Принцип максимума Понтрягина в задаче с временным запаздыванием

Г. В. Боков

В работе формулируется задача оптимального управления с постоянным запаздыванием по времени в фазовой переменной и в переменной управления, для которой доказывается теорема, дающая необходимые условия оптимальности решения. В конце работы приводиться обобщение данной задачи на случай бесконечного промежутка времени.

Ключевые слова: теория оптимального управления, дифференциальные уравнения с временным запаздыванием, необходимые условия оптимальности, принцип максимума, конечный и бесконечный временной горизонт.

1. Введение

Принцип максимума в задаче с запаздыванием основывается на дифференциальных уравнениях с отклоняющимся или запаздывающим аргументом, то есть на таких дифференциальных уравнениях, в которые неизвестная функция и ее производная входят, вообще говоря, при различных значениях аргумента. Примером может служить следующее уравнение, которое мы будем использовать в дальнейшем

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\theta)).$$

Впервые отдельные уравнения такого типа появились в литературе во второй половине XVIII столетия (Кондорсе, 1771 г.), но систематическое исследование началось лишь в XX веке (особенно в конце 40-х годов — А. Д. Мышкис в нашей стране, см. [4], Е. М. Райт и Р. Беллман за рубежом) в связи с потребностями прикладных наук. В частности, они нашли свое применение и в принципе максимума

Л. С. Понтрягина (см. [5]), появившемся в конце 50-х годов прошлого века, что дало мощный толчок развития этого направления. Ряд авторов в нашей стране Р. Габасов, Г. Л. Харатишвили, А. С. Матвеев, Н. Н. Красовский и др., а также за рубежом Галаней, Чанг, Ли внесли большой вклад в это дело.

В 1961 г. Г. Л. Харатишвили (см. [6] и [5], с. 240–254) обобщил принцип максимума Понтрягина на случай постоянного запаздывания в фазовой переменной. В своей работе он рассматривал автономную систему дифференциальных уравнений без запаздывания в управлении.

Его современники Чанг и Ли (Chyung and Lee, см. [9]) в 1966 г. получили принцип максимума для неавтономной системы дифференциальных уравнений в линейно-квадратичной задаче оптимального управления с кратным запаздыванием в фазовой переменной, но без запаздывания в управлении. Под линейно-квадратичной задачей понимается та, в которой система дифференциальных уравнений является линейной по фазовой переменной и управлению, а функция, для которой решается экстремальная задача, квадратично зависит от этих же переменных.

Между тем Галаней (Halanay, см. [11]) в 1968 г. доказал необходимые условия оптимальности для более общей задачи оптимального управления с запаздыванием как в фазовой переменной, так и в управлении. Он рассмотрел специфическую систему дифференциальных уравнений в интегральной форме. Его доказательство основано на абстрактном методе множителей Хестенса (Hestenes, см. [12]).

Гунн (Guinn, см. [10]) в 1976 г. дал необходимые условия оптимальности в форме существования сопряженной. А его современник Бакк (Bakke, см. [8]) в 1981 г. получил принцип максимума в проблеме оптимального управления с кратным запаздыванием с помощью теории оптимальных полей.

В 1988 г. наш соотечественник А. С. Матвеев (см. [3]) рассмотрел более общую задачу оптимального управления с запаздыванием, в которой параметр запаздывания представлен как функция времени. Причем обобщенное запаздывание входит как в фазовую переменную, так и в управление. Его результаты, как и результаты Галанея, имеют достаточно абстрактный характер, что затрудняет их практическое применение.

Ниже в работе, как вклад в данное направление, будет поставлена задача оптимального управления, содержащая постоянные параметры запаздывания, как в фазовой переменной, так и в переменной управления. Она определяется без требования автономности и линейности для системы дифференциальных уравнений. Для данной задачи будет доказана теорема, которая является аналогом принципа максимума Понтрягина. Ограничения на вид запаздывающего параметра позволяют записать необходимые условия оптимальности решения в явном виде, что делает их пригодными для практического использования.

2. Постановка задачи

Для начала дадим несколько определений

Определение 1. Функция $x(t)$ называется кусочно-непрерывной на отрезке $[t_0, t_1]$, если она непрерывна всюду на $[t_0, t_1]$, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода.

Определение 2. Функция $x(t)$ называется кусочно-гладкой на отрезке $[t_0, t_1]$, если она непрерывна, а ее производная $\dot{x}(t)$ кусочно-непрерывна на $[t_0, t_1]$.

Множество всех кусочно-непрерывных и кусочно-гладких функций на отрезке $[t_0, t_1]$, принимающих значения из некоторого множества M, обозначим соответственно через $KC([t_0, t_1], M)$ и $KC^1([t_0, t_1], M)$.

Рассмотрим задачу:

$$\mathcal{F}(x(\cdot), u(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), x(t-\theta_1), u(t), u(t-\theta_2))dt \to \inf, \qquad (1)$$

где $x(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ — состояние системы, или фазовая переменная;
$u(\cdot) \in KC([t_0, t_1], U)$ — управление системой, или управляющая переменная;
$U \subseteq \mathbb{R}^r$ — множество возможных значений управления;

$\theta_1 = const$ — параметр запаздывания фазовой переменной;
$\theta_2 = const$ — параметр запаздывания управления.

Изменение состояний системы описывается следующим дифференциальным уравнением с запаздыванием:

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), x(t-\theta_1), u(t), u(t-\theta_2)),\ t \in [t_0, t_1]. \tag{2}$$

Чтобы гарантировать существование решения этого уравнения, необходимо задать непрерывную функцию $x_0(\cdot)$ такую, что

$$x(t) = x_0(t),\ t \in [t_0 - \theta_1, t_0], \tag{3}$$

и кусочно-непрерывную функцию $u_0(\cdot)$ такую, что

$$u(t) = u_0(t),\ t \in [t_0 - \theta_2, t_0). \tag{4}$$

Будем предполагать, что функции

$$f = f(t, x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n, u^1, \ldots, u^r, w^1, \ldots, w^r),$$
$$\varphi = \varphi(t, x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n, u^1, \ldots, u^r, w^1, \ldots, w^r),$$

определенные в (1), (2) и такие, что

$$f : G \times U \times U \to \mathbb{R},$$
$$\varphi : G \times U \times U \to \mathbb{R}^n,$$

удовлетворяют следующим условием: сами они и их частные производные по переменным x^i, y^j $(i, j = 1, \ldots, n)$ непрерывны по совокупности аргументов в $G \times U \times U$. Где G — открытое множество в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Моменты времени t_0 и t_1 будем считать фиксированными. Значение верхнего предела t_1 может быть, вообще говоря, как конечным, так и бесконечным, но во втором случае может случиться так, что интеграл в (1) расходится. Данный случай ($t_1 = +\infty$) будет рассмотрен позднее, а для начала, предположим, что значение t_1 конечно.

Определение 3. Назовем пару $(x(\cdot), u(\cdot))$ управляемым процессом в задаче (1), (2), (3), (4), если:

а)управление $u(\cdot) : [t_0, t_1] \to U$ — кусочно-непрерывная функция. Для определенности будем считать, что $u(\cdot)$ непрерывна справа для $t_0 \leqslant t < t_1$ и слева в точке t_1;

б) фазовая траектория $x(\cdot) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ кусочно-гладкая функция и ее график Γ лежит в G

$$\Gamma = \{(t, x(t), x(t-\theta_1)) \mid t_0 \leqslant t \leqslant t_1\} \subset G;$$

в) для всех $t \in [t_0, t_1]$, кроме, быть может, точек разрыва управления $u(\cdot)$, функция $x(\cdot)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (2).

Управляемый процесс называется допустимым, если, кроме того, выполняются начальные условия (3) и (4).

Допустимый управляемый процесс $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ называется оптимальным, если найдется такое $\varepsilon > 0$, что для всякого допустимого управляемого процесса $(x(\cdot), u(\cdot))$ такого, что

$$|x(t) - \hat{x}(t)| < \varepsilon, \forall t \in [t_0, t_1],$$

выполняется неравенство

$$\mathcal{F}(x(\cdot), u(\cdot)) \geqslant \mathcal{F}(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)).$$

Введем некоторые обозначения:

$$\begin{gathered}
\hat{f}(t) = f(t, \hat{x}(t), \hat{x}(t-\theta_1), \hat{u}(t), \hat{u}(t-\theta_2)),\\
\hat{\varphi}(t) = \varphi(t, \hat{x}(t), \hat{x}(t-\theta_1), \hat{u}(t), \hat{u}(t-\theta_2)).\\
\hat{f}^v_u(t) = f(t, \hat{x}(t), \hat{x}(t-\theta_1), v, \hat{u}(t-\theta_2)),\\
\hat{\varphi}^v_u(t) = \varphi(t, \hat{x}(t), \hat{x}(t-\theta_1), v, \hat{u}(t-\theta_2)),\\
\hat{f}^v_w(t) = f(t, \hat{x}(t), \hat{x}(t-\theta_1), \hat{u}(t), v),\\
\hat{\varphi}^v_w(t) = \varphi(t, \hat{x}(t), \hat{x}(t-\theta_1), \hat{u}(t), v),
\end{gathered}$$

$$\begin{multlined}
H(t, x, y, u, w) = H(t, x(t), x(t-\theta_1), u(t), u(t-\theta_2)) = \\
= \hat{p}(t)\varphi(t, x(t), x(t-\theta_1), u(t), u(t-\theta_2)) - \\
- \hat{\lambda}_0 f(t, x(t), x(t-\theta_1), u(t), u(t-\theta_2)). \quad (5)
\end{multlined}$$

Имеет место следующая теорема, которую мы назовем *принципом максимума Понтрягина в задаче с запаздыванием.*

Теорема 1. *Если* $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ — *оптимальный допустимый процесс для задачи* (1), (2), (3), (4), *то существуют множители Лагранжа* $\hat{\lambda}_0 \geqslant 0$, $\hat{\mu}$, $\hat{p}(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$, *не равные одновременно нулю и такие, что выполнено*
1. уравнение Эйлера:

$$\frac{d}{dt}\hat{p}(t) = \begin{cases} -\hat{H}_x(t) - \hat{H}_y(t+\theta_1), & t \in [t_0, t_1 - \theta_1] \\ -\hat{H}_x(t), & t \in [t_1 - \theta_1, t_1] \end{cases} \tag{6}$$

2. принцип максимума Понтрягина:

$$\begin{aligned} \max_{v \in U}[H(t, \hat{x}, \hat{y}, v, \hat{w}) + H(t+\theta_2, \hat{x}, \hat{y}, \hat{u}, v)] = \\ = H(t, \hat{x}, \hat{y}, \hat{u}, \hat{w}) + H(t+\theta_2, \hat{x}, \hat{y}, \hat{u}, \hat{w}), \quad t \in [t_0, t_1 - \theta_2] \\ \max_{v \in U} H(t, \hat{x}, \hat{y}, v, \hat{w}) = H(t, \hat{x}, \hat{y}, \hat{u}, \hat{w}), \quad t \in [t_1 - \theta_2, t_1] \end{aligned} \tag{7}$$

3. условие трансверсальности:

$$\hat{p}(t_0) = \hat{\mu}, \quad \hat{p}(t_1) = 0. \tag{8}$$

Где

$$\hat{H}_\Delta(t) = \frac{\partial}{\partial \Delta} H(t, \hat{x}, \hat{y}, \hat{u}, \hat{w}).$$

3. Доказательство теоремы

Для простоты будем рассматривать случай, когда $n = 1$. Это нисколько не умаляет общего случая, когда $n \in \mathbb{N}$ произвольно, так как в данном случае увеличивается только громоздкость выражений, а их суть остается той же.

3.1. Игольчатые вариации

3.1.1. Определение игольчатой вариации

Начнем с определения элементарной — вейерштрассовской — игольчатой вариации. Обозначим через

$$T_0 = \{\tau \in (t_0, t_1) \mid \hat{u}(\cdot) \text{ непрерывна в } \tau \text{ и } \tau + \theta_2\}$$

Зафиксируем точку $\tau \in T_0$, элемент $v \in U$ и число $\alpha \geqslant 0$ настолько малое, что $[\tau-\alpha, \tau] \subset T_0$.

Управление

$$u_\alpha(t) = u_\alpha(t;\tau,v) = \begin{cases} \hat{u}(t), & \text{если } t \notin [\tau-\alpha,\tau) \\ v, & \text{если } t \in [\tau-\alpha,\tau) \end{cases} \tag{9}$$

назовем *элементарной игольчатой вариацией управления* $\hat{u}(\cdot)$. Рассмотрим дифференциальное равнение с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), x(t-\theta_1), u_\alpha(t), u_\alpha(t-\theta_2))$$

с начальным условием для фазовой переменной (3) и начальным условием для управления (4). Обозначим за $x_\alpha(t) = x_\alpha(t;\tau,v)$ решение этого уравнения. Назовем $x_\alpha(t)$ *элементарной игольчатой вариацией траектории* $\hat{x}(\cdot)$, а пару $(x_\alpha(t), u_\alpha(t))$ *элементарной вариацией процесса* $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$. Пару (τ, v), определяющую эту вариацию, будем называть *элементарной иголкой.*

3.1.2. Лемма о свойствах элементарной вариации

Лемма 1 (О свойствах элементарной вариации). *Пусть элементарная иголка (τ, v) фиксирована. Тогда существует такое $\tilde{\alpha} > 0$, что, при $0 \leqslant \alpha \leqslant \tilde{\alpha}$, выполняется:*

1. *траектория $x_\alpha(t)$ определена на всем отрезке $[t_0, t_1]$ и при $\alpha \to 0+0$*[1] *$x_\alpha(t) \rightrightarrows \hat{x}(t)$ равномерно на $[t_0, t_1]$;*
2. *при $t \geqslant \tau$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \tilde{\alpha}$, существует и непрерывна по α производная $\frac{d}{d\alpha} x_\alpha(t;\tau,v)$, которая при $\alpha = 0$ определена как производная справа;*
3. *функция $z(t) = \frac{d}{d\alpha} x_\alpha(t;\tau,v)\big|_{\alpha=0} = \lim\limits_{\alpha\to 0+0} \frac{x_\alpha(t;\tau,v) - \hat{x}(t)}{\alpha}$ на интервале $[\tau, \tau+\theta_2)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\dot{z}(t) = \begin{cases} \hat{\varphi}_x(t) z(t), & t \in [\tau, \tau+\theta_1] \\ \hat{\varphi}_x(t) z(t) + \hat{\varphi}_y(t) z(t-\theta_1), & t \in [\tau+\theta_1, t_1] \end{cases} \tag{10}$$

[1] Так мы обозначили стремление α к нулю справа.

с начальным условием

$$z(\tau) = \hat{\varphi}_u^v(\tau) - \hat{\varphi}(\tau), \tag{11}$$

а на отрезке $[\tau+\theta_2, t_1]$[2] *удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, но с начальным условием*

$$z(\tau+\theta_2) = \hat{\varphi}_w^v(\tau+\theta_2) - \hat{\varphi}(\tau+\theta_2) + \tilde{z}(\tau+\theta_2), \tag{12}$$

где $\tilde{z}(\tau+\theta_2)$ *— значение решения системы дифференциальных уравнений (10) с начальным условием (11) в точке* $t = \tau+\theta_2$*, продолженное по непрерывности.*

Доказательство. Доказательство леммы будем проводить по частям. Сначала докажем для случая, когда функция $\hat{u}(t)$ непрерывна. Тогда из (2) и в силу условий, наложенных на функцию φ, получаем, что траектория $\hat{x}(\cdot)$ непрерывно дифференцируема на $[t_0, t_1]$. Рассмотрим дифференциальные уравнения

$$\dot{x} = \varphi(t, x, y, u_\alpha(t), u_\alpha(t-\theta_2)), \tag{13}$$

$$\dot{x} = \varphi(t, x, y, \hat{u}(t), \hat{u}(t-\theta_2)). \tag{14}$$

Согласно (9) правые части этих уравнений совпадают, при $t < \tau - \alpha$, а так как $x_\alpha(t) = \hat{x}(t) = x_0(t)$, при $t \in [t_0-\theta_1, t_0]$, то по теореме существования и единственности решения для уравнения с запаздыванием (см. [7], с. 31–33), для $t < \tau-\alpha$, $x_\alpha(t) \equiv \hat{x}(t)$ и по непрерывности решения:

$$\xi_1(\alpha) = x_\alpha(\tau-\alpha) = \hat{x}(\tau-\alpha). \tag{15}$$

В частности, $\xi_1(\alpha)$ непрерывно-дифференцируема по α, как композиция непрерывно-дифференцируемых функций, и

$$\xi_1(0) = \hat{x}(\tau), \quad \xi_1'(0) = -\dot{\hat{x}}(\tau) = -\hat{\varphi}(\tau). \tag{16}$$

Обозначим $\nu_1(t, s, \xi_1)$ решение следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), \hat{x}(t-\theta_1), v, \hat{u}(t-\theta_2)), \\ &x(s) = \xi_1. \end{aligned} \tag{17}$$

[2]Если $\tau+\theta_2 > t_1$, то этого случая не будет.

Можно считать $\alpha > 0$ настолько малым, что $\tau - \alpha > \tau - \theta_i$, $i = 1, 2$. Тогда, для $t \in [\tau - \alpha, \tau]$, дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), x(t - \theta_1), v, u_\alpha(t - \theta_2)),$$
$$x(t) = \hat{x}(t),\ t \in [\tau - \alpha - \theta_1, \tau - \alpha].$$

эквивалентно обыкновенному дифференциальному уравнению (17).

В соответствии с локальной теоремой существования и единственности (см. [1], с. 169–173) можно подобрать такие $\varepsilon_1 > 0$ и $\delta_1 > 0$, что $\nu_1(t, s, \xi_1)$ определена при

$$|t - \tau| < \delta_1,\ |s - \tau| < \delta_1,\ |\xi_1 - \hat{x}(\tau)| < \varepsilon_1,$$

а в силу теоремы о дифференциальной зависимости решений от начальных данных (см. [1], с. 185–188) функция ν_1 является непрерывно-дифференцируемой по совокупности переменных.

Согласно (9) и (15), для определения $x_\alpha(t)$ на отрезке $[\tau - \alpha, \tau]$ мы должны в (17) положить $\xi_1 = \xi_1(\alpha) = \hat{x}(\tau - \alpha)$ и $s = \tau - \alpha$. Если $\alpha_1 < \delta_1$ выбрано так, что $|\xi_1(\alpha) - \hat{x}(\tau)| < \varepsilon_1$, то, при $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$, имеем

$$x_\alpha(t) = \nu_1(t, \tau - \alpha, \xi_1(\alpha)),\ \tau - \alpha \leqslant t \leqslant \tau.$$

В частности функция

$$\xi_2(\alpha) = x_\alpha(\tau) = \nu_1(\tau, \tau - \alpha, \xi_1(\alpha)),$$

будучи суперпозицией непрерывно-дифференцируемых функций, сама является непрерывно-дифференцируемой по α и, кроме того, выполнены соотношения:

$$\xi_2(0) = \hat{x}(\tau), \quad \xi_2'(0) = \hat{\varphi}_u^v(\tau) - \hat{\varphi}(\tau).$$

Далее, функция ν_1 непрерывна в точке $(\tau, \tau, \hat{x}(\tau))$, причем $\nu_1(\tau, \tau, \hat{x}(\tau)) = \hat{x}(\tau)$, а функция $\hat{x}(\cdot)$ непрерывна в точке τ. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при

$$|t - \tau| < \delta, \quad |s - \tau| < \delta, \quad |\xi_1 - \hat{x}(\tau)| < \delta$$

выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |\nu_1(t,s,\xi_1) - \hat{x}(\tau)| &< \varepsilon/2, \\ |\hat{x}(t) - \hat{x}(\tau)| &< \varepsilon/2. \end{aligned} \tag{18}$$

Возьмем положительное $\alpha_1 \leqslant \delta$ столь малым, чтобы при $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$ выполнялось неравенство $|\xi_1(\alpha) - \hat{x}(\tau)| < \delta$. Тогда для любого $t \in [\tau - \alpha, \tau]$, $s = \tau - \alpha$ и $\xi_1 = \xi_1(\alpha)$ будет иметь место неравенство

$$|\nu_1(t, \tau - \alpha, \xi_1(\alpha)) - \hat{x}(\tau)| < \varepsilon/2.$$

Учитывая, что $x_\alpha(t) = \nu_1(t, \tau - \alpha, \xi_1(\alpha))$, для $\tau - \alpha \leqslant t \leqslant \tau$, получаем

$$\begin{aligned} |x_\alpha(t) - \hat{x}(t)| = |\nu_1(t, \tau - \alpha, \xi_1(\alpha)) - \hat{x}(t)| \leqslant \\ \leqslant |\nu_1(t, \tau - \alpha, \xi_1(\alpha)) - \hat{x}(\tau)| + |\hat{x}(\tau) - \hat{x}(t)| < \\ < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,\ \tau - \alpha \leqslant t \leqslant \tau. \end{aligned}$$

Поскольку $x_\alpha(t) \equiv \hat{x}(t)$, при $t_0 \leqslant t \leqslant \tau - \alpha$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\alpha_1 \geqslant 0$, что для любого $\alpha,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$, имеем

$$|x_\alpha(t) - \hat{x}(t)| < \varepsilon,\ t_0 \leqslant t \leqslant \tau. \tag{19}$$

Итак, для $t \in [t_0, \tau]$ мы получили

$$x_\alpha(t) = \begin{cases} \hat{x}(t), & t \in [t_0, \tau - \alpha] \\ \nu_1(t, \tau - \alpha, \hat{x}(\tau - \alpha)), & t \in [\tau - \alpha, \tau] \end{cases} \tag{20}$$

Теперь рассмотрим отрезок $[\tau, \tau + \theta_2 - \alpha]$. Без ограничения общности можно считать, что $\theta_1 \geqslant \theta_2$, тогда из $\tau \leqslant t \leqslant \tau + \theta_2 - \alpha$ следует, что $\tau - \theta_2 \leqslant t - \theta_2 \leqslant \tau - \alpha$, откуда по (9) $u_\alpha(t - \theta_2) = \hat{u}(t - \theta_2)$, и $\tau - \theta_1 \leqslant t - \theta_1 \leqslant \tau - \alpha$, откуда по (20) $x_\alpha(t - \theta_1) = \hat{x}(t - \theta_1)$. Поэтому, для $t \in [\tau, \tau + \theta_2 - \alpha]$, уравнение (13) с учетом (9) примет вид:

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), \hat{x}(t - \theta_1), \hat{u}(t), \hat{u}(t - \theta_2)). \tag{21}$$

Обозначим через $\nu_2(t, \xi_2)$ решение этого уравнения с начальным условием $x(\tau) = \xi_2$. По теореме о дифференциальной зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от начальных данных (см. [1], с. 185–188) получим, что существует $\varepsilon_2 > 0$ такое, что функция $\nu_2(t,\xi_2)$ определена при $|\xi_2-\hat{x}(\tau)|<\varepsilon_2$, $\tau\leqslant t\leqslant\tau+\theta_2$ и является непрерывно дифференцируемой по совокупности аргументов. Тогда, для определения $x_\alpha(t)$ на отрезке $[\tau,\tau+\theta_2-\alpha]$, положим $\xi_2=\xi_2(\alpha)$. Если α_2 выбрано так, что при $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_2$ выполняется неравенство $|\xi_2(\alpha)-\hat{x}(\tau)|<\varepsilon_2$, то при тех же значениях α имеем:

$$x_\alpha(t)=\nu_2(t,\xi_2(\alpha)),\ t\in[\tau,\tau+\theta_2-\alpha].$$

В частности эта функция, как суперпозиция непрерывно-дифференцируемых функций, сама является непрерывно-дифференцируемой по (t,α) при $\tau\leqslant t\leqslant\tau+\theta_2$ и $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_2$. Итак, при $\tau\leqslant t\leqslant\tau+\theta_2-\alpha$ и $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_2$, существует и непрерывна по (t,α) производная $\frac{d}{d\alpha}x_\alpha(t;\tau,v)$. Обозначим $M=\max_{t\in[\tau,\tau+\theta_2]}z(t)$, где $z(t)=\frac{d}{d\alpha}x_\alpha(t;\tau,v)\big|_{\alpha=0}=\lim\limits_{\alpha\to0+0}\frac{x_\alpha(t)-\hat{x}(t)}{\alpha}$, тогда, для $\tau\leqslant t\leqslant\tau+\theta_2-\alpha$ и $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_2$, имеем:

$$|x_\alpha(t)-\hat{x}(t)|\leqslant\alpha M\leqslant\alpha_2M.$$

Возьмем положительное α_2 настолько маленьким, что $\alpha_2M<\varepsilon$, тогда

$$|x_\alpha(t)-\hat{x}(t)|<\varepsilon,\ \tau\leqslant t\leqslant\tau+\theta_2-\alpha. \tag{22}$$

Перейдем от уравнения (21), с начальным условием $\xi_2=\xi_2(\alpha)$, к эквивалентному интегральному уравнению:

$$x_\alpha(t)=\xi_2(\alpha)+\int\limits_\tau^t\varphi(\sigma,x_\alpha(\sigma),\hat{x}(\sigma-\theta_1),\hat{u}(\sigma),\hat{u}(\sigma-\theta_2))d\sigma. \tag{23}$$

Дифференцируя это уравнение по α и полагая $\alpha=0$, находим, что на интервале $[\tau,\tau+\theta_2)$ функция $z(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{z}(t)=\hat{\varphi}_x(t)z(t) \tag{24}$$

и начальному условию

$$z(\tau)=\hat{\varphi}_u^v(\tau)-\hat{\varphi}(\tau). \tag{25}$$

Положим

$$\xi_3(\alpha)=x_\alpha(\tau+\theta_2-\alpha)=\nu_2(\tau+\theta_2-\alpha,\xi_2(\alpha)),$$

тогда функция $\xi_3(\alpha)$ непрерывно дифференцируема по α и, в силу того, что $\xi_2(0) = \hat{x}(\tau)$, имеем:

$$\xi_3(0) = \hat{x}(\tau + \theta_2), \quad \xi_3'(0) = -\hat{\varphi}(\tau + \theta_2) + \tilde{z}(\tau + \theta_2),$$

где $\tilde{z}(\tau + \theta_2)$ значение решения уравнения (24) с начальным условием (25) в точке $\tau + \theta_2$, продолженное по непрерывности.

Переходя к отрезку $[\tau + \theta_2 - \alpha, \tau + \theta_2]$ и учитывая, что $\theta_1 \geqslant \theta_2$ и α мало, получим, что уравнение (13) с учетом (9) примет вид:

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), \hat{x}(t - \theta_1), \hat{u}(t), v).$$

Обозначим через $\nu_3(t, s, \xi_3)$ решение следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), \hat{x}(t - \theta_1), \hat{u}(t), v), \\ &x(s) = \xi_3. \end{aligned} \tag{26}$$

Опять, в соответствии с локальной теоремой существования и единственности можно подобрать такие $\varepsilon_3 > 0$ и $\delta_3 > 0$, что $\nu_3(t, s, \xi_3)$ определена при

$$|t - (\tau + \theta_2)| < \delta_3, \ |s - (\tau + \theta_2)| < \delta_1, \ |\xi_3 - \hat{x}(\tau + \theta_2)| < \varepsilon_3,$$

а в силу теоремы о дифференциальной зависимости решений от начальных данных функция ν_3 является непрерывно дифференцированной по совокупности переменных.

Положим $\xi_3 = \xi_3(\alpha) = \hat{x}(\tau + \theta_2 - \alpha)$ и $s = \tau + \theta_2 - \alpha$. Если $\alpha_3 < \delta_3$ выбрано так, что $|\xi_3(\alpha) - \hat{x}(\tau + \theta_2)| < \varepsilon_3$, то, при $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_3$, имеем

$$x_\alpha(t) = \nu_3(t, \tau + \theta_2 - \alpha, \xi_3(\alpha)), \ \tau + \theta_2 - \alpha \leqslant t \leqslant \tau + \theta_2.$$

В частности функция $x_\alpha(t)$, как суперпозиция непрерывно дифференцируемых функций, сама является непрерывно дифференцируемой по (t, α) при $\tau + \theta_2 - \alpha \leqslant t \leqslant \tau + \theta_2$ $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_3$.

Так как функция ν_3 непрерывна в точке $(\tau + \theta_2, \tau + \theta_2, \hat{x}(\tau + \theta_2))$, причем $\nu_3(\tau + \theta_2, \tau + \theta_2, \hat{x}(\tau + \theta_2)) = \hat{x}(\tau + \theta_2)$, а функция $\hat{x}(\cdot)$ непрерывна в точке $\tau + \theta_2$, то, поступая по аналогии с вышеизложенным, убеждаемся, что для достаточно малого α_3, при $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_3$, выполнено неравенство:

$$|x_\alpha(t) - \hat{x}(t)| = |\nu_3(t, \tau + \theta_2 - \alpha, \xi_3(\alpha)) - \hat{x}(t)| \leqslant$$
$$\leqslant |\nu_3(t, \tau + \theta_2 - \alpha, \xi_3(\alpha)) - \hat{x}(\tau + \theta_2)| + |\hat{x}(\tau + \theta_2) - \hat{x}(t)| <$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \ \tau + \theta_2 - \alpha \leqslant t \leqslant \tau + \theta_2.$$

Поскольку, для $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$ выполняется неравенство (19), а для $\tau \leqslant t \leqslant \tau + \theta_2 - \alpha$ выполняется неравенство (22), то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\alpha_0 \geqslant 0$ $(\alpha_0 = \min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3))$, что для любого α, $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0$, имеем

$$|x_\alpha(t) - \hat{x}(t)| < \varepsilon, \ t_0 \leqslant t \leqslant \tau + \theta_2. \tag{27}$$

Перейдем от уравнения (26), с начальным условием $\xi_3 = \xi_3(\alpha)$, к эквивалентному интегральному уравнению:

$$x_\alpha(t) = \xi_3(\alpha) + \int\limits_{\tau+\theta_2-\alpha}^{t} \varphi(\sigma, x_\alpha(\sigma), \hat{x}(\sigma - \theta_1), \hat{u}(\sigma), v) d\sigma. \tag{28}$$

Дифференцируя это уравнение по α и полагая $\alpha = 0$, находим

$$z(\tau + \theta_2) = \xi_3'(0) + \hat{\varphi}_w^v(\tau + \theta_2) = \hat{\varphi}_w^v(\tau + \theta_2) - \hat{\varphi}(\tau + \theta_2) + \tilde{z}(\tau + \theta_2),$$

где $\tilde{z}(\tau + \theta_2)$ определено выше. Положим

$$\eta(\alpha) = x_\alpha(\tau + \theta_2) = \nu_3(\tau + \theta_2, \tau + \theta_2 - \alpha, \xi_3(\alpha)), \tag{29}$$

Эта функция, будучи суперпозицией непрерывно-дифференцируемых функций, сама непрерывно дифференцируема по α, и выполнены соотношения:

$$\eta(0) = \hat{x}(\tau + \theta_2), \quad \eta'(0) = \hat{\varphi}_w^v(\tau + \theta_2) - \hat{\varphi}(\tau + \theta_2) + \tilde{z}(\tau + \theta_2). \tag{30}$$

Итак, для $t \in [t_0, \tau + \theta_2]$ мы получили

$$x_\alpha(t) = \begin{cases} \hat{x}(t), & t \in [t_0, \tau - \alpha] \\ \nu_1(t, \tau - \alpha, \hat{x}(\tau - \alpha)), & t \in [\tau - \alpha, \tau] \\ \nu_2(t, x_\alpha(\tau)), & t \in [\tau, \tau + \theta_2 - \alpha] \\ \nu_3(t, \tau + \theta_2 - \alpha, x_\alpha(\tau + \theta_2 - \alpha)), & t \in [\tau + \theta_2 - \alpha, \tau + \theta_2] \end{cases} \tag{31}$$

Осталось определить $x_\alpha(t)$, для $t \in [\tau+\theta_2, t_1]$[3]. Для этой цели разобьем отрезок $[\tau+\theta_2, t_1]$ на подотрезки

$$[\tau+\theta_2, \tau+\theta_2+\theta_1], \ldots, [\tau+\theta_2+(k-1)\theta_1, \tau+\theta_2+k\theta_1], [\tau+\theta_2+k\theta_1, t_1],$$

где k определяется из условия $k = \max\bigl\{\tilde{k} \in \mathbb{N}\cup\{0\} \mid \tau+\theta_2+\tilde{k}\theta_1 \leqslant t_1\bigr\}$. Далее на каждом отрезке $[\tau+\theta_2+i\theta_1, \tau+\theta_2+(i+1)\theta_1]$, $i = 0, \ldots, k$[4], рассмотрим соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), x_\alpha(t-\theta_1), \hat{u}(t), \hat{u}(t-\theta_2)) \tag{32}$$

с начальным условием

$$x(\tau+\theta_2+i\theta_1) = x_\alpha(\tau+\theta_2+i\theta_1). \tag{33}$$

Поясним это более подробно. Вместо того чтобы рассматривать дифференциальное уравнение с запаздыванием (13) на отрезке $[\tau+\theta_2, t_1]$ с начальным условием $x(t) = x_\alpha(t),\ t \in [\tau+\theta_2-\theta_1, \tau+\theta_2]$, где $x_\alpha(t)$ определяется из (31), мы разобьем отрезок $[\tau+\theta_2, t_1]$ на подотрезки и на каждом этом подотрезке рассмотрим свое обыкновенное дифференциальное уравнение. При этом для определения $u_\alpha(t)$, мы воспользуемся формулой (9). Теперь поясним сам ход рассуждения, который еще называют *метод шагов*(см. [7], с. 17–25).

Для начала рассмотрим отрезок $[\tau+\theta_2, \tau+\theta_2+\theta_1]$ и заменим $x(t-\theta_1)$ в (13) на $x_\alpha(t-\theta_1)$ согласно (31), а $u_\alpha(t)$ раскроем по формуле (9). В результате мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение (32). Так как мы ищем непрерывное решение, то в качестве начального условия следует положить $x(\tau+\theta_2) = x_\alpha(\tau+\theta_2) = \eta(\alpha)$. Решение этого уравнения на отрезке $[\tau+\theta_2, \tau+\theta_2+\theta_1]$ обозначим через $X_0(t) = X_0(t, \eta(\alpha))$. Согласно (9), а также в силу теоремы единственности $x_\alpha(t)$ на отрезке $[\tau+\theta_2, \tau+\theta_2+\theta_1]$ совпадает с $X_0(t)$.

Далее рассмотрим отрезок $[\tau+\theta_2+\theta_1, \tau+\theta_2+2\theta_1]$ и заменим $x(t-\theta_1)$ в (13) на $x_\alpha(t-\theta_1) = X_0(t-\theta_1)$. В результате мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение (32). Так как мы ищем

[3]Предполагается, что t_1 достаточно велико, чтобы $t_1 > \tau+\theta_2$, так как иначе этого случая вообще не будет.

[4]При $i = k$ имеется ввиду отрезок $[\tau+\theta_2+k\theta_1, t_1]$.

непрерывное решение, то в качестве начального условия следует положить $x(\tau+\theta_2+\theta_1)=x_\alpha(\tau+\theta_2+\theta_1)=X_0(\tau+\theta_2+\theta_1)$. Решение этого уравнения на отрезке $[\tau+\theta_2+\theta_1,\tau+\theta_2+2\theta_1]$ обозначим через $X_1(t)=X_1(t,X_0(\tau+\theta_2+\theta_1))$. Опять в силу (9) и по теореме единственности $x_\alpha(t)$ на отрезке $[\tau+\theta_2+\theta_1,\tau+\theta_2+2\theta_1]$ совпадает с $X_1(t)$.

Аналогично, рассматривая все последующие подотрезки, получим, что на каждом отрезке $[\tau+\theta_2+i\theta_1,\tau+\theta_2+(i+1)\theta_1]$, $i=0,\ldots,k$, $x_\alpha(t)\equiv X_i(t)=X_i(t,X_{i-1}(\tau+\theta_2+i\theta_1))$, где $X_{-1}(\tau)=x_\alpha(\tau)=\eta(\alpha)$. Учитывая это, перепишем обыкновенное дифференциальное уравнение (32) с начальным условием (33) в эквивалентной интегральной форме

$$x_\alpha(t)=X_i(t)=X_{i-1}(\tau+\theta_2+i\theta_1)+ \\ +\int\limits_{\tau+\theta_2+i\theta_1}^{t}\varphi(\sigma,x_\alpha(\sigma),x_\alpha(\sigma-\theta_1),\hat{u}(\sigma),\hat{u}(\sigma-\theta_2))d\sigma.$$

Раскрывая $X_{i-1}(\tau+\theta_2+i\theta_1)$ по этой же формуле, вплоть до $i=0$, получим, что для $t\in[\tau+\theta_2,t_1]$

$$x_\alpha(t)=\eta(\alpha)+\int\limits_{\tau+\theta_2}^{t}\varphi(\sigma,x_\alpha(\sigma),x_\alpha(\sigma-\theta_1),\hat{u}(\sigma),\hat{u}(\sigma-\theta_2))d\sigma. \quad (34)$$

По теореме о дифференциальной зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от начальных данных (см. [1], с. 185–188) получаем, что существует такое $\tilde{\varepsilon}_i>0$, что функция $x_\alpha(t)\equiv X_i(t)=X_i(t,X_{i-1}(\tau+\theta_2+i\theta_1))$ определена при $|X_{i-1}(\tau+\theta_2+i\theta_1)-\hat{x}(\tau+\theta_2+i\theta_1)|<\tilde{\varepsilon}_i$, $\tau+\theta_2+i\theta_1\leqslant t\leqslant\tau+\theta_2+(i+1)\theta_1$ и является непрерывно-дифференцированной и так для каждого $i=0,\ldots,k$. Следовательно, функция $x_\alpha(t)$ определена на отрезке $[\tau+\theta_2,t_1]$ по формуле (34) и, как суперпозиция непрерывно-дифференцированных функций, сама является непрерывно-дифференцированной по (t,α) при $\tau+\theta_2\leqslant t\leqslant t_1$ и $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_4$, где α_4 выбрано так, чтобы при $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_4$ выполнялись все неравенства $|X_{i-1}(\tau+\theta_2+i\theta_1)-\hat{x}(\tau+\theta_2+i\theta_1)|<\tilde{\varepsilon}_i$, $i=0,\ldots,k$. Значит при $\tau+\theta_2\leqslant t\leqslant t_1$, $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_4$, существует и непрерывна по α производная $\frac{d}{d\alpha}x_\alpha(t;\tau,v)$. Полагая $\tilde\alpha = \min(\alpha_0,\alpha_4)$, мы видим, что верно второе утверждение леммы.

Дифференцируя уравнение (34) по α и полагая $\alpha = 0$, находим

$$z(t) = \eta'(0) + \int\limits_{\tau+\theta_2}^{t} \Big[\hat\varphi_x(\sigma)z(\sigma) + \hat\varphi_y(\sigma)\Big]d\sigma.$$

Легко видеть, что это интегральное уравнение эквивалентно уравнению (10) с начальным условием $z(\tau+\theta_2) = \eta'(0)$, совпадающим с (12) ввиду (30). Таким образом, верно третье утверждение леммы. Осталось доказать первое утверждение. Выше мы уже показали, что оно выполнено на отрезке $[t_0,\tau+\theta_2]$, это легко видеть из неравенства (22). Осталось показать, что оно выполнено и на отрезке $[t_0,t_1]$. Обозначим $M = \max_{t\in[\tau+\theta_2,t_1]} z(t)$, где $z(t) = \lim\limits_{\alpha\to0+0}\frac{x_\alpha(t)-\hat x(t)}{\alpha}$, тогда, для $\tau+\theta_2 \leqslant t \leqslant t_1$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant \tilde\alpha$, имеем:

$$|x_\alpha(t) - \hat x(t)| \leqslant \alpha M \leqslant \tilde\alpha M.$$

Возьмем положительное $\tilde\alpha$ настолько маленьким, что $\tilde\alpha M < \varepsilon$, тогда

$$|x_\alpha(t) - \hat x(t)| < \varepsilon,\ \ \tau+\theta_2 \leqslant t \leqslant t_1. \tag{35}$$

Объединяя (22) с (35), получим, что $x_\alpha(t)$ равномерно на $[t_0,t_1]$ сходится к $\hat x(t)$, при $0 \leqslant \alpha \leqslant \tilde\alpha$.

Итак, мы получили все утверждения леммы для непрерывного управления $\hat u(\cdot)$. Осталось рассмотреть случай, когда управление $\hat u(\cdot)$ является кусочно-непрерывной функцией. Для этого поступим следующим образом. Для простоты пусть точек разрыва будет две, скажем, α_1 и α_2. Также предположим, что точка τ, в которой $\hat u(\cdot)$ должно быть непрерывным, расположена между ними: $t_0 < \alpha_1 < \tau < \alpha_2 < t_1$. На отрезке $[t_0,\alpha_1]$ дифференциальные уравнения (13) и (14), в которых при $t = \alpha_1$ нужно считать управление равным его предельному значению $\hat u(\alpha_1 - 0) = \lim\limits_{t\to\alpha_1-0}\hat u(t)$, совпадают и по теореме единственности $x_\alpha(t) \equiv \hat x(t)$, при $t \in [t_0,\alpha_1]$.

Теперь перейдем к отрезку $[\alpha_1,\alpha_2]$, снова полагая на его границах управление равным предельным значениям $\hat u(\alpha_1+0)$ при $t = \alpha_1$

и $\hat{u}(\alpha_2 - 0)$ при $t = \alpha_2$. Здесь мы решаем дифференциальные уравнения (13) и (14) с начальным условием $x(t) = \hat{x}(t),\ t \in [\alpha_1 - \theta_1, \alpha_1]$. Относительно точки $\tau + \theta_2$ возможны три ситуации:

1) $\tau + \theta_2 \in (\alpha_1, \alpha_2)$
2) $\tau + \theta_2 = \alpha_2$
3) $\tau + \theta_2 > \alpha_2$

Разбирая по отдельности эти ситуации, убеждаемся, что в каждой из них верны все утверждения леммы. Итак, лемма полностью доказана и для общего случая, когда управление $\hat{u}(\cdot)$ является кусочно-непрерывной функцией.

3.2. Лемма о приращении функционала

Положим $\chi(\alpha) = \mathcal{F}(x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot))$ и докажем, что эта функция дифференцируема справа в точке $\alpha = 0$. Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{d}{dt}p(t) = \begin{cases} \hat{f}_x(t) - p(t)\hat{\varphi}_x(t) + \hat{f}_y(t+\theta_1) - p(t+\theta_1)\hat{\varphi}_y(t+\theta_1), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t \in [t_0, t_1 - \theta_1] \\ \hat{f}_x(t) - p(t)\hat{\varphi}_x(t), \qquad\qquad\qquad t \in [t_1 - \theta_1, t_1] \end{cases} \tag{36}$$
$$p(t_1) = 0$$

Лемма 2 (О приращении функционала). *Пусть выполняются все условия, которые мы сделали выше, и пусть $p(\cdot)$ — решение системы (36), тогда*

$$\chi'(0+0) = \frac{d}{d\alpha}\mathcal{F}(x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot))\Big|_{\alpha=0+0} = a(\tau, v),$$

где

$$a(\tau, v) = \begin{cases} \hat{f}_u^v(\tau) - \hat{f}(\tau) + \hat{f}_w^v(\tau+\theta_2) - \hat{f}(\tau+\theta_2) - p(\tau)[\hat{\varphi}_u^v(\tau) - \\ - \hat{\varphi}(\tau)] - p(\tau+\theta_2)[\hat{\varphi}_w^v(\tau+\theta_2) - \hat{\varphi}(\tau+\theta_2)], \quad \tau + \theta_2 \leqslant t_1 \\ \hat{f}_u^v(\tau) - \hat{f}(\tau) - p(\tau)[\hat{\varphi}_u^v(\tau) - \hat{\varphi}(\tau)], \qquad \tau + \theta_2 > t_1 \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $\theta_1 \geqslant \theta_2$. Случай $\theta_1 \leqslant \theta_2$ рассматриваются аналогично. Без ограничения общности можно считать, что t_1 достаточно велико, чтобы $t_1 - \theta_i > \tau,\ i = 1, 2$. Воспользовавшись соотношением (9) имеем:

$$\chi(\alpha) - \chi(0) = \int\limits_{\tau-\alpha}^{\tau} \Big[f(t, x_\alpha(t), x_\alpha(t-\theta_1), v, \hat{u}(t-\theta_2)) - \hat{f}(t)\Big] dt +$$
$$+ \int\limits_{\tau}^{\tau+\theta_2-\alpha} \Big[f(t, x_\alpha(t), x_\alpha(t-\theta_1), \hat{u}(t), \hat{u}(t-\theta_2)) - \hat{f}(t)\Big] dt +$$
$$+ \int\limits_{\tau+\theta_2-\alpha}^{\tau+\theta_2} \Big[f(t, x_\alpha(t), x_\alpha(t-\theta_1), \hat{u}(t), v) - \hat{f}(t)\Big] dt +$$
$$+ \int\limits_{\tau+\theta_2}^{t_1} \Big[f(t, x_\alpha(t), x_\alpha(t-\theta_1), \hat{u}(t), \hat{u}(t-\theta_2)) - \hat{f}(t)\Big] dt,$$

Поскольку по лемме о свойствах элементарной вариации $x_\alpha(t)$ непрерывно-дифференцируема по α, то, переходя к пределу при $\alpha \to 0+0$, воспользуемся теоремой о среднем и применим обычное правило дифференцирования под знаком интеграла:

$$\chi'(0+0) = \hat{f}_u^v(\tau) - \hat{f}(\tau) + \hat{f}_w^v(\tau+\theta_2) - \hat{f}(\tau+\theta_2) +$$
$$+ \int\limits_{\tau}^{\tau+\theta_1} \hat{f}_x(t) z(t) dt + \int\limits_{\tau+\theta_1}^{t_1} \Big[\hat{f}_x(t) z(t) + \hat{f}_y(t) z(t-\theta_1)\Big] dt, \quad (37)$$

Далее, $p(\cdot)$ удовлетворяет системе (36), а $z(\cdot)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (10) с начальным условием (11), поэтому на интервале $\tau \leqslant t \leqslant \tau + \theta_1$

$$\frac{d}{dt} p(t) z(t) = \Big(\hat{f}_x(t) + \hat{f}_y(t+\theta_1) - p(t+\theta_1)\hat{\varphi}_y(t+\theta_1)\Big) z(t);$$

на интервале $\tau + \theta_1 \leqslant t \leqslant t_1 - \theta_1$

$$\frac{d}{dt} p(t) z(t) = \Big(\hat{f}_x(t) + \hat{f}_y(t+\theta_1) - p(t+\theta_1)\hat{\varphi}_y(t+\theta_1)\Big) z(t) +$$
$$+ p(t)\hat{\varphi}_y(t) z(t-\theta_1);$$

на интервале $t_1 - \theta_1 \leqslant t \leqslant t_1$

$$\frac{d}{dt}p(t)z(t) = \hat{f}_x(t)z(t) + p(t)\hat{\varphi}_y(t)z(t-\theta_1);$$

Учитывая это, последние два интеграла в формуле (37) можно переписать следующим образом

$$\int\limits_{\tau}^{\tau+\theta_1} \hat{f}_x(t)z(t)dt + \int\limits_{\tau+\theta_1}^{t_1} \Big[\hat{f}_x(t)z(t) + \hat{f}_y(t)z(t-\theta_1)\Big]dt = \int\limits_{\tau}^{t_1} \frac{d}{dt}p(t)z(t)dt.$$

Раскрывая этот интеграл и беря во внимание краевое условие $p(t_1) = 0$ и условия (11), (12) для $z(\cdot)$, имеем

$$\begin{aligned}\chi'(0+0) = \hat{f}_u^v(\tau) - \hat{f}(\tau) + \hat{f}_w^v(\tau+\theta_2) - \hat{f}(\tau+\theta_2) - \\ - p(\tau)[\hat{\varphi}_u^v(\tau) - \hat{\varphi}(\tau)] - p(\tau+\theta_2)[\hat{\varphi}_w^v(\tau+\theta_2) - \hat{\varphi}(\tau+\theta_2)].\end{aligned}$$

Итак, лемма о приращении функционала полностью доказана.

3.3. Доказательства принципа максимума Понтрягина в задаче с запаздыванием

3.3.1. Сведение к конечномерной задаче

По определению график оптимальной фазовой траектории лежит в G. В силу первого утверждения леммы о свойствах элементарной вариации из п. 1 график $x_\alpha(\cdot)$ при достаточно малом $\alpha \geqslant 0$ также лежит в G. Поэтому пара $(x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot))$ является допустимым процессом для задачи (1), (2), (3), (4). Значит, если $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ — оптимальный процесс, то при малых $\alpha \geqslant 0$

$$\chi(\alpha) = \mathcal{F}(x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot)) \geqslant \mathcal{F}(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)) = \chi(0).$$

Следовательно $\alpha = 0$ является локальным решением вспомогательной задачи:

$$\chi(\alpha) = \mathcal{F}(x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot)) \to \inf \\ \alpha \geqslant 0$$

Применим к этой задаче правило множителей Лагранжа (см. [1], с. 227):

Лемма 3. (Правило множителей Лагранжа для вспомогательной задачи). *Пусть выполняются все условия, которые мы сделали выше. Тогда существуют такие множители Лагранжа* $\hat{\lambda}_0$, $\hat{\lambda} \leqslant 0$, *что*

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(\hat{\lambda}_0 \chi(\alpha) + \hat{\lambda}\alpha)\Big|_{\alpha=0+0} = 0$$

Поскольку $\hat{\lambda} \leqslant 0$, то это условие можно переписать в виде $\hat{\lambda}_0 \chi'(0+0) \geqslant 0$. Применив лемму п. 2 получим: $\hat{\lambda}_0 a(\tau, v) \geqslant 0$. Теперь положим $\hat{p}(\cdot) = \hat{\lambda}_0 p(\cdot)$, тогда последнее неравенство можно записать в виде:

$$\hat{p}(\tau)\hat{\varphi}_u^v(\tau) - \hat{f}_u^v(\tau) + \hat{p}(\tau+\theta_2)\hat{\varphi}_w^v(\tau+\theta_2) - \hat{f}_w^v(\tau+\theta_2) \leqslant$$
$$\leqslant \hat{p}(\tau)\hat{\varphi}(\tau) - \hat{f}(\tau) + \hat{p}(\tau+\theta_2)\hat{\varphi}(\tau+\theta_2) - \hat{f}(\tau+\theta_2),$$

при $\tau \in [t_0, t_1 - \theta_1]$

$$\hat{p}(\tau)\hat{\varphi}_u^v(\tau) - \hat{f}_u^v(\tau) \leqslant \hat{p}(\tau)\hat{\varphi}(\tau) - \hat{f}(\tau),$$

при $\tau \in [t_1 - \theta_1, t_1]$

Так как $\tau \in T_0$ и $v \in U$ были произвольны. Следовательно мы доказали, что для любого $\tau \in T_0$, и для любого $v \in U$ выполнено (7), в силу (5). И наконец положим $\hat{\mu} = \hat{p}(t_0)$. Таким образом, теорема полностью доказана.

4. Принцип максимума с бесконечным интервалом времени

По многим причинам предположение о том, что интервал времени бесконечен, более удобно. Действительно, многие процессы в целом не имеют естественной остановки в обозримом будущем, примером может служить процесс накопления капитала в экономике. Хотя мир и не может существовать вечно, но как и всегда в математических моделях, приближенно описывающих реальный мир, часто оказывается более удобным и наглядным перейти к пределу так, чтобы в модели появилась математическая бесконечность, соответствующая бесконечности по времени реального мира.

Формально единственное изменение в описании модели состоит в том, что надо положить $t_1 = +\infty$. Однако переход к пределу, как всегда, влечет за собой некоторый риск. Функционал (1) теперь является несобственным интегралом, который может, вообще говоря, расходиться. Чтобы этого избежать, потребуем ограниченности функций f и g, их производных по переменным x^i, y^j $(i, j = 1, \ldots, n)$ и ограниченность фазовой переменной $x(\cdot)$, а также внесем под знак интеграла убывающую экспоненту с показателем $-\rho$:

$$\mathcal{F}(x(\cdot), u(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{+\infty} f(t, x(t), x(t-\theta_1), u(t), u(t-\theta_2))e^{-\rho t}dt \to \inf . \quad (38)$$

Тогда по признаку Дирихле (см.[2], с. 230) этот интеграл сходится. Далее для удобства будем придерживаться тех же предположений и обозначений, которые мы ввели ранее. Нетрудно проверить, что в дополнительных предположениях, как следствие теоремы 1, верна следующая теорема:

Теорема 2. *Если* $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ *— оптимальный допустимый процесс для задачи* (38), (2), (3), (4), *то существуют множители Лагранжа:* $\hat{\lambda}_0 \geqslant 0$, $\hat{\mu}$ *и кусочно непрерывно-дифференцируемая функция* $\hat{p}(\cdot)$, *не равные одновременно нулю и такие, что выполнено*

1. уравнение Эйлера:

$$\frac{d}{dt}\hat{p}(t) = -\hat{H}_x(t) - \hat{H}_y(t+\theta_1),$$

2. принцип максимума Понтрягина:

$$\max_v \left\{ H(t, \hat{x}, \hat{y}, v, \hat{w}) + H(t+\theta_2, \hat{x}, \hat{y}, \hat{u}, v) \right\} =$$
$$= H(t, \hat{x}, \hat{y}, \hat{u}, \hat{w}) + H(t+\theta_2, \hat{x}, \hat{y}, \hat{u}, \hat{w}),\ t \in [t_0, +\infty)$$

3. условие трансверсальности:

$$\hat{p}(t_0) = \hat{\mu},$$
$$\lim_{t\to+\infty} \hat{p}(t) = 0.$$

Доказательство этой теоремы строится по тому же принципу, что и доказательство теоремы 1. Сходимость интегралов мы уже обеспечили, чтобы обосновать дифференцирование под знаком интеграла, воспользуемся правилом Лейбница (см. [2], с. 422). Ход и идея доказательства остаются теме же.

Список литературы

[1] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. / 2-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

[2] Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. М.: Дрофа, 2003.

[3] Матвеев А. С. Задачи оптимального управления с запаздыванием общего вида и фазовыми ограничениями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. 52: 6. С. 1200–1229.

[4] Мышкис А. Д. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. / Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Р., 1949.

[5] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.

[6] Харатишвили Г. Л. Оптимальные процессы с запаздыванием. Т., 1966.

[7] Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М., 1971.

[8] Bakke V. L. Optimal fields of problems with delays // J. Optimiz. Theory Appl. 1981.

[9] Chyung D. H., Lee E. B. Linear optimal systems with time delays // SIAM J. Control. 1966.

[10] Guinn T. Reduction of delayed optimal control problems to nondelayed problems // J. Optimiz. Theory Appl. 1976.

[11] Halanay A. Optimal controls for systems with time lag // SIAM J. Control. 1968.

[12] Hestenes M. R. On variational theory and optimal control theory // SIAM J. Control. 1965.