенумеровать все остальные реснички таким образом, что последняя ресничка в этом ребре будет иметь номер $lj(n+1)$, то возможные варианты распределения нагрузок $n+1$ ресничек рассматриваемого ребра в момент $t-1$ полностью совпадают с возможными вариантами распределения нагрузок ресничек в момент $t-1$ в случае г$'$) леммы 8. Следовательно, по лемме 8 получаем, что число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня l равно $3\cdot 2^{\frac{n+1}{2}-2}$. Лемма доказана.

Лемма 11. *Если $n \geqslant 2$ и ребро j уровня i, где $i=1,2,3,\dots,l$, $j=1,2,3,\dots,2^{i-1}$, в момент t, $t\in\mathbb{N}$, образует состояние $q(t)$, такое что $q_{ij1}(t)=0$, $q_{ijn}(t)=\begin{cases}2^{l-(i+1)}r, & \text{если } i<l,\\ 0, & \text{если } i=l\end{cases}$, $q_{ijk}(t)=2^{l-i}r$ для всех $k=2,3,\dots,n-1$, то количество предшественников состояния $q(t)$ этого ребра равно:*

а) $\frac{(1+\sqrt5)^{n-2}-(1-\sqrt5)^{n-2}}{2^{n-2}\sqrt5}$, если $q_{ij1}(t-1)=0$ и $q_{ijn}(t-1)\geqslant 2^{l-(i+1)}r$,

б) $2^{l-i}r\cdot\frac{(1+\sqrt5)^{n}-(1-\sqrt5)^{n}}{2^{n}\sqrt5}$, если $1\leqslant q_{ij1}(t-1)\leqslant 2^{l-i}r$ и $q_{ijn}(t-1)\geqslant 2^{l-(i+1)}r$,

в) $\frac{(1+\sqrt5)^{n-3}-(1-\sqrt5)^{n-3}}{2^{n-3}\sqrt5}$ $(n>2)$ при $1\leqslant i<l$, если $q_{ij1}(t-1)=0$ и $q_{ijn}(t-1)=0$,

в$'$) $\frac{(1+\sqrt5)^{n-2}-(1-\sqrt5)^{n-2}}{2^{n-2}\sqrt5}$ при $i=l$, если $q_{lj1}(t-1)=0$,

г) $2^{l-i}r\cdot\frac{(1+\sqrt5)^{n-1}-(1-\sqrt5)^{n-1}}{2^{n-1}\sqrt5}$ при $1\leqslant i<l$, если $1\leqslant q_{ij1}(t-1)\leqslant 2^{l-i}r$ и $q_{ijn}(t-1)=0$,

г$'$) $r\cdot\frac{(1+\sqrt5)^{n}-(1-\sqrt5)^{n}}{2^{n}\sqrt5}$ при $i=l$, если $1\leqslant q_{lj1}(t-1)\leqslant r$.

Доказательство. Если $n=2$, то все утверждения кроме случая в) легко проверяются подстановкой двойки вместо n в выражения. В случае в) предшественников не существует.

Пусть $n>2$. Рассмотрим каждый из этих случаев.

Случай а). Посчитаем число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $q_{ij1}(t-1)=0$ и $q_{ijn}(t-1)\geqslant 2^{l-(i+1)}r$.

Заметим, что у всех предшественников указанного состояния данного ребра ресничка с номером $ij2$ в момент $t-1$ должна иметь нулевую нагрузку, чтобы в момент t нагрузка первой реснички оставалась нулевой. Тогда ресничка с номером $ij3$ в момент $t-1$ должна иметь нагрузку $2 \cdot 2^{l-i}r$, чтобы в момент t нагрузка $2^{l-i}r$ перебросилась на ресничку с номером $ij2$. Нагрузки остальных ресничек, равные $2^{l-i}r$, могут быть как опущены на соседние нижние реснички, так и находиться на «своих» ресничках, но, учитывая правила переброса ресничкой вещества, таким образом, что, если ресничка имеет нагрузку $2 \cdot 2^{l-i}r$ или $2^{l-(i+1)}r + 2^{l-i}r$ в момент $t-1$, то соседняя верхняя ресничка должна иметь нулевую нагрузку в момент $t-1$. Таким образом, число предшественников, у которых m нагрузок, где $m = 0, 1, 2, 3, \ldots, [\frac{n-3}{2}]$, опущены на соседние нижние реснички, равно C^m_{n-3-m}. Действительно, число ресничек, нагрузки которых могут быть опущены, равно $n-3-1-(m-1) = n-3-m$ (из $n-3$ ресничек вычитаем ресничку с номером ijn, так как ее нагрузка не может быть опущенной, и вычитаем $m-1$, так как между двумя ресничками с нагрузками $2 \cdot 2^{l-i}r$ обязательно должна быть одна ресничка с нулевой нагрузкой). Следовательно, число сочетаний из $n-3-m$ ресничек по m таких ресничек равно C^m_{n-3-m}.

Таким образом, число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $q_{ij1}(t-1) = 0$ и $q_{ijn}(t-1) \geqslant 2^{l-(i+1)}r$, равно $\sum_{m=0}^{[\frac{n-3}{2}]} C^m_{n-3-m} = \frac{(1+\sqrt{5})^{n-2}-(1-\sqrt{5})^{n-2}}{2^{n-2}\sqrt{5}}$.

Случай б). Посчитаем число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r$ и $q_{ijn}(t-1) \geqslant 2^{l-(i+1)}r$.

Заметим, что в этом случае число предшественников указанного состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $q_{ij1}(t-1) = 1$ и $q_{ijn}(t-1) \geqslant 2^{l-(i+1)}r$, равно $\frac{(1+\sqrt{5})^{n}-(1-\sqrt{5})^{n}}{2^{n}\sqrt{5}}$. Действительно, если для всех предшественников из случая а) положить нагрузку реснички с номером 111 равную единицы, то для ресничек с номерами 112 и 113 возможны два варианта их нагрузок: $q_{112}(t-1) = 0$, $q_{113}(t-1) = 2 \cdot 2^{l-i}r$ и $q_{112}(t-1) = 2^{l-i}r$, $q_{113}(t-1) = 2^{l-i}r$. Возможные варианты нагрузок остальных ресничек индентичны вариантам нагрузок этих же ресничек в случае а). Таким образом, число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $q_{ij1}(t-1) = 1$

и $q_{ijn}(t-1) \geqslant 2^{l-(i+1)}r$, равно $\sum_{m=0}^{[\frac{n-1}{2}]} C_{n-1-m}^{m} = \frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$. Следовательно, число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r$ и $q_{ijn}(t-1) \geqslant 2^{l-(i+1)}r$, равно $2^{l-i}r \cdot \frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$.

Случай в). Посчитаем число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $q_{ij1}(t-1) = 0$ и $q_{ijn}(t-1) = 0$.

Заметим, что, если убрать из рассмотрения ресничку с номером ijn, то возможные варианты распределения нагрузок по остальным $n-1$ ресничкам рассматриваемого ребра в момент $t-1$ полностью совпадают с возможными вариантами распределения нагрузок по ресничкам в момент $t-1$ в случае а). Следовательно, число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $q_{ij1}(t-1) = 0$ и $q_{ijn}(t-1) = 0$, равно $\frac{(1+\sqrt{5})^{n-3}-(1-\sqrt{5})^{n-3}}{2^{n-3}\sqrt{5}}$.

Случай в$'$). При $i = l$ заметим, что кроме $\frac{(1+\sqrt{5})^{n-3}-(1-\sqrt{5})^{n-3}}{2^{n-3}\sqrt{5}}$ предшественников из случая в) есть еще предшественники с такими нагрузками ресничек с номерами ljn и $lj(n-1)$, что $q_{ljn}(t-1) = r$ и $q_{lj(n-1)}(t-1) = 0$, а варианты нагрузок остальных ресничек такие же, как и в случае в). Значит, если убрать из рассмотрения ресничку с номером ljn, то, пользуясь случаем в), получаем, что количество указанных предшественников равно $\frac{(1+\sqrt{5})^{n-4}-(1-\sqrt{5})^{n-4}}{2^{n-4}\sqrt{5}}$. Следовательно, общее число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня l, таких что $q_{lj1}(t-1) = 0$, равно $\frac{(1+\sqrt{5})^{n-3}-(1-\sqrt{5})^{n-3}}{2^{n-3}\sqrt{5}} + \frac{(1+\sqrt{5})^{n-4}-(1-\sqrt{5})^{n-4}}{2^{n-4}\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5})^{n-2}-(1-\sqrt{5})^{n-2}}{2^{n-2}\sqrt{5}}$.

Случай г). Посчитаем число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r$ и $q_{ijn}(t-1) = 0$.

Заметим, что, если убрать из рассмотрения ресничку с номером ijn, то возможные варианты распределения нагрузок по остальным $n-1$ ресничкам рассматриваемого ребра в момент $t-1$ полностью совпадают с возможными вариантами распределения нагрузок по ресничкам в момент $t-1$ в случае б). Следовательно, число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня i, таких что $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r$ и $q_{ijn}(t-1) = 0$, равно $2^{l-i}r \cdot \frac{(1+\sqrt{5})^{n-1}-(1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}\sqrt{5}}$.

Случай г$'$). При $i = l$ заметим, что кроме $r \cdot \frac{(1+\sqrt{5})^{n-1}-(1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}\sqrt{5}}$ предшественников из случая г) есть еще предшественники с такими нагрузками ресничек с номерами ljn и $lj(n-1)$, что $q_{ljn}(t-1) = r$ и $q_{lj(n-1)}(t-1) = 0$, а варианты нагрузок остальных ресничек такие же, как и в случае г). Значит, если убрать из рассмотрения ресничку с номером ljn, то, пользуясь случаем г), получаем, что количество указанных предшественников равно $r \cdot \frac{(1+\sqrt{5})^{n-2}-(1-\sqrt{5})^{n-2}}{2^{n-2}\sqrt{5}}$. Следовательно, общее число предшественников состояния $q(t)$ ребра j уровня l, таких что $1 \leqslant q_{lj1}(t-1) \leqslant r$, равно $\frac{(1+\sqrt{5})^{n-1}-(1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}\sqrt{5}} + \frac{(1+\sqrt{5})^{n-2}-(1-\sqrt{5})^{n-2}}{2^{n-2}\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5})^{n}-(1-\sqrt{5})^{n}}{2^{n}\sqrt{5}}$. Лемма доказана.

Пусть $e_1 = \frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n}{2}-1}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}-1}\sqrt{5}}$, $e_2 = \frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n}{2}}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\sqrt{5}}$,
$e_3 = \frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n}{2}+1}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n}{2}+1}}{2^{\frac{n}{2}+1}\sqrt{5}}$, $e_4 = \frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n-3}{2}}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n-3}{2}}}{2^{\frac{n-3}{2}}\sqrt{5}}$,
$e_5 = \frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n-1}{2}}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n-1}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{5}}$, $e_6 = \frac{(1+\sqrt{5})^{\frac{n+1}{2}}-(1-\sqrt{5})^{\frac{n+1}{2}}}{2^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{5}}$,
$e_7 = \frac{(1+\sqrt{5})^{n-3}-(1-\sqrt{5})^{n-3}}{2^{n-3}\sqrt{5}}$, $e_8 = \frac{(1+\sqrt{5})^{n-2}-(1-\sqrt{5})^{n-2}}{2^{n-2}\sqrt{5}}$,
$e_9 = \frac{(1+\sqrt{5})^{n-1}-(1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}\sqrt{5}}$, $e_{10} = \frac{(1+\sqrt{5})^{n}-(1-\sqrt{5})^{n}}{2^{n}\sqrt{5}}$.
Заметим, что $e_1 \leqslant e_2 \leqslant e_3$, $e_4 \leqslant e_5 \leqslant e_6$ и $e_7 \leqslant e_8 \leqslant e_9 \leqslant e_{10}$.

Лемма 12. *Имеет место*

$$2^{2^{l-1}\cdot\log_2(2r\cdot e_2^2)} \preccurlyeq S_{K_{c_4}} \preccurlyeq 2^{2^{l-1}\cdot\log_2(6\sqrt{3}r\cdot e_3^2)}$$

при $l \to \infty$.

Доказательство. Так как число прообразов каждого состояния из класса K_{c_4} одно и то же, то посчитаем число прообразов, например, состояния $q(t)$ из K_{c_4}, такого что $q_{ij(n-1)}(t) = 0$, $q_{ijn}(t) = 2^{l-(i+1)}r$, $q_{ij(2k)}(t) = 1$ и $q_{ij(2k-1)}(t) = 0$, где $1 \leqslant i < l$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$, $1 \leqslant k \leqslant \frac{n-2}{2}$; при $i = l$ выполнено $q_{lj(n-1)}(t) = 0$, $q_{ljn}(t) = 0$, $q_{lj(2k)}(t) = 1$ и $q_{lj(2k-1)}(t) = 0$, где $1 \leqslant j \leqslant 2^{l-1}$, $1 \leqslant k \leqslant \frac{n-2}{2}$.

Оценим сверху и снизу число прообразов состояния конденсации $q(t)$ из K_{c_4}.

Для получения оценки снизу посчитаем количество таких предшественников состояния $q(t)$ из K_{c_4} I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$, что $q_{ijn}(t-1)=0$, где $i=1,2,3,\dots,l$ и $j=1,2,3,\dots,2^{i-1}$.

Заметим, что для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i=2,3,\dots,l$ и $j=1,2,3,\dots,2^{i-1}-1$, I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии $q(t)$ имеют место $(2^{l-i}r-1)\cdot e_3^2+2\cdot e_2\cdot e_3$ прообразов, а для ребра первого уровня I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии $q(t)$ по лемме 5 имеют место $2^{l-1}r\cdot e_3+e_2$ прообразов. Действительно, если нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна $q_{ij1}(t-1)$, где $1\leqslant q_{ij1}(t-1)\leqslant 2^{l-i}r-1$, то нагрузка первой реснички ребра $j+1$ уровня i в момент $t-1$ определена однозначно, а именно $q_{i(j+1)1}(t-1)=2^{l-i}r-q_{ij1}(t-1)$. По лемме 5 число прообразов ребра j уровня i равно $(2^{l-i}r-1)\cdot e_3$, а так как нагрузка первой реснички ребра уровня $j+1$ определена однозначно при каждом значении нагрузки первой реснички ребра j уровня i, то число прообразов ребра $j+1$ уровня i равно e_3. Следовательно, если нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна $q_{ij1}(t-1)$, где $1\leqslant q_{ij1}(t-1)\leqslant 2^{l-i}r-1$, число прообразов пары инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i=2,3,\dots,l$ и $j=1,2,3,\dots,2^{i-1}-1$, I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии $q(t)$ равно $(2^{l-i}r-1)\cdot e_3^2$. Если нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна $2^{l-i}r$, то нагрузка первой реснички ребра $j+1$ уровня i в момент $t-1$ определена однозначно, а именно $q_{i(j+1)1}(t-1)=0$. По лемме 5 число прообразов ребра j уровня i равно e_3, а число прообразов ребра $j+1$ уровня i равно e_2. Если нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна нулю, то нагрузка первой реснички ребра $j+1$ уровня i в момент $t-1$ определена однозначно, а именно $q_{i(j+1)1}(t-1)=2^{l-i}r$. Этот случай симметричен случаю, когда нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна $2^{l-i}r$. Следовательно, для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i=2,3,\dots,l$ и $j=1,2,3,\dots,2^{i-1}-1$, I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии $q(t)$ имеют место $(2^{l-i}r-1)\cdot e_3^2+2\cdot e_2\cdot e_3$ прообразов.

На каждом уровне i, где $i=2,3,\dots,l$, количество пар инцидентных ребер равно 2^{i-2}. Значит, число прообразов состояния $q(t)$ из K_{c_4} I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$, таких что $q_{ijn}(t-1)=0$ при всех i

и j, равно $(2^{l-1}r \cdot e_3 + e_2) \cdot \Pi_{i=2}^{l}((2^{l-i}r - 1) \cdot e_3^2 + 2 \cdot e_2 \cdot e_3)^{2^{i-2}} \geqslant 2^{l-1+\sum_{i=2}^{l} 2^{i-2}(l-i)} \cdot r^{1+\sum_{i=2}^{l} 2^{i-2}} \cdot e_2^{1+\sum_{i=2}^{l} 2^{i-1}} = 2^{2^{l-1}-1} \cdot r^{2^{l-1}} \cdot e_2^{2^l-1} \asymp 2^{2^{l-1}\cdot(1+\log_2 r+2\log_2 e_2)} = 2^{2^{l-1}\cdot\log_2(2r\cdot e_2^2)}$ при $l \to \infty$.

Таким образом, $S_{K_{c_4}} \succcurlyeq 2^{2^{l-1}\cdot\log_2(2r\cdot e_2^2)}$ при $l \to \infty$.

Для получения оценки сверху заметим, что для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i = 2, 3, \ldots, l-1$ и $j = 1, 2, 3, \ldots, 2^{i-1}-1$, I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ в состоянии $q(t)$ количество прообразов не превосходит числа $(2^{l-i}r-1)\cdot(e_3+e_2)^2+2\cdot(e_2+e_1)\cdot(e_3+e_2)+(e_2+e_1)^2$, для инцидентных ребер уровня l этого I-дерева в состоянии $q(t)$ имеют место не более $(r-1)\cdot e_3^2+2\cdot e_2\cdot e_3+e_2^2$ прообразов, а количество предшественников для ребра первого уровня этого I-дерева в состоянии $q(t)$ по лемме 5 равно $2^{l-1}r\cdot(e_3+e_2)+e_2+e_1$. Действительно, пусть нагрузка реснички с номером n ребра уровня $i-1$ (инцидентного ребрам j и $j+1$ уровня i) в момент $t-1$ равна нулю. Тогда, если нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна $q_{ij1}(t-1)$, где $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r-1$, то нагрузка первой реснички ребра $j+1$ уровня i в момент $t-1$ определена однозначно, а именно $q_{i(j+1)1}(t-1) = 2^{l-i}r - q_{ij1}(t-1)$. По лемме 5 число прообразов ребра j уровня i равно $(2^{l-i}r-1)\cdot(e_3+e_2)$, а так как нагрузка первой реснички ребра уровня $j+1$ определена однозначно при каждом значении нагрузки первой реснички ребра j, то число прообразов ребра $j+1$ равно e_3+e_2. Следовательно, если нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна $q_{ij1}(t-1)$, где $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r-1$, то число прообразов пары инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ в состоянии $q(t)$ равно $(2^{l-i}r-1)\cdot(e_3+e_2)^2$. Если нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна $2^{l-i}r$, то нагрузка первой реснички ребра $j+1$ уровня i в момент $t-1$ определена однозначно, а именно $q_{i(j+1)1}(t-1) = 0$. По лемме 5 число прообразов ребра j уровня i равно e_3+e_2, а число прообразов ребра $j+1$ уровня i равно e_2+e_1. Если нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна нулю, то нагрузка первой реснички ребра $j+1$ уровня i в момент $t-1$ определена однозначно, а именно $q_{i(j+1)1}(t-1) = 2^{l-i}r$. Этот случай симметричен случаю, когда нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна $2^{l-i}r$. Пусть нагрузка реснички с номером n ребра уровня $i-1$ (инцидентного ребрам j и $j+1$ уровня i) в момент $t-1$ не равна нулю. Тогда, первые и вторые реснички ребер j и $j+1$ уровня i в момент $t-1$ должны иметь нулевые нагрузки. По лемме 5 число указанных прообразов равно $(e_2+e_1)^2$. Следовательно, для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i=2,3,\ldots,l-1$ и $j=1,2,3,\ldots,2^{i-1}-1$, I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии $q(t)$ имеют место не более, чем $(2^{l-i}r-1)\cdot(e_3+e_2)^2+2\cdot(e_2+e_1)\cdot(e_3+e_2)+(e_2+e_1)^2$ прообразов. Так как для ребер уровня l должно выполняться условие $q_{ljn}(t-1)=0$, то для инцидентных ребер этого уровня I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии $q(t)$ имеют место $(r-1)\cdot e_3^2+2\cdot e_2\cdot e_3+e_2^2$ прообразов.

На каждом уровне i, где $i=2,3,\ldots,l$, количество пар инцидентных ребер равно 2^{i-2}. Значит, количество прообразов состояния $q(t)$ из K_{c_4} I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ не превосходит числа $(2^{l-1}r\cdot(e_3+e_2)+e_2+e_1)\cdot((r-1)\cdot e_3^2+2\cdot e_2\cdot e_3+e_2^2)^{2^{l-2}}\cdot\Pi_{i=2}^{l-1}((2^{l-i}r-1)\cdot(e_3+e_2)^2+2\cdot(e_2+e_1)\cdot(e_3+e_2)+(e_2+e_1)^2)^{2^{i-2}}\leqslant(2^l r+2)\cdot e_3\cdot((r+2)e_3^2)^{2^{l-2}}\cdot\Pi_{i=2}^{l-1}((2^{l-i}r-1)\cdot 2^2\cdot e_3^2+2^3\cdot e_3^2+2^2\cdot e_3^2)^{2^{i-2}}\leqslant 2^l\cdot e_3\cdot(3r)^{2^{l-2}+1}e_3^{2^{l-1}}\cdot\Pi_{i=2}^{l-1}(3^2\cdot 2^{l-i}r\cdot e_3^2)^{2^{i-2}}\leqslant 2^l\cdot(3r)^{2^{l-2}+1}\cdot e_3^{2^{l-1}+1}\cdot 2^{\sum_{i=2}^{l-1}(l-i)\cdot 2^{i-2}}\cdot r^{\sum_{i=2}^{l-1}2^{i-2}}\cdot(3e_3)^{\sum_{i=2}^{l-1}2^{i-1}}=2^{2^{l-1}}\cdot r^{2^{l-1}}\cdot 3^{3\cdot 2^{l-2}}\cdot e_3^{2^l}\preccurlyeq 2^{2^{l-1}\cdot(1+\log_2(r\cdot\sqrt{27})+2\log_2 Con_1)}=2^{2^{l-1}\cdot\log_2(6\sqrt{3}r\cdot e_3^2)}$ при $l\to\infty$.

Таким образом, $S_{K_{c_4}}\preccurlyeq 2^{2^{l-1}\cdot\log_2(6\sqrt{3}r\cdot e_3^2)}$ при $l\to\infty$.

Следовательно, $2^{2^{l-1}\cdot\log_2(2r\cdot e_2^2)}\preccurlyeq S_{K_{c_4}}\preccurlyeq 2^{2^{l-1}\cdot\log_2(6\sqrt{3}r\cdot e_3^2)}$ при $l\to\infty$. Лемма доказана.

Лемма 13. *Если l четно, то имеет место*

$$2^{2^{l-1}\left(\frac{5}{9}+\frac{1}{3}\cdot\log_2 r+\frac{2}{3}\cdot\log_2 e_4\right)+\frac{1}{3}l}\preccurlyeq S_{K_{c_5}}\preccurlyeq 2^{2^{l-1}\left(\frac{14}{9}+\frac{1}{3}\cdot\log_2(27\cdot r)+2\cdot\log_2 e_6\right)+\frac{1}{3}l}$$

при $l\to\infty$.

Доказательство. Так как число прообразов каждого состояния из класса K_{c_5} одно и то же, то посчитаем число прообразов, например, состояния $q(t)$ из K_{c_5}, такого что при четном i $q_{ijn}(t)=2^{l-(i+1)}r$, $q_{ij(2k-1)}(t)=1$ и $q_{ij(2k)}(t)=0$ и при нечетном i $q_{ijn}(t)=0$, $q_{ij(2k)}(t)=1$ и $q_{ij(2k-1)}(t)=0$, где $1\leqslant i<l$, если l четно и $1\leqslant i\leqslant l$, если l нечетно, $1\leqslant j\leqslant 2^{i-1}$, $1\leqslant k\leqslant\frac{n-1}{2}$; при $i=l$, когда l четно,

выполнено $q_{ljn}(t) = 0$, $q_{lj(2k-1)}(t) = 1$ и $q_{lj(2k)}(t) = 0$, где $1 \leqslant j \leqslant 2^{l-1}$, $1 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}$.

Оценим снизу и сверху число прообразов состояния конденсации $q(t)$ из K_{c_5}.

Для получения оценки снизу посчитаем количество таких предшественников состояния $q(t)$ из K_{c_5} I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$, что $q_{ijn}(t-1) = 0$, где $i = 1,2,3,\ldots,l$ и $j = 1,2,3,\ldots,2^{i-1}$.

Заметим, что для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i = 2,4,\ldots,l$ и $j = 1,2,3,\ldots,2^{i-1}-1$, I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии $q(t)$ количество прообразов равно e_6^2, для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i = 3,5,\ldots,l-1$ и $j = 1,2,3,\ldots,2^{i-1}-1$, I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии $q(t)$ количество прообразов равно $(2^{l-i}r-1)\cdot e_5^2 + 2\cdot e_5\cdot e_4$, а для ребра первого уровня I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии $q(t)$ по лемме 7 имеют место $2^{l-1}r\cdot e_5 + e_4$ прообразов. Действительно, нагрузки первых ресничек ребер j и $j+1$ уровня i, где $i = 2,4,\ldots,l$, в момент $t-1$ должны быть нулевыми. По лемме 6 число прообразов пары инцидентных ребер j и $j+1$ четного уровня i равно e_6^2. Если нагрузка первой реснички ребра j уровня i, где $i = 3,5,\ldots,l-1$, в момент $t-1$ равна $q_{ij1}(t-1)$, где $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r-1$, то нагрузка первой реснички ребра $j+1$ уровня i в момент $t-1$ определена однозначно, а именно $q_{i(j+1)1}(t-1) = 2^{l-i}r - q_{ij1}(t-1)$. По лемме 7 число прообразов ребра j нечетного уровня i равно $(2^{l-i}r-1)\cdot e_5$, а так как нагрузка первой реснички ребра уровня $j+1$ определена однозначно при каждом значении нагрузки первой реснички ребра j уровня i, то число прообразов ребра $j+1$ уровня i равно e_5. Следовательно, если нагрузка первой реснички ребра j нечетного уровня i в момент $t-1$ равна $q_{ij1}(t-1)$, где $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r-1$, то число прообразов пары инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i = 3,5,\ldots,l-1$ и $j = 1,2,3,\ldots,2^{i-1}-1$, I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии $q(t)$ равно $(2^{l-i}r-1)\cdot e_5^2$. Если нагрузка первой реснички ребра j нечетного уровня i в момент $t-1$ равна $2^{l-i}r$, то нагрузка первой реснички ребра $j+1$ уровня i в момент $t-1$ определена однозначно, а именно $q_{i(j+1)1}(t-1) = 0$. По лемме 7 число прообразов ребра j нечетного уровня i равно e_5, а число прообразов ребра $j+1$ нечетного уровня i равно e_4. Если нагрузка первой реснички ребра j нечетного уровня i в момент $t-1$ равна нулю, то нагрузка первой реснички ребра $j+1$ уровня i в момент $t-1$ определена однозначно, а именно $q_{i(j+1)1}(t-1) = 2^{l-i}r$. Этот случай симметричен случаю, когда нагрузка первой реснички ребра j нечетного уровня i в момент $t-1$ равна $2^{l-i}r$. Следовательно, для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i = 3, 5, \ldots, l-1$ и $j = 1, 2, 3, \ldots, 2^{i-1}-1$, I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ в состоянии $q(t)$ имеют место $(2^{l-i}r-1)(e_5^2 + 2 \cdot e_5 \cdot e_4$ прообразов.

На каждом уровне i, где $i = 2, 3, \ldots, l$, количество пар инцидентных ребер равно 2^{i-2}. Значит, число прообразов состояния $q(t)$ из K_{c_5} I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$, таких что $q_{ijn}(t-1) = 0$ при всех i и j, равно $(2^{l-1}r \cdot e_5 + e_4) \cdot \Pi_{i=2,4,\ldots,l}(e_6^2)^{2^{i-2}} \cdot \Pi_{i=3,5,\ldots,l-1}((2^{l-i}r-1) \cdot e_5^2 + 2 \cdot e_5 \cdot e_4)^{2^{i-2}} \geqslant 2^{l-1+\sum_{i=3,5,\ldots,l-1} 2^{i-2}(l-i)} \cdot r^{1+\sum_{i=3,5,\ldots,l-1} 2^{i-2}} \cdot e_4^{\sum_{i=1}^{l} 2^{i-1}} = 2^{\frac{5}{9} \cdot 2^{l-1} + \frac{1}{3} \cdot l - \frac{7}{9}} \cdot r^{\frac{1}{3} \cdot 2^{l-1} + \frac{1}{3}} \cdot e_4^{2^l - 1} \asymp 2^{2^{l-1}\left(\frac{5}{9} + \frac{1}{3} \cdot \log_2 r + \frac{2}{3} \cdot \log_2 e_4\right) + \frac{1}{3} \cdot l}$ при $l \to \infty$.

Таким образом, если l четно, то $S_{K_{c_5}} \succcurlyeq 2^{2^{l-1}\left(\frac{5}{9} + \frac{1}{3} \cdot \log_2 r + \frac{2}{3} \cdot \log_2 e_4\right) + \frac{1}{3} \cdot l}$ при $l \to \infty$.

Для получения оценки сверху заметим, что для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i = 2, 4, \ldots, l-2$ и $j = 1, 2, 3, \ldots, 2^{i-1}-1$, I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ в состоянии $q(t)$ по лемме 6 не более $(e_6 + e_4 + 2 \cdot e_5)^2$ прообразов, для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i = 3, 5, \ldots, l-1$ и $j = 1, 2, 3, \ldots, 2^{i-1}-1$, этого I-дерева в состоянии $q(t)$ число прообразов не более $(2^{l-i}r-1) \cdot (e_5 + e_6)^2 + 2 \cdot (e_5 + e_6) \cdot (e_4 + e_5) + (e_4 + e_5)^2$, для инцидентных ребер уровня l этого I-дерева в состоянии $q(t)$ имеют место не более $(e_5 + e_6)^2$ прообразов, а количество прообразов для ребра первого уровня по лемме 7 равно $2^{l-1}r \cdot (e_5 + e_6) + e_4 + e_5$. Действительно, пусть нагрузка реснички с номером n ребра уровня $i-1$ (инцидентного ребрам j и $j+1$ уровня i, где $i = 3, 5, \ldots, l-1$) в момент $t-1$ равна нулю. Тогда, если нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна $q_{ij1}(t-1)$, где $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r-1$, то нагрузка первой реснички ребра $j+1$ уровня i в момент $t-1$ определена однозначно, а именно $q_{i(j+1)1}(t-1) = 2^{l-i}r - q_{ij1}(t-1)$. По лемме 7 число прообразов ребра j нечетного уровня i равно $(2^{l-i}r-1) \cdot (e_5 + e_6)$, а так как нагрузка первой реснички ребра уровня $j+1$ определена однозначно при каждом значении нагрузки первой реснички ребра j, то число прообразов ребра $j+1$ равно $e_5 + e_6$. Следовательно, если нагрузка первой реснички ребра j нечетного уровня i в момент $t-1$ равна $q_{ij1}(t-1)$, где $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r-1$, то число прообразов пары инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i=3,5,\ldots,l-1$ и $j=1,2,3,\ldots,2^{i-1}-1$, I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии $q(t)$ равно $(2^{l-i}r-1)\cdot(e_5+e_6)^2$. Если нагрузка первой реснички ребра j нечетного уровня i в момент $t-1$ равна $2^{l-i}r$, то нагрузка первой реснички ребра $j+1$ уровня i в момент $t-1$ определена однозначно, а именно $q_{i(j+1)1}(t-1)=0$. По лемме 7 число прообразов ребра j нечетного уровня i равно e_5+e_6, а число прообразов ребра $j+1$ уровня i равно e_4+e_5. Если нагрузка первой реснички ребра j нечетного уровня i в момент $t-1$ равна нулю, то нагрузка первой реснички ребра $j+1$ уровня i в момент $t-1$ определена однозначно, а именно $q_{i(j+1)1}(t-1)=2^{l-i}r$. Этот случай симметричен случаю, когда нагрузка первой реснички ребра j нечетного уровня i в момент $t-1$ равна $2^{l-i}r$. Пусть нагрузка реснички с номером n ребра уровня $i-1$ (инцидентного ребрам j и $j+1$ уровня i, где $i=3,5,\ldots,l-1$) в момент $t-1$ не равна нулю. Тогда, первые и вторые реснички ребер j и $j+1$ нечетного уровня i в момент $t-1$ должны иметь нулевые нагрузки. По лемме 7 число указанных прообразов будет $(e_4+e_5)^2$. Следовательно, для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i=3,5,\ldots,l-1$ и $j=1,2,3,\ldots,2^{i-1}-1$, I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии $q(t)$ имеют место не более, чем $(2^{l-i}r-1)\cdot(e_5+e_6)^2+2\cdot(e_5+e_6)\cdot(e_4+e_5)+(e_4+e_5)^2$ прообразов. Так как для ребер уровня l должно выполняться условие $q_{ljn}(t-1)=0$, то для инцидентных ребер этого уровня I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии $q(t)$ имеют место $(e_5+e_6)^2$ прообразов.

На каждом уровне i, где $i=2,3,\ldots,l$, количество пар инцидентных ребер равно 2^{i-2}. Значит, количество прообразов состояния $q(t)$ из K_{c_5} I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ не превосходит числа $(2^{l-1}r\cdot(e_6+e_5)+e_5+e_4)\cdot(e_6+e_5)^{2^{l-1}}\cdot\Pi_{i=2,4,\ldots,l-2}(e_6+e_5+e_4)^{2^{i-1}}\cdot\Pi_{i=3,5,\ldots,l-1}((2^{l-i}r-1)\cdot(e_6+e_5)^2+2\cdot(e_5+e_4)\cdot(e_6+e_5)+(e_5+e_4)^2)^{2^{i-2}} \leqslant r\cdot {e_6}^{2^{l-1}+1}\cdot 2^{2^{l-1}+l+1}\cdot\Pi_{i=2,4,\ldots,l-2}(3e_6)^{2^{i-1}}\cdot\Pi_{i=3,5,\ldots,l-1}((2^{l-i}r-1)\cdot 2^2\cdot {e_6}^2+2^3\cdot {e_6}^2+2^2\cdot {e_6}^2)^{2^{i-2}} \leqslant 2^{2^{l-1}+l+1}r\cdot {e_6}^{2^{l-1}+1+\sum_{i=2,4,\ldots,l-2}2^{i-1}}\cdot 3^{\sum_{i=2,4,\ldots,l-2}2^{i-1}}\cdot\Pi_{i=3,5,\ldots,l-1}(3^2\cdot 2^{l-i}r\cdot {e_6}^2)^{2^{i-2}} \leqslant 3^{\sum_{i=2}^{l-1}2^{i-1}}\cdot 2^{2^{l-1}+l+1+\sum_{i=3,5,\ldots,l-1}(l-i)\cdot 2^{i-2}}\cdot r^{1+\sum_{i=3,5,\ldots,l-1}2^{i-2}}\cdot {e_6}^{2^{l-1}+1+\sum_{i=2}^{l-1}2^{i-1}} = 2^{\frac{14}{9}\cdot 2^{l-1}+\frac{1}{3}\cdot l+\frac{11}{9}}\cdot r^{\frac{1}{3}\cdot 2^{l-1}+\frac{1}{3}}\cdot {e_6}^{2^l-1}\cdot 3^{2^{l-1}-2} \precsim 2^{2^{l-1}\cdot(\frac{14}{9}+\frac{1}{3}\cdot\log_2(27\cdot r)+2\cdot\log_2 e_6)+\frac{1}{3}\cdot l}$ при $l\to\infty$.

Таким образом, если l — четное, то

$$S_{K_{c_5}} \preccurlyeq 2^{2^{l-1}\cdot\left(\frac{14}{9}+\frac{1}{3}\cdot\log_2(27\cdot r)+2\cdot\log_2 e_6\right)+\frac{1}{3}\cdot l} \quad \text{при} \quad l\to\infty,$$

следовательно,

$$2^{2^{l-1}\left(\frac{5}{9}+\frac{1}{3}\cdot\log_2 r+\frac{2}{3}\cdot\log_2 e_4\right)+\frac{1}{3}l} \preccurlyeq S_{K_{c_5}} \preccurlyeq 2^{2^{l-1}\left(\frac{14}{9}+\frac{1}{3}\cdot\log_2(27\cdot r)+2\cdot\log_2 e_6\right)+\frac{1}{3}l}$$

при $l\to\infty$. Лемма доказана.

Лемма 14. *Если l нечетно, то имеет место*

$$2^{2^{l}\cdot\left(\frac{2}{9}+\frac{1}{3}\cdot\log_2 r+\log_2 e_4\right)+\frac{1}{3}\cdot l} \preccurlyeq S_{K_{c_5}} \preccurlyeq 2^{2^{l}\cdot\left(\frac{2}{9}+\frac{1}{3}\cdot\log_2(27\cdot r)+\log_2 e_6\right)+\frac{1}{3}\cdot l}$$

при $l\to\infty$.

Доказательство. Так как число прообразов каждого состояния из класса K_{c_5} одно и то же, то посчитаем число прообразов, например, состояния $q(t)$ из K_{c_5}, такого что при четном i $q_{ijn}(t) = 2^{l-(i+1)}r$, $q_{ij(2k-1)}(t)=1$ и $q_{ij(2k)}(t)=0$ и при нечетном i $q_{ijn}(t)=0$, $q_{ij(2k)}(t)=1$ и $q_{ij(2k-1)}(t) = 0$, где $1\leqslant i<l$, если l четно и $1\leqslant i\leqslant l$, если l нечетно, $1\leqslant j\leqslant 2^{i-1}$, $1\leqslant k\leqslant \frac{n-1}{2}$; при $i=l$, когда l четно, выполнено $q_{ljn}(t)=0$, $q_{lj(2k-1)}(t)=1$ и $q_{lj(2k)}(t)=0$, где $1\leqslant j\leqslant 2^{l-1}$, $1\leqslant k\leqslant\frac{n-1}{2}$.

Оценим снизу и сверху число прообразов состояния конденсации $q(t)$ из K_{c_5}.

Для получения оценки снизу посчитаем количество таких предшественников состояния $q(t)$ из K_{c_5} I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$, что $q_{ijn}(t-1)=0$, где $i=1,2,3,\dots,l$ и $j=1,2,3,\dots,2^{i-1}$.

Заметим, что, как и в случае четного l, для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i=2,4,\dots,l-1$ и $j=1,2,3,\dots,2^{i-1}-1$, I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии $q(t)$ количество прообразов по лемме 6 равно e_6^2, для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i=3,5,\dots,l$ и $j=1,2,3,\dots,2^{i-1}-1$, I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии $q(t)$ количество прообразов по лемме 7 равно $(2^{l-i}r-1)e_5^2+2\cdot e_5\cdot e_4$, а для ребра первого уровня I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии $q(t)$ по лемме 7 имеют место $2^{l-1}r\cdot e_5+e_4$ прообразов.

На каждом уровне i, где $i = 2, 3, \ldots, l$, количество пар инцидентных ребер равно 2^{i-2}. Значит, число прообразов состояния $q(t)$ из K_{c_5} I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$, таких что $q_{ijn}(t-1) = 0$ при всех i и j, равно $(2^{l-1}r \cdot e_5 + e_4) \cdot \Pi_{i=2,4,\ldots,l-1}(e_6^2)^{2^{i-2}} \cdot \Pi_{i=3,5,\ldots,l}((2^{l-i}r - 1) \cdot e_5^2 + 2 \cdot e_5 \cdot e_4)^{2^{i-2}} \geqslant 2^{l-1+\sum_{i=3,5,\ldots,l} 2^{i-2}(l-i)} \cdot r^{1+\sum_{i=3,5,\ldots,l} 2^{i-2}} \cdot e_4^{\sum_{i=1}^{l} 2^{i-1}} = 2^{\frac{2}{9}\cdot 2^l + \frac{1}{3}\cdot l + \frac{11}{9}} \cdot r^{\frac{1}{3}\cdot 2^l + \frac{1}{3}} \cdot e_4^{2^l - 1} \asymp 2^{2^l\left(\frac{2}{9} + \frac{1}{3}\cdot \log_2 r + \log_2 e_4\right) + \frac{1}{3}\cdot l}$ при $l \to \infty$.

Таким образом, если l нечетно, то $S_{K_{c_5}} \succcurlyeq 2^{2^l\left(\frac{2}{9} + \frac{1}{3}\cdot \log_2 r + \log_2 e_4\right) + \frac{1}{3}\cdot l}$ при $l \to \infty$.

Для получения оценки сверху заметим, что для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i = 2, 4, \ldots, l-1$ и $j = 1, 2, 3, \ldots, 2^{i-1} - 1$, I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ в состоянии $q(t)$ по лемме 6 не более $(e_6 + e_4 + 2 \cdot e_5)^2$ прообразов, для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i = 3, 5, \ldots, l$ и $j = 1, 2, 3, \ldots, 2^{i-1} - 1$, этого I-дерева в состоянии $q(t)$ число прообразов по лемме 7 не более $(2^{l-i}r - 1) \cdot (e_5 + e_6)^2 + 2 \cdot (e_5 + e_6) \cdot (e_4 + e_5) + (e_4 + e_5)^2$, а количество прообразов для ребра первого уровня этого I-дерева в состоянии $q(t)$ по лемме 7 равно $2^{l-1}r \cdot (e_5 + e_6) + e_4 + e_5$.

На каждом уровне i, где $i = 2, 3, \ldots, l$, количество пар инцидентных ребер равно 2^{i-2}. Значит, количество прообразов состояния $q(t)$ из K_{c_5} I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ не превосходит числа $(2^{l-1}r \cdot (e_6 + e_5) + e_5 + e_4) \cdot \Pi_{i=2,4,\ldots,l-1}(e_6 + e_5 + e_4)^{2^{i-1}} \cdot \Pi_{i=3,5,\ldots,l}((2^{l-i}r - 1) \cdot (e_6 + e_5)^2 + 2 \cdot (e_5 + e_4) \cdot (e_6 + e_5) + (e_5 + e_4)^2)^{2^{i-2}} \leqslant (2^l r + 2) \cdot e_6 \cdot \Pi_{i=2,4,\ldots,l-1}(3e_6)^{2^{i-1}} \cdot \Pi_{i=3,5,\ldots,l}((2^{l-i}r - 1) \cdot 2^2 \cdot {e_6}^2 + 2^3 \cdot {e_6}^2 + 2^2 \cdot {e_6}^2)^{2^{i-2}} \leqslant 2^l r \cdot {e_6}^{1+\sum_{i=2,4,\ldots,l-1} 2^{i-1}} \cdot 3^{1+\sum_{i=2,4,\ldots,l-1} 2^{i-1}} \cdot \Pi_{i=3,5,\ldots,l}(3^2 \cdot 2^{l-i} r \cdot {e_6}^2)^{2^{i-2}} \leqslant 2^l \cdot 3^{\frac{1}{3}\cdot 2^l + \frac{1}{3}} \cdot {e_6}^{\frac{1}{3}\cdot 2^l + \frac{1}{3}} \cdot 2^{\sum_{i=3,5,\ldots,l}(l-i)\cdot 2^{i-2}} \cdot r^{1+\sum_{i=3,5,\ldots,l} 2^{i-2}} \cdot (3 \cdot e_6)^{\sum_{i=3,5,\ldots,l} 2^{i-1}} = 2^{\frac{2}{9}\cdot 2^l + \frac{1}{3}\cdot l + \frac{2}{9}} \cdot r^{\frac{1}{3}\cdot 2^l + \frac{1}{3}} \cdot (3e_6)^{2^l - 1} \preccurlyeq 2^{2^l \cdot \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{3}\cdot \log_2(27\cdot r) + \log_2 e_6\right) + \frac{1}{3}\cdot l}$ при $l \to \infty$.

Таким образом, если l — нечетное, то

$$S_{K_{c_5}} \preccurlyeq 2^{2^l \cdot \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{3}\cdot \log_2(27\cdot r) + \log_2 e_6\right) + \frac{1}{3}\cdot l} \quad \text{при} \quad l \to \infty,$$

следовательно,

$$2^{2^l \cdot \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{3}\cdot \log_2 r + \log_2 e_4\right) + \frac{1}{3}\cdot l} \preccurlyeq S_{K_{c_5}} \preccurlyeq 2^{2^l \cdot \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{3}\cdot \log_2(27\cdot r) + \log_2 e_6\right) + \frac{1}{3}\cdot l}$$

при $l \to \infty$. Лемма доказана.

Лемма 15. *Имеет место*

$$2^{2^{l-1}(n-3+\log_2 r)} \preccurlyeq S_{K_{c_2}} \preccurlyeq 2^{2^{l-1}\cdot\left(n+1+\log_2(r\cdot\sqrt{27})\right)}$$

при $l \to \infty$.

Доказательство. Так как число прообразов каждого состояния из класса K_{c_2} одно и то же, то посчитаем число прообразов, например, состояния $q(t)$ из K_{c_2}, при котором выполнено: $q_{ijn}(t) = 2^{l-(i+1)}r$, $q_{ij1}(t) = 0$, $q_{ij(2k)}(t) = 2^{l-i}r$ и $q_{ij(2k+1)}(t) = 1$, где $1 \leqslant i < l$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$, $1 \leqslant k \leqslant \frac{n-2}{2}$; при $i = l$ выполнено $q_{lj1}(t) = 0$, $q_{ljn}(t) = 0$, $q_{lj(2k+1)}(t) = 1$ и $q_{lj(2k)}(t) = r$, где $1 \leqslant j \leqslant 2^{l-1}$, $1 \leqslant k \leqslant \frac{n-2}{2}$.

Оценим сверху и снизу число прообразов состояния конденсации $q(t)$ из K_{c_2}.

Для получения оценки снизу посчитаем количество таких предшественников состояния $q(t)$ из K_{c_2} I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$, что $q_{ijn}(t-1) = 0$, где $i = 1, 2, 3, \ldots, l$ и $j = 1, 2, 3, \ldots, 2^{i-1}$.

Заметим, что для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i = 2, 3, \ldots, l$ и $j = 1, 2, 3, \ldots, 2^{i-1} - 1$, I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ в состоянии $q(t)$ имеют место $(2^{l-i}r - 1) \cdot \left(2^{\frac{n}{2}-1}\right)^2 + 2 \cdot 2^{\frac{n}{2}-1} \cdot 2^{\frac{n}{2}-2}$ прообразов, а для ребра первого уровня I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ в состоянии $q(t)$ по лемме 8 имеют место $2^{l-1}r \cdot 2^{\frac{n}{2}-1} + 2^{\frac{n}{2}-2}$ прообразов. Действительно, если нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна $q_{ij1}(t-1)$, где $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r - 1$, то нагрузка первой реснички ребра $j+1$ уровня i в момент $t-1$ определена однозначно, а именно $q_{i(j+1)1}(t-1) = 2^{l-i}r - q_{ij1}(t-1)$. По лемме 8 число прообразов ребра j уровня i равно $(2^{l-i}r - 1) \cdot 2^{\frac{n}{2}-1}$, а так как нагрузка первой реснички ребра уровня $j+1$ определена однозначно при каждом значении нагрузки первой реснички ребра j уровня i, то число прообразов ребра $j+1$ уровня i равно $2^{\frac{n}{2}-1}$. Следовательно, если нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна $q_{ij1}(t-1)$, где $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r - 1$, то число прообразов пары инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i = 2, 3, \ldots, l$ и $j = 1, 2, 3, \ldots, 2^{i-1} - 1$, I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ в состоянии $q(t)$ равно $(2^{l-i}r - 1) \cdot \left(2^{\frac{n}{2}-1}\right)^2$. Если нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна $2^{l-i}r$, то нагрузка первой реснички ребра $j+1$ уровня i в момент

$t-1$ определена однозначно, а именно $q_{i(j+1)1}(t-1)=0$. По лемме 8 число прообразов ребра j уровня i равно $2^{\frac{n}{2}-1}$, а число прообразов ребра $j+1$ уровня i равно $2^{\frac{n}{2}-2}$. Если нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна нулю, то нагрузка первой реснички ребра $j+1$ уровня i в момент $t-1$ определена однозначно, а именно $q_{i(j+1)1}(t-1)=2^{l-i}r$. Этот случай симметричен случаю, когда нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна $2^{l-i}r$. Следовательно, для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i=2,3,\ldots,l$ и $j=1,2,3,\ldots,2^{i-1}-1$, I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии $q(t)$ имеют место $(2^{l-i}r-1)\cdot\left(2^{\frac{n}{2}-1}\right)^2+2\cdot 2^{\frac{n}{2}-1}\cdot 2^{\frac{n}{2}-2}$ прообразов.

На каждом уровне i, где $i=2,3,\ldots,l$, количество пар инцидентных ребер равно 2^{i-2}.

Таким образом, количество прообразов ребра j уровня i состояния $q(t)$ из K_{c_2} I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$, таких что $q_{ijn}(t-1)=0$ при всех i и j, равно

$$\left(2^{l-1}r\cdot 2^{\frac{n}{2}-1}+2^{\frac{n}{2}-2}\right)\cdot\Pi_{i=2}^{l}\left((2^{l-i}r-1)\cdot\left(2^{\frac{n}{2}-1}\right)^2+2\cdot 2^{\frac{n}{2}-1}\cdot 2^{\frac{n}{2}-2}\right)^{2^{i-2}}\geqslant 2^{l-1+\sum_{i=2}^{l}2^{i-2}(l-i)}\cdot r^{1+\sum_{i=2}^{l}2^{i-2}}\cdot\left(2^{\frac{n}{2}-2}\right)^{1+\sum_{i=2}^{l}2^{i-1}} = 2^{2^{l-1}-1}\cdot r^{2^{l-1}}\cdot\left(2^{\frac{n}{2}-2}\right)^{2^{l}-1}\asymp 2^{2^{l-1}(n-3+\log_2 r)} \text{ при } l\to\infty.$$

Таким образом, $S_{K_{c_2}}\succcurlyeq 2^{2^{l-1}(n-3+\log_2 r)}$ при $l\to\infty$.

Для получения оценки сверху заметим, что для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i=2,3,\ldots,l-1$ и $j=1,2,3,\ldots,2^{i-1}-1$, I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии $q(t)$ количество прообразов не превосходит числа $(2^{l-i}r-1)\cdot\left(2^{\frac{n}{2}-1}+2^{\frac{n}{2}-1}\right)^2+2\cdot\left(2^{\frac{n}{2}-1}+2^{\frac{n}{2}-1}\right)\cdot\left(2^{\frac{n}{2}-2}+2^{\frac{n}{2}-2}\right)+\left(2^{\frac{n}{2}-2}+2^{\frac{n}{2}-2}\right)^2$, для инцидентных ребер уровня l этого I-дерева в состоянии $q(t)$ по лемме 8 имеют место не более $(r-1)\cdot\left(3\cdot 2^{\frac{n}{2}-2}\right)^2+2\cdot 3\cdot 2^{\frac{n}{2}-2}\cdot 3\cdot 2^{\frac{n}{2}-3}+\left(3\cdot 2^{\frac{n}{2}-3}\right)^2$ прообразов, а количество прообразов для ребра первого уровня этого I-дерева в состоянии $q(t)$ по лемме 8 равно $2^{l-1}r\cdot\left(2^{\frac{n}{2}-1}+2^{\frac{n}{2}-1}\right)+2^{\frac{n}{2}-2}+2^{\frac{n}{2}-2}$. Действительно, пусть нагрузка реснички с номером n ребра уровня

$i-1$ (инцидентного ребрам j и $j+1$ уровня i) в момент $t-1$ равна нулю. Тогда, если нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна $q_{ij1}(t-1)$, где $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r-1$, то нагрузка первой реснички ребра $j+1$ уровня i в момент $t-1$ определена однозначно, а именно $q_{i(j+1)1}(t-1) = 2^{l-i}r - q_{ij1}(t-1)$. По лемме 8 число прообразов ребра j уровня i равно $(2^{l-i}r-1) \cdot \left(2^{\frac{n}{2}-1} + 2^{\frac{n}{2}-1}\right)$, а так как нагрузка первой реснички ребра уровня $j+1$ определена однозначно при каждом значении нагрузки первой реснички ребра j, то число прообразов ребра $j+1$ равно $2^{\frac{n}{2}-1} + 2^{\frac{n}{2}-1}$. Следовательно, если нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна $q_{ij1}(t-1)$, где $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r-1$, то число прообразов пары инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i = 2, 3, \ldots, l-1$ и $j = 1, 2, 3, \ldots, 2^{i-1}-1$, I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ в состоянии $q(t)$ равно $(2^{l-i}r-1) \cdot \left(2^{\frac{n}{2}-1} + 2^{\frac{n}{2}-1}\right)^2$. Если нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна $2^{l-i}r$, то нагрузка первой реснички ребра $j+1$ уровня i в момент $t-1$ определена однозначно, а именно $q_{i(j+1)1}(t-1) = 0$. По лемме 8 число прообразов ребра j уровня i равно $2^{\frac{n}{2}-1}+2^{\frac{n}{2}-1}$, а число прообразов ребра $j+1$ уровня i равно $2^{\frac{n}{2}-2}+2^{\frac{n}{2}-2}$. Если нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна нулю, то нагрузка первой реснички ребра $j+1$ уровня i в момент $t-1$ определена однозначно, а именно $q_{i(j+1)1}(t-1) = 2^{l-i}r$. Этот случай симметричен случаю, когда нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна $2^{l-i}r$. Пусть нагрузка реснички с номером n ребра уровня $i-1$ (инцидентного ребрам j и $j+1$ уровня i) в момент $t-1$ не равна нулю. Тогда первые и вторые реснички ребер j и $j+1$ уровня i в момент $t-1$ должны иметь нулевые нагрузки. По лемме 8 число указанных прообразов будет $\left(2^{\frac{n}{2}-2} + 2^{\frac{n}{2}-2}\right)^2$. Следовательно, для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i = 2, 3, \ldots, l-1$ и $j = 1, 2, 3, \ldots, 2^{i-1}-1$, I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ в состоянии $q(t)$ имеют место не более, чем $(2^{l-i}r-1) \cdot \left(2^{\frac{n}{2}-1} + 2^{\frac{n}{2}-1}\right)^2 + 2 \cdot \left(2^{\frac{n}{2}-1} + 2^{\frac{n}{2}-1}\right) \cdot \left(2^{\frac{n}{2}-2} + 2^{\frac{n}{2}-2}\right) + \left(2^{\frac{n}{2}-2} + 2^{\frac{n}{2}-2}\right)^2$ прообразов.

На каждом уровне i, где $i = 2, 3, \ldots, l$, количество пар инцидентных ребер равно 2^{i-2}. Значит, число прообразов состояния $q(t)$ из K_{c_2}

I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ не более $\Big(2^{l-1}r\cdot\Big(2^{\frac{n}{2}-1}+2^{\frac{n}{2}-1}\Big)+2^{\frac{n}{2}-2}+2^{\frac{n}{2}-2}\Big)\times$ $\times\left((r-1)\cdot\Big(3\cdot 2^{\frac{n}{2}-2}\Big)^2+2\cdot 3\cdot 2^{\frac{n}{2}-2}\cdot 3\cdot 2^{\frac{n}{2}-3}+\Big(3\cdot 2^{\frac{n}{2}-3}\Big)^2\right)^{2^{l-2}}\times$ $\times\Pi_{i=2}^{l-1}\Big((2^{l-i}r-1)\cdot(2^{\frac{n}{2}-1}+2^{\frac{n}{2}-1})^2+2\cdot(2^{\frac{n}{2}-1}+2^{\frac{n}{2}-1})\cdot(2^{\frac{n}{2}-2}+2^{\frac{n}{2}-2})+$ $+(2^{\frac{n}{2}-2}+2^{\frac{n}{2}-2})^2\Big)^{2^{i-2}}\leqslant$

$\leqslant(2^lr+2)\cdot 2^{\frac{n}{2}-1}\cdot((r+2)\cdot(3\cdot 2^{\frac{n}{2}-1})^2)^{2^{l-2}}\cdot\Pi_{i=2}^{l-1}\Big((2^{l-i}r+2^3)\cdot(2^{\frac{n}{2}-1})^2\Big)^{2^{i-2}}\leqslant$ $2^l\cdot(3r)^{2^{l-2}+1}\cdot(2^{\frac{n}{2}-1})^{2^{l-1}+1}\cdot 3^{2^{l-1}}\cdot\Pi_{i=2}^{l-1}(3^2\cdot 2^{l-i}r\cdot(2^{\frac{n}{2}-1})^2)^{2^{i-2}}\leqslant$ $2^l\cdot(3r)^{2^{l-2}+1}\cdot(2^{\frac{n}{2}-1})^{2^{l-1}+1}\cdot 4^{2^{l-1}}\cdot 2^{\sum_{i=2}^{l-1}(l-i)\cdot 2^{i-2}}\cdot r^{\sum_{i=2}^{l-1}2^{i-2}}\cdot(3\cdot$ $2^{\frac{n}{2}-1})^{\sum_{i=2}^{l-1}2^{i-1}}=2^{3\cdot 2^{l-1}}\cdot r^{2^{l-1}}\cdot 3^{3\cdot 2^{l-2}}\cdot(2^{\frac{n}{2}-1})^{2^l-1}\preccurlyeq 2^{2^{l-1}\cdot(n+1+\log_2(r\cdot\sqrt{27}))}$ при $l\to\infty$.

Таким образом, $S_{K_{c_2}}\preccurlyeq 2^{2^{l-1}\cdot\left(n+1+\log_2(r\cdot\sqrt{27})\right)}$ при $l\to\infty$.

Следовательно, $2^{2^{l-1}(n-3+\log_2 r)}\preccurlyeq S_{K_{c_2}}\preccurlyeq 2^{2^{l-1}\cdot\left(n+1+\log_2(r\cdot\sqrt{27})\right)}$ при $l\to\infty$. Лемма доказана.

Лемма 16. *Если l четно, то имеет место*

$$2^{2^{l-1}\cdot\left(\frac{3n+2}{9}+\frac{1}{3}\cdot\log_2 r\right)+\frac{1}{3}\cdot l}\preccurlyeq S_{K_{c_3}}\preccurlyeq 2^{2^{l-1}\cdot\left(\frac{9n+17}{9}+\frac{1}{3}\cdot\log_2(3\cdot r)\right)+\frac{1}{3}\cdot l}$$

при $l\to\infty$.

Доказательство. Так как число прообразов каждого состояния из класса K_{c_3} одно и то же, то посчитаем число прообразов, например, состояния $q(t)$ из K_{c_3}, такого что при четном i $q_{ijn}(t)=2^{l-(i+1)}r$, $q_{ij(2k)}(t)=1$ и $q_{ij(2k-1)}(t)=2^{l-i}r$ и при нечетном i $q_{ij1}(t)=0$, $q_{ij(2k+1)}(t)=1$ и $q_{ij(2k)}(t)=2^{l-i}r$, $1\leqslant i<l$, $1\leqslant j\leqslant 2^{i-1}$, $1\leqslant k\leqslant\frac{n-1}{2}$; при $i=l$, когда l четно, выполнено $q_{ljn}(t)=0$, $q_{lj(2k)}(t)=1$ и $q_{lj(2k-1)}(t)=r$, где $1\leqslant j\leqslant 2^{l-1}$, $1\leqslant k\leqslant\frac{n-1}{2}$; при $i=l$, когда l нечетно, выполнено $q_{lj1}(t)=0$, $q_{lj2}(t)=r$, $q_{ljn}(t)=1$, $q_{lj(2k-1)}(t)=1$ и $q_{lj(2k)}(t)=r$, где $1\leqslant j\leqslant 2^{l-1}$, $1<k\leqslant\frac{n-1}{2}$.

Оценим снизу и сверху число прообразов состояния конденсации $q(t)$ из K_{c_3}.

Для получения оценки снизу посчитаем количество таких предшественников состояния $q(t)$ из K_{c_3} I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$, что $q_{ijn}(t-1)=0$, где $i=2,4,6,\dots,l$ и $j=1,2,3,\dots,2^{i-1}$.

Заметим, что для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i = 2, 4, \ldots, l$ и $j = 1, 2, 3, \ldots, 2^{i-1} - 1$, I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ в состоянии $q(t)$ количество прообразов по лемме 10 равно $\left(2^{\frac{n+1}{2}-1}\right)^2$, для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i = 3, 5, \ldots, l-1$ и $j = 1, 2, 3, \ldots, 2^{i-1} - 1$, I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ в состоянии $q(t)$ количество прообразов равно $(2^{l-i}r - 1) \cdot \left(2^{\frac{n+1}{2}-1}\right)^2 + 2 \cdot 2^{\frac{n+1}{2}-1} \cdot 2^{\frac{n+1}{2}-2}$, а для ребра первого уровня I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ в состоянии $q(t)$ по лемме 9 имеют место $2^{l-1}r \cdot 2^{\frac{n+1}{2}-1} + 2^{\frac{n+1}{2}-2}$ прообразов. Действительно, если нагрузка первой реснички ребра j уровня i, где $i = 3, 5, \ldots, l-1$, в момент $t-1$ равна $q_{ij1}(t-1)$, где $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r - 1$, то нагрузка первой реснички ребра $j+1$ уровня i в момент $t-1$ определена однозначно, а именно $q_{i(j+1)1}(t-1) = 2^{l-i}r - q_{ij1}(t-1)$. По лемме 9 число прообразов ребра j нечетного уровня i равно $(2^{l-i}r - 1) \cdot 2^{\frac{n+1}{2}-1}$, а так как нагрузка первой реснички ребра уровня $j+1$ определена однозначно при каждом значении нагрузки первой реснички ребра j уровня i, то число прообразов ребра $j+1$ уровня i равно $2^{\frac{n+1}{2}-1}$. Следовательно, если нагрузка первой реснички ребра j нечетного уровня i в момент $t-1$ равна $q_{ij1}(t-1)$, где $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r - 1$, то число прообразов пары инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i = 3, 5, \ldots, l-1$ и $j = 1, 2, 3, \ldots, 2^{i-1} - 1$, I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ в состоянии $q(t)$ равно $(2^{l-i}r - 1) \cdot \left(2^{\frac{n+1}{2}-1}\right)^2$. Если нагрузка первой реснички ребра j нечетного уровня i в момент $t-1$ равна $2^{l-i}r$, то нагрузка первой реснички ребра $j+1$ уровня i в момент $t-1$ определена однозначно, а именно $q_{i(j+1)1}(t-1) = 0$. По лемме 9 число прообразов ребра j нечетного уровня i равно $2^{\frac{n+1}{2}-1}$, а число прообразов ребра $j+1$ нечетного уровня i равно $2^{\frac{n+1}{2}-2}$. Если нагрузка первой реснички ребра j нечетного уровня i в момент $t-1$ равна нулю, то нагрузка первой реснички ребра $j+1$ уровня i в момент $t-1$ определена однозначно, а именно $q_{i(j+1)1}(t-1) = 2^{l-i}r$. Этот случай симметричен случаю, когда нагрузка первой реснички ребра j нечетного уровня i в момент $t-1$ равна $2^{l-i}r$. Следовательно, для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i = 3, 5, \ldots, l-1$ и

$j = 1, 2, 3, \ldots, 2^{i-1} - 1$, I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ в состоянии $q(t)$ имеют место $(2^{l-i}r - 1) \cdot \left(2^{\frac{n+1}{2}-1}\right)^2 + 2 \cdot 2^{\frac{n+1}{2}-1} \cdot 2^{\frac{n+1}{2}-2}$ прообразов.

На каждом уровне i, где $i = 2, 3, \ldots, l$, количество пар инцидентных ребер равно 2^{i-2}. Значит, число прообразов состояния $q(t)$ из K_{c3} I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$, таких что $q_{ijn}(t-1) = 0$ при $i = 2, 4, 6, \ldots, l$ и $j = 1, 2, 3, \ldots, 2^{i-1} - 1$, равно

$$\left(2^{l-1}r \cdot 2^{\frac{n+1}{2}-1} + 2^{\frac{n+1}{2}-2}\right) \cdot \Pi_{i=2,4,\ldots,l} \left(\left(2^{\frac{n+1}{2}-1}\right)^2\right)^{2^{i-2}} \cdot$$

$$\Pi_{i=3,5,\ldots,l-1} \left((2^{l-i}r - 1) \cdot \left(2^{\frac{n+1}{2}-1}\right)^2 + 2 \cdot 2^{\frac{n+1}{2}-1} \cdot 2^{\frac{n+1}{2}-2}\right)^{2^{i-2}} \geqslant$$

$$\geqslant 2^{l-1+\sum_{i=3,5,\ldots,l-1} 2^{i-2}(l-i)} \cdot r^{1+\sum_{i=3,5,\ldots,l-1} 2^{i-2}} \cdot \left(2^{\frac{n+1}{2}-1}\right)^{\sum_{i=1}^{l} 2^{i-1}} =$$

$$2^{\frac{5}{9}\cdot 2^{l-1}+\frac{1}{3}\cdot l-\frac{7}{9}} \cdot r^{\frac{1}{3}\cdot 2^{l-1}+\frac{1}{3}} \cdot \left(2^{\frac{n+1}{2}-1}\right)^{2^l-1} \asymp 2^{2^{l-1}\left(\frac{3n+2}{9}+\frac{1}{3}\cdot\log_2 r\right)+\frac{1}{3}\cdot l}$$ при $l \to \infty$.

Таким образом, если l — четное, то $S_{K_{c3}} \succcurlyeq 2^{2^{l-1}\left(\frac{3n+2}{9}+\frac{1}{3}\cdot\log_2 r\right)+\frac{1}{3}\cdot l}$ при $l \to \infty$.

Для получения оценки сверху заметим, что для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i = 2, 4, \ldots, l-2$ и $j = 1, 2, 3, \ldots, 2^{i-1} - 1$, I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ в состоянии $q(t)$ по лемме 10 не более $\left(2^{\frac{n+1}{2}-1} + 2^{\frac{n+1}{2}-1}\right)^2$ прообразов, для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i = 3, 5, \ldots, l-1$ и $j = 1, 2, 3, \ldots, 2^{i-1} - 1$, этого I-дерева в состоянии $q(t)$ число прообразов не превосходит числа $(2^{l-i}r - 1) \cdot \left(2^{\frac{n+1}{2}-1}\right)^2 + 2 \cdot 2^{\frac{n+1}{2}-1} \cdot 2^{\frac{n+1}{2}-2} + \left(2^{\frac{n+1}{2}-2}\right)^2$, для инцидентных ребер уровня l этого I-дерева в состоянии $q(t)$ по лемме 10 имеют место $\left(3 \cdot 2^{\frac{n+1}{2}-2}\right)^2$ прообразов, а количество прообразов для ребра первого уровня по лемме 9 равно $2^{l-1}r \cdot 2^{\frac{n+1}{2}-1} + 2^{\frac{n+1}{2}-2}$. Действительно, пусть нагрузка реснички с номером n ребра уровня $i-1$ (инцидентного ребрам j и $j+1$ уровня i, где $i = 3, 5, \ldots, l-1$) в момент $t-1$ равна нулю. Тогда, если нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна $q_{ij1}(t-1)$, где $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r-1$, то нагрузка первой реснички ребра $j+1$ уровня i в момент $t-1$ определена однозначно, а именно $q_{i(j+1)1}(t-1) = 2^{l-i}r - q_{ij1}(t-1)$. По лемме 9 число прообразов ребра j нечетного уровня i равно $(2^{l-i}r-1)\cdot 2^{\frac{n+1}{2}-1}$, а так как нагрузка первой реснички ребра уровня $j+1$ определена однозначно при каждом значении нагрузки первой реснички ребра j, то число прообразов ребра $j+1$ равно $2^{\frac{n+1}{2}-1}$. Следовательно, если нагрузка первой реснички ребра j нечетного уровня i в момент $t-1$ равна $q_{ij1}(t-1)$, где $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r-1$, то число прообразов пары инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i=3,5,\dots,l-1$ и $j=1,2,3,\dots,2^{i-1}-1$, I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии $q(t)$ равно $(2^{l-i}r-1)\cdot\left(2^{\frac{n+1}{2}-1}\right)^2$. Если нагрузка первой реснички ребра j нечетного уровня i в момент $t-1$ равна $2^{l-i}r$, то нагрузка первой реснички ребра $j+1$ уровня i в момент $t-1$ определена однозначно, а именно $q_{i(j+1)1}(t-1)=0$. По лемме 9 число прообразов ребра j нечетного уровня i равно $2^{\frac{n+1}{2}-1}$, а число прообразов ребра $j+1$ уровня i равно $2^{\frac{n+1}{2}-2}$. Если нагрузка первой реснички ребра j нечетного уровня i в момент $t-1$ равна нулю, то нагрузка первой реснички ребра $j+1$ уровня i в момент $t-1$ определена однозначно, а именно $q_{i(j+1)1}(t-1)=2^{l-i}r$. Этот случай симметричен случаю, когда нагрузка первой реснички ребра j нечетного уровня i в момент $t-1$ равна $2^{l-i}r$. Пусть нагрузка реснички с номером n ребра уровня $i-1$ (инцидентного ребрам j и $j+1$ уровня i, где $i=3,5,\dots,l-1$) в момент $t-1$ не равна нулю. Тогда первые и вторые реснички ребер j и $j+1$ нечетного уровня i в момент $t-1$ должны иметь нулевые нагрузки. По лемме 9 число указанных прообразов равно $\left(2^{\frac{n+1}{2}-2}\right)^2$. Следовательно, для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i=3,5,\dots,l-1$ и $j=1,2,3,\dots,2^{i-1}-1$, I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии $q(t)$ имеют место не более, чем $(2^{l-i}r-1)\cdot\left(2^{\frac{n+1}{2}-1}\right)^2+2\cdot 2^{\frac{n+1}{2}-1}\cdot 2^{\frac{n+1}{2}-2}+\left(2^{\frac{n+1}{2}-2}\right)^2$ прообразов.

На каждом уровне i, где $i=2,3,\dots,l$, количество пар инцидентных ребер равно 2^{i-2}. Значит, количество прообразов состояния $q(t)$ из K_{c_3} I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ не превосходит числа $\left(2^{l-1}r\cdot 2^{\frac{n+1}{2}-1}+2^{\frac{n+1}{2}-2}\right)\cdot\left(3\cdot 2^{\frac{n+1}{2}-2}\right)^{2^{l-1}}\cdot\Pi_{i=2,4,\dots,l-2}\left(2^{\frac{n+1}{2}-1}+2^{\frac{n+1}{2}-1}\right)^{2^{i-1}}\cdot$ $\Pi_{i=3,5,\dots,l-1}\left((2^{l-i}r-1)\cdot\left(2^{\frac{n+1}{2}-1}\right)^2+2\cdot 2^{\frac{n+1}{2}-1}\cdot 2^{\frac{n+1}{2}-2}+\left(2^{\frac{n+1}{2}-2}\right)^2\right)^{2^{i-2}}\leqslant$

$r \cdot (2^{\frac{n+1}{2}-1})^{2^{l-1}+1} \cdot 2^{2^l+l} \cdot \Pi_{i=2,4,\ldots,l-2}(2 \cdot 2^{\frac{n+1}{2}-1})^{2^{i-1}} \cdot$
$\Pi_{i=3,5,\ldots,l-1}\left((2^{l-i}r+2)\cdot(2^{\frac{n+1}{2}-1})^2\right)^{2^{i-2}} \leqslant 2^{\frac{7}{3}\cdot 2^{l-1}+l-\frac{2}{3}} \cdot r \cdot (2^{\frac{n+1}{2}-1})^{\frac{4}{3}\cdot 2^{l-1}+\frac{1}{3}} \cdot$
$\Pi_{i=3,5,\ldots,l-1}(3\cdot 2^{l-i}r\cdot(2^{\frac{n+1}{2}-1})^2)^{2^{i-2}} \leqslant 3^{\frac{1}{3}\cdot 2^{l-1}-\frac{2}{3}} 2^{\frac{7}{3}\cdot 2^{l-1}+l-\frac{2}{3}+\sum_{i=3,5,\ldots,l-1}(l-i)\cdot 2^{i-2}} \cdot$
$r^{1+\sum_{i=3,5,\ldots,l-1}2^{i-2}} \cdot (2^{\frac{n+1}{2}-1})^{\frac{4}{3}\cdot 2^{l-1}+\frac{1}{3}+\sum_{i=3,5,\ldots,l-1}2^{i-1}} = 2^{\frac{26}{9}\cdot 2^{l-1}+\frac{1}{3}\cdot l-\frac{4}{9}} \cdot$
$r^{\frac{1}{3}\cdot 2^{l-1}+\frac{1}{3}} \cdot (2^{\frac{n+1}{2}-1})^{2^l-1} \cdot 3^{\frac{1}{3}\cdot 2^{l-1}-\frac{2}{3}} \preccurlyeq 2^{2^{l-1}\cdot(\frac{9n+17}{9}+\frac{1}{3}\cdot\log_2(3\cdot r))+\frac{1}{3}\cdot l}$ при $l \to \infty$.

Таким образом, если l четно, то $S_{K_{c_3}} \preccurlyeq 2^{2^{l-1}\cdot\left(\frac{9n+17}{9}+\frac{1}{3}\cdot\log_2(3\cdot r)\right)+\frac{1}{3}\cdot l}$ при $l \to \infty$.

Следовательно, если l — четное, то $2^{2^{l-1}\cdot\left(\frac{3n+2}{9}+\frac{1}{3}\cdot\log_2 r\right)+\frac{1}{3}\cdot l} \preccurlyeq S_{K_{c_3}} \preccurlyeq 2^{2^{l-1}\cdot\left(\frac{9n+17}{9}+\frac{1}{3}\cdot\log_2(3\cdot r)\right)+\frac{1}{3}\cdot l}$ при $l \to \infty$. Лемма доказана.

Лемма 17. *Если l нечетно, то имеет место*

$$2^{2^{l-1}\left(\frac{9n-23}{9}+\frac{2}{3}\cdot\log_2 r\right)+\frac{1}{3}\cdot l} \preccurlyeq S_{K_{c_3}} \preccurlyeq 2^{2^{l-1}\cdot\left(\frac{9n+2}{9}+\frac{2}{3}\cdot\log_2(3\cdot r)\right)+\frac{1}{3}\cdot l}$$

при $l \to \infty$.

Доказательство. Так как число прообразов каждого состояния из класса K_{c_3} одно и то же, то посчитаем число прообразов, например, состояния $q(t)$ из K_{c_3}, такого что при четном i $q_{ijn}(t) = 2^{l-(i+1)}r$, $q_{ij(2k)}(t) = 1$ и $q_{ij(2k-1)}(t) = 2^{l-i}r$ и при нечетном i $q_{ij1}(t) = 0$, $q_{ij(2k+1)}(t) = 1$ и $q_{ij(2k)}(t) = 2^{l-i}r$, $1 \leqslant i < l$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$, $1 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}$; при $i = l$, когда l четно, выполнено $q_{ljn}(t) = 0$, $q_{lj(2k)}(t) = 1$ и $q_{lj(2k-1)}(t) = r$, где $1 \leqslant j \leqslant 2^{l-1}$, $1 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}$; при $i = l$, когда l нечетно, выполнено $q_{lj1}(t) = 0$, $q_{lj2}(t) = r$, $q_{ljn}(t) = 1$, $q_{lj(2k-1)}(t) = 1$ и $q_{lj(2k)}(t) = r$, где $1 \leqslant j \leqslant 2^{l-1}$, $1 < k \leqslant \frac{n-1}{2}$.

Оценим снизу и сверху число прообразов состояния конденсации $q(t)$ из K_{c_3}.

Для получения оценки снизу посчитаем количество таких предшественников состояния $q(t)$ из K_{c_3} I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$, что $q_{ijn}(t-1) = 0$, где $i = 2,4,6,\ldots,l-1$ и $j = 1,2,3,\ldots,2^{i-1}$.

Заметим, что, как и в случае четного l, для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i = 2,4,\ldots,l-1$ и $j = 1,2,3,\ldots,2^{i-1}-1$, I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии $q(t)$ количество прообразов по лемме 10 равно $\left(2^{\frac{n+1}{2}-1}\right)^2$, для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i = 3,5,\ldots,l$ и $j = 1,2,3,\ldots,2^{i-1}-1$, I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии

$q(t)$ количество прообразов по лемме 9 равно $(2^{l-i}r-1)\cdot\left(2^{\frac{n+1}{2}-1}\right)^2+$ $2\cdot 2^{\frac{n+1}{2}-1}\cdot 2^{\frac{n+1}{2}-2}$, а для ребра первого уровня I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии $q(t)$ по лемме 8 имеют место $2^{l-1}r\cdot 2^{\frac{n+1}{2}-1}+2^{\frac{n+1}{2}-2}$ прообразов.

На каждом уровне i, где $i=2,3,\dots,l$, количество пар инцидентных ребер равно 2^{i-2}. Значит, число прообразов состояния $q(t)$ из K_{c_3} I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$, таких что $q_{ijn}(t-1)=0$ при $i=2,4,6,\dots,l-1$ и $j=1,2,3,\dots,2^{i-1}-1$, равно $\left(2^{l-1}r\cdot 2^{\frac{n+1}{2}-1}+2^{\frac{n+1}{2}-2}\right)\cdot\Pi_{i=2,4,\dots,l-1}\left(2^{\frac{n+1}{2}-1}\right)^{2^{i-1}}\cdot$ $\Pi_{i=3,5,\dots,l}\left((2^{l-i}r-1)\cdot\left(2^{\frac{n+1}{2}-1}\right)^2+2\cdot 2^{\frac{n+1}{2}-1}\cdot 2^{\frac{n+1}{2}-2}\right)^{2^{i-2}}\geqslant$ $2^{l-1+\sum_{i=3,5,\dots,l}2^{i-2}(l-i)}\cdot r^{1+\sum_{i=3,5,\dots,l}2^{i-2}}\cdot\left(2^{\frac{n+1}{2}-2}\right)^{\sum_{i=1}^{l}2^{i-1}}=2^{\frac{2}{9}\cdot 2^l+\frac{1}{3}\cdot l+\frac{11}{9}}\cdot$ $r^{\frac{1}{3}\cdot 2^l+\frac{1}{3}}\cdot\left(2^{\frac{n+1}{2}-2}\right)^{2^l-1}\asymp 2^{2^{l-1}\left(\frac{9n-23}{9}+\frac{2}{3}\cdot\log_2 r\right)+\frac{1}{3}\cdot l}$ при $l\to\infty$.

Таким образом, если l нечетно, то $S_{K_{c_3}}\succcurlyeq 2^{2^{l-1}\left(\frac{9n-23}{9}+\frac{2}{3}\cdot\log_2 r\right)+\frac{1}{3}\cdot l}$ при $l\to\infty$.

Для получения оценки сверху заметим, что для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i=2,4,\dots,l-1$ и $j=1,2,3,\dots,2^{i-1}-1$, I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии $q(t)$ по лемме 10 не более $\left(2^{\frac{n+1}{2}-1}+2^{\frac{n+1}{2}-1}\right)^2$ прообразов, для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i=3,5,\dots,l$ и $j=1,2,3,\dots,2^{i-1}-1$, этого I-дерева в состоянии $q(t)$ число прообразов по лемме 9 не более $(2^{l-i}r-1)\cdot\left(2^{\frac{n+1}{2}-1}\right)^2+2\cdot 2^{\frac{n+1}{2}-1}\cdot 2^{\frac{n+1}{2}-2}+\left(2^{\frac{n+1}{2}-2}\right)^2$, а количество прообразов для ребра первого уровня этого I-дерева в состоянии $q(t)$ по лемме 9 равно $2^{l-1}r\cdot 2^{\frac{n+1}{2}-1}+2^{\frac{n+1}{2}-2}$.

На каждом уровне i, где $i=2,3,\dots,l$, количество пар инцидентных ребер равно 2^{i-2}. Значит, количество предшественников состояния $q(t)$ из K_{c_3} I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ не превосходит числа $\left(2^{l-1}r\cdot 2^{\frac{n+1}{2}-1}+2^{\frac{n+1}{2}-2}\right)\cdot\Pi_{i=2,4,\dots,l-1}\left(2^{\frac{n+1}{2}-1}+2^{\frac{n+1}{2}-1}\right)^{2^{i-1}}\cdot$ $\Pi_{i=3,5,\dots,l}\left((2^{l-i}r-1)\cdot\left(2^{\frac{n+1}{2}-1}\right)^2+2\cdot 2^{\frac{n+1}{2}-1}\cdot 2^{\frac{n+1}{2}-2}+\left(2^{\frac{n+1}{2}-2}\right)^2\right)^{2^{i-2}}\leqslant$

$2^l r \cdot 2^{\frac{n+1}{2}-1} \cdot \Pi_{i=2,4,\ldots,l-1}(2 \cdot 2^{\frac{n+1}{2}-1})^{2^{i-1}} \cdot \Pi_{i=3,5,\ldots,l}\left((2^{l-i}r+2)\cdot(2^{\frac{n+1}{2}-1})^2\right)^{2^{i-2}} \leqslant 2^{\frac{1}{3}\cdot 2^l+l-\frac{2}{3}} r\cdot(2^{\frac{n+1}{2}-1})^{1+\sum_{i=2,4,\ldots,l-1}2^{i-1}} \cdot \Pi_{i=3,5,\ldots,l}(3\cdot 2^{l-i}r\cdot(2^{\frac{n+1}{2}-1})^2)^{2^{i-2}} \leqslant 2^{\frac{1}{3}\cdot 2^l+l-\frac{2}{3}} \cdot (2^{\frac{n+1}{2}-1})^{\frac{1}{3}\cdot 2^l+\frac{1}{3}} \cdot 2^{\sum_{i=3,5,\ldots,l}(l-i)\cdot 2^{i-2}} \cdot r^{1+\sum_{i=3,5,\ldots,l}2^{i-2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}\cdot 2^l-\frac{2}{3}} \cdot (2^{\frac{n+1}{2}-1})^{\sum_{i=3,5,\ldots,l}2^{i-1}} = 2^{\frac{11}{9}\cdot 2^{l-1}+\frac{1}{3}\cdot l-\frac{4}{9}} \cdot r^{\frac{1}{3}\cdot 2^l+\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}\cdot 2^l-\frac{2}{3}} \cdot (2^{\frac{n+1}{2}-1})^{2^l-1} \preccurlyeq 2^{2^{l-1}\cdot\left(\frac{9n+2}{9}+\frac{2}{3}\cdot\log_2(3\cdot r)\right)+\frac{1}{3}\cdot l}$ при $l\to\infty$.

Таким образом, если l нечетно, то $S_{K_{c_3}} \preccurlyeq 2^{2^{l-1}\cdot\left(\frac{9n+2}{9}+\frac{2}{3}\cdot\log_2(3\cdot r)\right)+\frac{1}{3}\cdot l}$ при $l\to\infty$.

Следовательно, если l — нечетное, то $2^{2^{l-1}\left(\frac{9n-23}{9}+\frac{2}{3}\cdot\log_2 r\right)+\frac{1}{3}\cdot l} \preccurlyeq S_{K_{c_3}} \preccurlyeq 2^{2^{l-1}\cdot\left(\frac{9n+2}{9}+\frac{2}{3}\cdot\log_2(3\cdot r)\right)+\frac{1}{3}\cdot l}$ при $l\to\infty$. Лемма доказана.

Лемма 18. *Имеет место*

$$2^{2^{l-1}\cdot\log_2(2r\cdot e_7^2)} \preccurlyeq S_{K_{c_1}} \preccurlyeq 2^{2^{l-1}\cdot\log_2(6\sqrt{3}r\cdot e_{10}^2)}$$

при $l\to\infty$.

Доказательство. Так как число прообразов каждого состояния из класса K_{c_1} одно и то же, то посчитаем число прообразов, например, состояния $q(t)$ из K_{c_1}, такого что $q_{ij1}(t)=0$, $q_{ijn}(t)=2^{l-(i+1)}r$, $q_{ijk}(t)=2^{l-i}r$, где $1\leqslant i<l$, $1\leqslant j\leqslant 2^{i-1}$, $2\leqslant k\leqslant n-1$; при $i=l$ выполнено $q_{lj1}(t)=0$, $q_{ljn}(t)=0$, $q_{ljk}(t)=r$, где $1\leqslant j\leqslant 2^{l-1}$, $2\leqslant k\leqslant n-1$.

Оценим сверху и снизу число прообразов состояния конденсации $q(t)$ из K_{c_1}.

Для получения оценки снизу посчитаем количество таких предшественников состояния $q(t)$ из K_{c_1} I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$, что $q_{ijn}(t-1)=0$, где $i=1,2,3,\ldots,l$ и $j=1,2,3,\ldots,2^{i-1}$.

Заметим, что для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i=2,3,\ldots,l$ и $j=1,2,3,\ldots,2^{i-1}-1$, I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии $q(t)$ имеют место $(2^{l-i}r-1)\cdot e_9^2+2\cdot e_9\cdot e_7$ прообразов, а для ребра первого уровня I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии $q(t)$ по лемме 11 имеют место $2^{l-1}r\cdot e_9+e_7$ прообразов. Действительно, если нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна $q_{ij1}(t-1)$, где $1\leqslant q_{ij1}(t-1)\leqslant 2^{l-i}r-1$, то нагрузка первой реснички ребра $j+1$ уровня i в момент $t-1$ определена однозначно, а именно $q_{i(j+1)1}(t-1)=2^{l-i}r-q_{ij1}(t-1)$. По лемме 11 число прообразов ребра j уровня i

равно $(2^{l-i}r-1)\cdot e_9$, а так как нагрузка первой реснички ребра уровня $j+1$ определена однозначно при каждом значении нагрузки первой реснички ребра j уровня i, то число прообразов ребра $j+1$ уровня i равно e_9. Следовательно, если нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна $q_{ij1}(t-1)$, где $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r-1$, то число прообразов пары инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i = 2, 3, \dots, l$ и $j = 1, 2, 3, \dots, 2^{i-1}-1$, I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ в состоянии $q(t)$ равно $(2^{l-i}r-1)\cdot e_9^2$. Если нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна $2^{l-i}r$, то нагрузка первой реснички ребра $j+1$ уровня i в момент $t-1$ определена однозначно, а именно $q_{i(j+1)1}(t-1) = 0$. По лемме 11 число прообразов ребра j уровня i равно e_9, а число прообразов ребра $j+1$ уровня i равно e_7. Если нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна нулю, то нагрузка первой реснички ребра $j+1$ уровня i в момент $t-1$ определена однозначно, а именно $q_{i(j+1)1}(t-1) = 2^{l-i}r$. Этот случай симметричен случаю, когда нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна $2^{l-i}r$. Следовательно, для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i = 2, 3, \dots, l$ и $j = 1, 2, 3, \dots, 2^{i-1}-1$, I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ в состоянии $q(t)$ имеют место $(2^{l-i}r-1)\cdot e_9^2 + 2\cdot e_9\cdot e_7$ прообразов.

На каждом уровне i, где $i = 2, 3, \dots, l$, количество пар инцидентных ребер равно 2^{i-2}. Значит, число прообразов состояния $q(t)$ из K_{c_1} I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$, таких что $q_{ijn}(t-1) = 0$ при всех i и j, равно $(2^{l-1}r\cdot e_9 + e_7)\cdot \Pi_{i=2}^{l}((2^{l-i}r-1)\cdot e_9^2 + 2\cdot e_9\cdot e_7)^{2^{i-2}} \geqslant 2^{l-1+\sum_{i=2}^{l} 2^{i-2}(l-i)} \cdot r^{1+\sum_{i=2}^{l} 2^{i-2}} \cdot e_7^{1+\sum_{i=2}^{l} 2^{i-1}} = 2^{2^{l-1}-1}\cdot r^{2^{l-1}}\cdot e_7^{2^l-1} \asymp 2^{2^{l-1}(1+\log_2 r+2\log_2 e_7)} = 2^{2^{l-1}\cdot\log_2(2r\cdot e_7^2)}$ при $l \to \infty$.

Таким образом, $S_{K_{c_1}} \succcurlyeq 2^{2^{l-1}\cdot\log_2(2r\cdot e_7^2)}$ при $l \to \infty$.

Для получения оценки сверху заметим, что для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i = 2, 3, \dots, l-1$ и $j = 1, 2, 3, \dots, 2^{i-1}-1$, I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ в состоянии $q(t)$ количество прообразов не превосходит числа $(2^{l-i}r-1)\cdot(e_9+e_{10})^2 + 2\cdot(e_9+e_{10})\cdot(e_8+e_7) + (e_8+e_7)^2$, для инцидентных ребер уровня l этого I-дерева в состоянии $q(t)$ по лемме 11 имеют место не более $(r-1)\cdot e_{10}^2 + 2\cdot e_{10}\cdot e_8 + e_8^2$ прообразов, а количество прообразов для ребра первого уровня по лемме 11 равно $2^{l-1}r\cdot(e_9+e_{10}) + e_7 + e_8$. Действительно, пусть нагрузка реснички с номером n ребра уровня $i-1$ (инцидентного ребрам j и $j+1$ уровня i) в момент $t-1$ равна нулю. Тогда, если нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна $q_{ij1}(t-1)$, где $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r-1$, то нагрузка первой реснички ребра $j+1$ уровня i в момент $t-1$ определена однозначно, а именно $q_{i(j+1)1}(t-1) = 2^{l-i}r - q_{ij1}(t-1)$. По лемме 11 число прообразов ребра j уровня i равно $(2^{l-i}r-1)\cdot(e_9+e_{10}$, а так как нагрузка первой реснички ребра уровня $j+1$ определена однозначно при каждом значении нагрузки первой реснички ребра j, то число прообразов ребра $j+1$ равно e_9+e_{10}. Следовательно, если нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна $q_{ij1}(t-1)$, где $1 \leqslant q_{ij1}(t-1) \leqslant 2^{l-i}r-1$, то число прообразов пары инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i=2,3,\ldots,l-1$ и $j=1,2,3,\ldots,2^{i-1}-1$, I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии $q(t)$ равно $(2^{l-i}r-1)\cdot(e_9+e_{10})^2$. Если нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна $2^{l-i}r$, то нагрузка первой реснички ребра $j+1$ уровня i в момент $t-1$ определена однозначно, а именно $q_{i(j+1)1}(t-1) = 0$. По лемме 11 число прообразов ребра j уровня i равно e_9+e_{10}, а число прообразов ребра $j+1$ уровня i равно e_7+e_8. Если нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна нулю, то нагрузка первой реснички ребра $j+1$ уровня i в момент $t-1$ определена однозначно, а именно $q_{i(j+1)1}(t-1) = 2^{l-i}r$. Этот случай симметричен случаю, когда нагрузка первой реснички ребра j уровня i в момент $t-1$ равна $2^{l-i}r$. Пусть нагрузка реснички с номером n ребра уровня $i-1$ (инцидентного ребрам j и $j+1$ уровня i) в момент $t-1$ не равна нулю. Тогда первые и вторые реснички ребер j и $j+1$ уровня i в момент $t-1$ должны иметь нулевые нагрузки. По лемме 11 число указанных прообразов будет $(e_7+e_8)^2$. Следовательно, для инцидентных ребер j и $j+1$ уровня i, где $i=2,3,\ldots,l-1$ и $j=1,2,3,\ldots,2^{i-1}-1$, I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии $q(t)$ имеют место не более, чем $(2^{l-i}r-1)\cdot(e_9+e_{10})^2+2\cdot(e_9+e_{10})\cdot(e_8+e_7)+(e_8+e_7)^2$ прообразов.

На каждом уровне i, где $i=2,3,\ldots,l$, количество пар инцидентных ребер равно 2^{i-2}. Значит, количество прообразов состояния $q(t)$ из K_{c_1} I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ не превосходит числа $(2^{l-1}r\cdot(e_{10}+e_9)+e_8+e_7)\cdot((r-1)\cdot e_{10}^2+2\cdot e_8\cdot e_{10}+e_8^2)^{2^{l-2}}\cdot\Pi_{i=2}^{l-1}((2^{l-i}r-1)\cdot$

$(e_{10}+e_9)^2+2\cdot(e_8+e_7)\cdot(e_{10}+e_9)+(e_8+e_7)^2)^{2^{i-2}} \leqslant (2^l r+2)\cdot e_{10}\cdot ((r+2)e_{10}^2)^{2^{l-2}}\cdot\Pi_{i=2}^{l-1}((2^{l-i}r-1)\cdot 2^2\cdot e_{10}^2+2^3\cdot e_{10}^2+2^2\cdot e_{10}^2)^{2^{i-2}} \leqslant 2^l\cdot e_{10}\cdot(3r)^{2^{l-2}+1}e_{10}^{2^{l-1}}\cdot\Pi_{i=2}^{l-1}(3^2\cdot 2^{l-i}r\cdot e_{10}^2)^{2^{i-2}} \leqslant 2^l\cdot(3r)^{2^{l-2}+1}\cdot e_{10}^{2^{l-1}+1}\cdot 2^{\sum_{i=2}^{l-1}(l-i)\cdot 2^{i-2}}\cdot r^{\sum_{i=2}^{l-1}2^{i-2}}\cdot(3e_{10})^{\sum_{i=2}^{l-1}2^{i-1}} = 2^{2^{l-1}}\cdot r^{2^{l-1}}\cdot 3^{3\cdot 2^{l-2}}\cdot e_{10}^{2^l} \precsim 2^{2^{l-1}\cdot(1+\log_2(r\cdot\sqrt{27})+2\log_2 e_{10})} = 2^{2^{l-1}\cdot\log_2(6\sqrt{3}r\cdot e_{10}^2)}$ при $l\to\infty$.

Таким образом, $S_{K_{c_1}} \precsim 2^{2^{l-1}\cdot\log_2(6\sqrt{3}r\cdot e_{10}^2)}$ при $l\to\infty$.

Следовательно, $2^{2^{l-1}\cdot\log_2(2r\cdot e_7^2)} \precsim S_{K_{c_1}} \precsim 2^{2^{l-1}\cdot\log_2(6\sqrt{3}r\cdot e_{10}^2)}$ при $l\to\infty$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Доказательство данного утверждения следует из лемм 2, 3 и 4. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим каждый из пяти случаев.

Случай 1). При каждом j, где $1\leqslant j\leqslant 2^{l-1}$, либо ресничка с номером ljn, имеет нагрузку q_{ljn}, где $q_{ljn}\in\{1,2,\ldots,b-r\}$ и ресничка с номером $lj(n-1)$ имеет нагрузку $q_{lj(n-1)}=r$, либо ресничка с номером ljn имеет нагрузку $q_{ljn}=0$ и ресничка с номером $lj(n-1)$ имеет нагрузку $q_{lj(n-1)}$, где $q_{lj(n-1)}\in\{1,2,\ldots,r\}$, а нагрузки остальных ресничек определены однозначно. Значит, ребро j может иметь $b-r+r=b$ вариантов возможных нагрузок ресничек с номерами n и $n-1$. Так как в I-дереве $D^{-1}(b,r,n,l)$ на уровне l находятся 2^{l-1} ребер, то число состояний конденсации в классе K_{c_1} равно $b^{2^{l-1}}$.

Случай 2). На каждом ребре уровня i, где $i=1,2,\ldots,l$, для каждой из $\frac{n}{2}-1$ ресничек возможны $2^{l-i}(b-r)$ вариантов нагрузки, а нагрузки остальных ресничек определены однозначно. Число ребер на уровне i равно 2^{i-1}. Следовательно, число состояний конденсации в классе K_{c_2} равно $\Pi_{i=1}^{l}(2^{l-i}(b-r))^{2^{i-1}(\frac{n}{2}-1)} = 2^{(\frac{n}{2}-1)\sum_{i=1}^{l}(l-i)2^{i-1}}\cdot(b-r)^{(\frac{n}{2}-1)\sum_{i=1}^{l}2^{i-1}} = 2^{(\frac{n}{2}-1)(2^l-l-1)}\cdot(b-r)^{(\frac{n}{2}-1)(2^l-1)} = ((b-r)^{2^l-1}\cdot 2^{2^l-l-1})^{\frac{n}{2}-1}$.

Случай 3). На каждом ребре уровня i, где $i=1,2,\ldots,l-1$, для каждой из $\frac{n-1}{2}$ ресничек возможны $2^{l-i}(b-r)$ вариантов нагрузки, а нагрузки остальных ресничек определены однозначно. Число ребер на уровне i равно 2^{i-1}. Для вариантов нагрузки ресничек ребер уровня l возможны два случая в зависимости от четности или нечетности числа l.

Пусть l четно. Тогда на каждом ребре уровня l для каждой из $\frac{n-1}{2}$ ресничек возможны $b-r$ вариантов нагрузки, а нагрузки остальных ресничек определены однозначно. Следовательно, число состояний конденсации в классе K_{c_3} при четном l равно $\Pi_{i=1}^{l}(2^{l-i}(b-r))^{2^{i-1}\frac{n-1}{2}} = 2^{\frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^{l}(l-i)2^{i-1}} \cdot (b-r)^{\frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^{l}2^{i-1}} = 2^{\frac{n-1}{2}(2^l-l-1)} \cdot (b-r)^{\frac{n-1}{2}(2^l-1)} = ((b-r)^{2^l-1} \cdot 2^{2^l-l-1})^{\frac{n-1}{2}}$.

Пусть l нечетно. Тогда на каждом ребре уровня l для каждой из $\frac{n-1}{2}-1$ ресничек возможны $b-r$ вариантов нагрузки, для самых нижних ресничек на ребрах уровня l возможны $b-r+1$ вариантов нагрузки, а нагрузки остальных ресничек определены однозначно. Следовательно, число состояний конденсации в классе K_{c_3} при нечетном l равно $(b-r)^{2^{l-1}(\frac{n-1}{2}-1)} \cdot (b-r+1)^{2^{l-1}} \cdot \Pi_{i=1}^{l-1}(2^{l-i}(b-r))^{2^{i-1}\frac{n-1}{2}} = 2^{\frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^{l-1}(l-i)2^{i-1}} \cdot (b-r)^{\frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^{l}2^{i-1}-2^{l-1}} \cdot (b-r+1)^{2^{l-1}} = 2^{\frac{n-1}{2}(2^l-l-1)} \cdot (b-r)^{2^{l-1}(n-2)-\frac{n-1}{2}} \cdot (b-r+1)^{2^{l-1}}$.

Таким образом, $|K_{c_3}| = \begin{cases} ((b-r)^{2^l-1} \cdot 2^{2^l-l-1})^{\frac{n-1}{2}}, & \text{если } l \text{ четно,} \\ (b-r)^{2^{l-1}(n-2)-\frac{n-1}{2}} \cdot (b-r+1)^{2^{l-1}} \cdot 2^{\frac{n-1}{2}(2^l-l-1)}, & \text{иначе.} \end{cases}$

Случай 4). На каждом ребре уровня i, где $i = 1, 2, \ldots, l$, для каждой из $\frac{n}{2}-1$ ресничек возможны $2^{l-i}b$ вариантов нагрузки, а нагрузки остальных ресничек определены однозначно. Число ребер на уровне i равно 2^{i-1}. Следовательно, число состояний конденсации в классе K_{c_4} равно $\Pi_{i=1}^{l}(2^{l-i}b)^{2^{i-1}(\frac{n}{2}-1)} = 2^{(\frac{n}{2}-1)\sum_{i=1}^{l}(l-i)2^{i-1}} \cdot b^{(\frac{n}{2}-1)\sum_{i=1}^{l}2^{i-1}} = 2^{(\frac{n}{2}-1)(2^l-l-1)} \cdot b^{(\frac{n}{2}-1)(2^l-1)} = (b^{2^l-1} \cdot 2^{2^l-l-1})^{\frac{n}{2}-1}$.

Случай 5). На каждом ребре уровня i, где $i = 1, 2, \ldots, l$, для каждой из $\frac{n-1}{2}$ ресничек возможны $2^{l-i}b$ вариантов нагрузки, а нагрузки остальных ресничек определены однозначно. Число ребер на уровне i равно 2^{i-1}. Следовательно, число состояний конденсации в классе K_{c_5} равно $\Pi_{i=1}^{l}(2^{l-i}b)^{2^{i-1}\frac{n-1}{2}} = 2^{\frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^{l}(l-i)2^{i-1}} \cdot b^{\frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^{l}2^{i-1}} = 2^{\frac{n-1}{2}(2^l-l-1)} \cdot b^{\frac{n-1}{2}(2^l-1)} = (b^{2^l-1} \cdot 2^{2^l-l-1})^{\frac{n-1}{2}}$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Доказательство данного утверждения следует из лемм 12, 13, 14, 15, 16, 17 и 18. Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность академикам Кудрявцеву Валерию Борисовичу и Чучалину Александру Григорьевичу за постановку задачи и научное руководство.

Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[2] Гераськина Ю. Г. Об одной автоматной модели в биологии // Дискретная математика. 2007. Т. 19, вып. 3. С. 122–139.

[3] Гераськина Ю. Г. Модель процесса дыхания живых организмов // Интеллектуальные системы. 2003. Т. 8, вып. 1–4. С. 429–456.

[4] Гераськина Ю. Г. Модель самоочищения легочных структур // Интеллектуальные системы. 2002–2003. Т. 7, вып. 1–4. С. 41–54.

[5] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.