О спектрах классов Поста булевских функций

Г. Н. Блохина, В. В. Кудрявцев

В работе изучаются длины базисов классов Поста булевских функций. Множество всех длин базисов такого класса называется его спектром. Основным результатом работы является нахождение всех спектров классов Поста.

Ключевые слова: булевская функция, спектр, базис, классы Поста.

Введение

В 1921 г. Э. Пост опубликовал работу [1], в которой описал множество всех замкнутых относительно суперпозиции классов булевских функций, называемых теперь классами Поста.

Он показал, что все эти классы конечно-порожденные и их счетное число. Им построена структура по включению, образованная этими классами. Работа Э. Поста долго была малоизвестной.

В 1966 г. появилась монография [2], в которой было переизложено доказательство этих результатов Э. Поста в более краткой форме. В ней были также вычислены порядки классов Поста, то есть найдены базисы этих классов, содержащие наименьшее число переменных.

Позже в [3] были найдены предикаты, зависящие от наименьшего числа переменных, классами сохранения которых являются предикатные классы Поста.

Здесь мы вводим еще одну характеристику классов Поста, называемую спектром. Спектром классов Поста является множество всех длин базисов этого класса. Нашей целью является описание спектров всех классов Э. Поста, которая здесь достигается. Мы показываем, что спектрами являются множества $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$ и только они.

1. Основные понятия и результаты

Пусть $E_2 = \{0,1\}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ и $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots\}$ — алфавит переменных u_n, принимающих значения из E_2, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через C_1 класс всех функций $f(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m})$, $m \in \mathbb{N}$, значения аргументов которых и самих функций из E_2. Эти функции называются булевскими, б. функциями или просто функциями. Далее для обозначения переменных будут иногда использоваться мета-символы x, y, z, возможно, с индексами.

В классе C_1 обычным образом вводятся операции переименования переменных и подстановки одних функций в другие вместо их переменных. Эти операции называются операциями суперпозиции. С их помощью строятся формулы из функций. Эти формулы реализуют функции, которые называют суперпозициями тех функций, из которых строятся формулы.

Если $M \subseteq C_1$, то через $[M]$ обозначим все суперпозиции, реализуемые формулами, построенными с помощью функций из M. Оператор $[M]$ является замыканием M и для него выполнено:

1) $[M] \supseteq M$;
2) если $M_1 \supseteq M_2$, то $[M_1] \supseteq [M_2]$;
3) $[[M]] = [M]$.

Говорим, что M замкнуто, если $[M] = M$.

Если M — замкнуто и $M_1 \subseteq M$, то при $[M_1] = M$ говорим, что M_1 — полно в M.

В случае, когда M_1 конечно, говорим, что M является конечно-порожденным. Полное в M множество M_1 называется базисом в M, если для любого M_2 такого, что $M_2 \subset M_1$ выполнено $[M_2] \neq M$, число элементов в M_1 называем длиной базиса M_1. Для обозначения мощности множества T используем далее символ $|T|$.

Для замкнутого M обозначим через $\Sigma(M)$ множество всех замкнутых классов M_1 таких, что $M_1 \subseteq M$.

Решетка, которую образует множество $\Sigma(M)$ с отношением включения между его элементами, обозначается через $\overline{\Sigma}(M)$ и представляется в виде графа.

Вершинами этого графа являются классы функций из $\Sigma(M)$, вложение которых друг в друга обозначается ребром, ориентированным от более широкого класса M к классу M', вложенному в него, если нет такого M'', что $M \subset M'' \subset M'$.

Граф располагают вертикально, когда указанная ориентация ребер идет сверху вниз и потому возможна замена стрелок в графе на дуги и отрезки.

К числа основных задач для M относится задача о строении графа $\overline{\Sigma}(M)$. Она оказалась связанной с задачей о полноте.

Задача о полноте для M состоит в описании всех решений уравнения $[X] = M$, $X \subseteq M$, относительно X.

Решение задачи о полноте в M получается с помощью понятия критериальной системы.

Подмножество $\theta(M) \subseteq \Sigma(M)$ называется критериальной системой для M (к. системой), если всякое множество $M_1 \subseteq M$ является полным точно тогда, когда для любого Q из $\theta(M)$ выполнено $M_1 \nsubseteq Q$. Примером к. системы является $\Sigma(M) \backslash M$, если $\Sigma(M) \backslash M \neq \varnothing$. Вместе с тем ясно, что если $\theta(M)$ — к. система и для некоторых ее элементов Q_1 и Q_2 выполнено $Q_1 \subseteq Q_2$, то $\theta(M) \backslash \{Q_1\}$ также к. система. Таким образом, при рассмотрении к. систем как инструмента для решения задачи о полноте естественно требовать, чтобы к. система была неизбыточной. Это может быть осуществлено с помощью понятия предполного класса (п. класса).

Назовем замкнутое множество Q из $\Sigma(M) \backslash M$ п. классом, если для любой функции f из $M \backslash Q$ выполнено $[Q \bigcup \{f\}] = M$. Нетрудно видеть, что каждый п. класс входт в любую к. систему $\theta(M)$. Обозначая через $\Sigma_\pi(M)$ класс всех п. классов, имеем $\theta(M) \supseteq \Sigma_\pi(M)$.

Может случиться, что для M множество $\Sigma_\pi(M)$ является к. системой, тогда задача о полноте в M становится эквивалентной указанию $\Sigma_\pi(M)$.

Опишем все классы Поста. Их множество исчерпывается списком C_i, A_i, D_j, L_k, O_l, S_r, P_r, F_s^μ, F_s^∞, где $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, 3, 4, 5$; $l = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; $r = 1, 3, 5, 6$; $s = 1, 2, \ldots$; $\mu = 2, 3, \ldots$

Класс C_1 содержит все б. функции; C_2 состоит из всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ таких, что $f(0, \ldots, 0) = 0$; C_3 — из всех функций таких, что $f(1, \ldots, 1) = 1$; $C_4 = C_2 \bigcap C_3$.

Классы C_1, C_2, C_3, C_4 образуют группу классов Поста типа C.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется монотонной, если для любых наборов $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\beta = (b_1, \ldots, b_n)$ таких, что $a_i \leqslant b_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, что обозначаем $\alpha \leqslant \beta$, выполнено $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$.

Класс A_1 состоит из всех монотонных функций, $A_2 = C_2 \bigcap A_1$; $A_3 = C_3 \bigcap A_1$; $A_4 = A_2 \bigcap A_3$.

Классы A_1, A_2, A_3, A_4 называем классами типа A.

Функция $f^*(x_1, \ldots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ называется двойственной к $f(x_1, \ldots, x_n)$. Если $f = f^*$, то f называем самодвойственной.

Класс M^*, состоящий из всех функций f^*, двойственным функциям f из M, называем двойственным к M.

Класс D_3 состоит из всех самодвойственных функций; $D_1 = D_3 \bigcap C_4$; $D_2 = D_3 \bigcap A_1$.

Классы D_1, D_2, D_3 называем классами типа D.

Класс L_1 состоит из всех линейных функций, то есть таких $f(x_1, \ldots, x_n)$, что $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i + d \ (mod 2)$. $L_2 = L_1 \bigcap C_2$; $L_3 = L_1 \bigcap C_3$; $L_4 = L_1 \bigcap C_4$; $L_5 = L_1 \bigcap D_3$.

Классы L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 называем классами типа L.

Класс O_9 состоит из функций, существенно зависящих не более, чем от одного переменного; $O_8 = O_9 \bigcap A_1$; $O_4 = O_9 \bigcap D_3$; $O_5 = O_9 \bigcap C_2$; $O_6 = O_9 \bigcap C_3$; $O_1 = O_5 \bigcap O_6$; $O_7 = \{0, 1\}$; $O_2 = O_5 \bigcap O_7$; $O_3 = O_6 \bigcap O_7$.

Класс S_6 состоит из всех функций вида $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$ и констант 0 и 1; $S_3 = S_6 \bigcap C_2$; $S_5 = S_6 \bigcap C_3$; $S_1 = S_5 \bigcap S_3$.

Классы S_1, S_3, S_5, S_6 называем классами типа S.

Класс P_6 состоит из всех функций вида $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ и констант 0 и 1; $P_5 = P_5 \bigcap C_2$; $P_3 = P_6 \bigcap C_3$; $P_1 = P_5 \bigcap P_3$.

Классы P_1, P_3, P_5, P_6 называем классами типа P.

Функция f удовлетворяет условию a^μ, если любые μ, $\mu \geqslant 2$, наборов, на которых f равна 0, имеют общую единичную координату, равную нулю.

Аналогично с заменой 0 на 1 вводится условие A^μ.

Класс F_4^μ состоит из всех функций со свойством a^μ; $F_1^\mu = C_4 \bigcap F_4^\mu$; $F_3^\mu = A_1 \bigcap F_4^\mu$; $F_2^\mu = F_1^\mu \bigcap F_3^\mu$. F_8^μ состоит из всех функций со свойством A^μ; $F_5^\mu = C_4 \bigcap F_8^\mu$; $F_7^\mu = A_3 \bigcap F_8^\mu$; $F_6^\mu = F_5^\mu \bigcap F_7^\mu$.

Функция удовлетворяет условию a^∞, если все наборы, на которых она равна нулю, имеют общую нулевую координату.

Аналогично с заменой 0 на 1 вводится свойство A^∞.

Класс F_4^∞ состоит из всех функций со свойством a^∞; $F_1^\infty = C_4 \bigcap F_4^\infty$; $F_3^\infty = A_1 \bigcap F_4^\infty$; $F_2^\infty = F_1^\infty \bigcap F_3^\infty$. F_8^∞ состоит из всех функций со свойством A^∞; $F_5^\infty = C_4 \bigcap F_8^\infty$; $F_7^\infty = A_3 \bigcap F_8^\infty$; $F_6^\infty = F_5^\infty \bigcap F_7^\infty$.

Множество перечисленных классов обозначим через Δ. Э. Постом установлено следующее утверждение [1].

Теорема 1. *Имеют место положения:*

а) $\Delta = \Sigma(C_1)$*;*

б) $\overline{\Sigma}(C_1)$ *имеет вид, как на рис. 1.*

Этот граф будем называть диаграммой Поста.

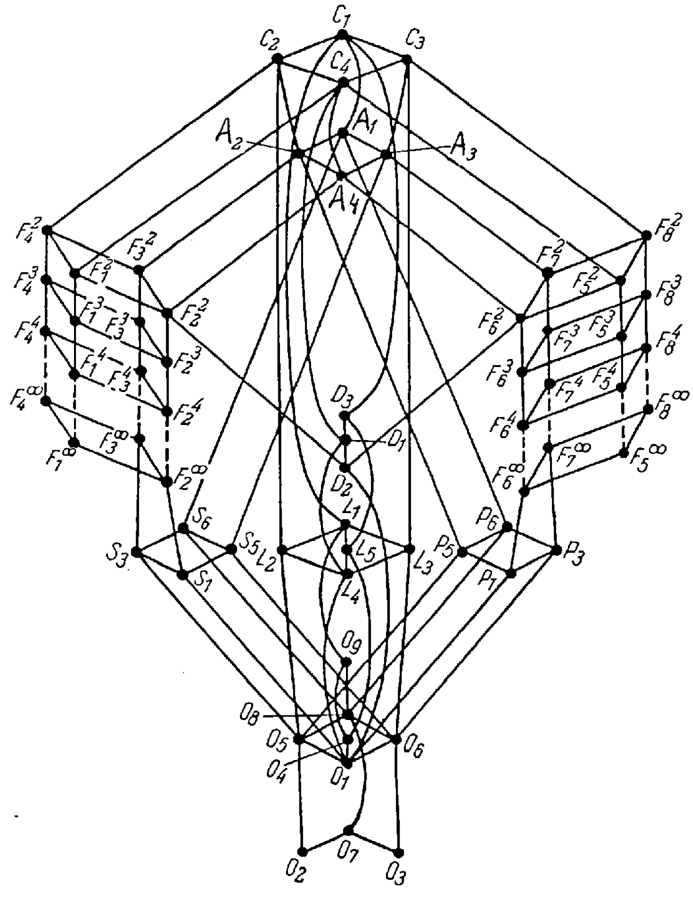

Рис. 1.

Из этой теоремы вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Имеют место следующие положения:*

а) для любого Q из $\Sigma(C_1)\backslash\{O_1, O_2, O_3\}$ $\Sigma_\pi(Q)$ является к. системой и $|\Sigma_\pi(Q)| \leqslant 5$;

б) каждый класс Q из $\Sigma(C_1)$ является конечно-порожденным, и для базиса $Б$ в Q выполнено $|Б| \leqslant 5$.

Обозначим через spQ множество всех длин базисов в Q и назовем его спектром. Нашей задачей является нахождение спектров всех классов Поста.

Справедливо следующее основное утверждение.

Теорема 3. *Для любого Q из $\Sigma(C_1)$ справедливы положения:*

а) $spQ = \{1\}$, если $Q \in \{D_2,\ L_4,\ F_1^\infty,\ F_5^\infty,\ F_6^\infty,\ F_2^\infty,\ P_1,\ S_1,\ O_1,\ O_2,\ O_3,\ O_4\ \} \bigcup (\bigcup\limits_{\mu>2}^{\infty}\{F_2^\mu\}) \bigcup (\bigcup\limits_{\mu>2}^{\infty}\{F_6^\mu\})$;

б) $spQ = \{2\}$, если $Q \in \{P_3,\ P_5,\ S_3,\ S_5,\ O_5,\ O_6,\ O_7,\ O_9,\ F_3^\infty, F_7^\infty\} \bigcup (\bigcup\limits_{\mu=2}^{\infty}\{F_3^\mu\}) \bigcup (\bigcup\limits_{\mu=2}^{\infty}\{F_7^\mu\})$;

в) $spQ = \{3\}$, если $Q \in \{P_6,\ S_6,\ O_3\}$;

г) $spQ = \{1,2\}$, если $Q \in \{C_4, D_1, D_3, L_3, L_2, L_5, F_2^2, F_6^2, F_4^\infty F_8^\infty\} \bigcup (\bigcup\limits_{\mu=2}^{\infty}\{F_1^\mu\}) \bigcup (\bigcup\limits_{\mu=2}^{\infty}\{F_4^\mu\}) \bigcup (\bigcup\limits_{\mu=2}^{\infty}\{F_5^\infty\}) \bigcup (\bigcup\limits_{\mu=2}^{\infty}\{F_8^\mu\})$;

д) $spQ = \{2,3\}$, если $Q \in \{L_1,\ A_2,\ A_3\}$;

е) $spQ = \{3,4\}$, если $Q = A_1$;

ж) $spQ = \{1,2,3\}$, если $Q \in \{C_2,\ C_3\}$;

з) $spQ = \{1,2,3,4\}$, если $Q = C_1$;

и) других спектров для Q из $\Sigma(C_1)$, кроме указанных в пунктах а)–з), не существует.

Эта теорема будет вытекать из лемм, установленных в разделах 2–8.

2. Классы типа C

Здесь мы рассматриваем классы C_1, C_2, C_3, C_4 и вычислим при указании соответствующих базисов значения spC_i при $i = 1, 2, 3, 4$. Заметим, что, как это следует из строения диаграммы Поста (см. рис. 1), для любого Q из $\Sigma(C_1)$ выполнено: если Б — базис в Q, то $|\text{Б}| \leqslant |\Sigma_\pi(Q)|$, чем мы будем часто пользоваться.

Говорят, что $f(x_1, \ldots, x_n)$ является α-, β-, γ- или δ- функцией, если $f(x, \ldots, x)$ равна x, 1, 0 или $\bar{x}$, соответственно, чем мы иногда будем пользоваться.

Лемма 1. *Каждое из множеств* $Б_1 = \{\overline{x \vee y}\}$, $Б_2 = \{x \cdot y, \bar{x}\}$, $Б_3 = \{x \cdot y, x + y, 1\}$, $Б_4 = \{x \cdot y, x + y + z, 0, 1\}$ *является базисом в* C_1 *и не существует базиса* $Б$ *в* C_1, *такого, что* $\mid Б \mid \geqslant 5$.

Доказательство. Как следует из диаграммы Поста, имеет место $\Sigma_\pi(C_1) = \{C_2, C_3, A_1, D_3, L_1\}$ и $\Sigma_\pi(C_1)$ является к. системой в C_1. Непосредственной проверкой с помощью $\Sigma_\pi(C_1)$ убеждаемся, что Б_i при $i = 1, 2, 3, 4$ является полной системой в C_1 и для всякого $\text{Б}' \subset \text{Б}_i$ выполнено $[\text{Б}'] \neq C_1$. Отсюда следует, что каждое Б_i является базисом в C_1. Покажем, что не существует базиса Б в C_1, такое что $|\text{Б}| \geqslant 5$. Предположим, что такой базис Б есть, тогда, как отмечалось выше, выполнено $|\text{Б}| \leqslant |\Sigma_\pi(C_1)| = 5$.

Пусть Б$= \{f_{C_2}, f_{C_3}, f_{A_1}, f_{D_3}, f_{L_1}\}$, где $f_Q \notin Q$ при Q из $\Sigma_\pi(C_1)$. Здесь для f_{C_3} имеем $f_{C_3}(0, 0, \ldots, 0) = 1$. Пусть $f_{C_3}(1, 1, \ldots, 1) = a$, тогда $f_{C_3} \notin A_1$, если $a = 0$, и $f_{C_3} \notin D_3$, если $a = 1$. Таким образом, либо $\text{Б}' \backslash \{f_{A_1}\}$, либо $\text{Б}' \backslash \{f_{D_3}\}$ являются полными системами в C_1, то есть $\text{Б}'$ не базис в C_1. Лемма доказана.

Следствие 1. *Имеет место* $spC_1 = \{1, 2, 3, 4\}$.

Лемма 2. *Каждое из множеств* $Б_1 = \{\bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y}z\}$, $Б_2 = \{x \cdot y, x + y\}$, $Б_3 = \{0, x \vee y, xyz \vee \bar{x}\bar{y}z\}$ *является базисом в* C_3 *и не существует базиса* $Б$ *в* C_3, *такого что* $|Б| \geqslant 4$.

Доказательство. Из диаграммы Поста вытекает, что $\Sigma_\pi(C_3) = \{C_4, A_3, L_3, F_8^2\}$ и $\Sigma_\pi(C_3)$ является к. системой в C_3. Непосредственной проверкой с помощью $\Sigma_\pi(C_3)$ убеждаемся, что Б_i при $i = 1, 2, 3$ является полной системой в C_3 и для всякого $\text{Б}' \subset \text{Б}_i$ выполнено

$[Б'] \neq C_3$. Отсюда следует, что каждое $Б_i$ является базисом в C_3. Покажем, что не существует базиса Б в C_3, такого что $|Б| \geqslant 4$. Предположим, что такой базис Б есть, тогда, как отмечалось выше, будет выполнено

$$|Б| \leqslant |\Sigma_\pi(C_3)| = 4.$$

Пусть $Б = \{f_{C_4}, f_{A_3}, f_{L_3}, f_{F_8^2}\}$, где $f_Q \notin Q$ при Q из $\Sigma_\pi(C_3)$. Ясно, что можно считать выполненным $f_{C_4} \equiv 0$. Тогда если f_{A_3} является $\gamma-$функцией, то $[Б \backslash \{f_{C_4}\}] = C_3$ и поэтому Б не базис в C_3. Если же f_{A_3} является $\alpha-$функцией, то для нее найдутся два соседних набора α и α' значений ее переменных таких, что $\alpha \leqslant \alpha'$ и $f(\alpha) > f(\alpha')$. Можно считать, что

$$\alpha = (0, \ldots, 0, 0, 1, \ldots, 1)$$
$$\alpha' = (0, \ldots, 0, 1, 1, \ldots, 1),$$

а тем самым можно допустить, что f_{A_3} имеет вид $f_{A_3}(x, y, z)$ и для нее выполнено

$f_{A_3}(0,0,0) = 0, f_{A_3}(0,0,1) = 1, f_{A_3}(0,1,1) = 0$ и $f_{A_3}(1,1,1) = 1$.

Подставляя в f_{A_3} вместо x константу 0, получим функцию $g(y, z) \in \{\bar{y}z, y + z\}$.

Значит, если $g(y, z) = \bar{y}z$, то $[Б \backslash \{f_{L_3}\}] = C_3$, а если $g(x_2, x_3) = y + z$, то $[Б \backslash \{f_{F_8^2}] = C_3$. Таким образом, Б не является базисом в C_3. Лемма доказана.

Следствие 1. *Имеет место* $spC_3 = \{1, 2, 3\}$.

В силу двойственности справедливо утверждение.

Следствие 2. *Имеет место* $spC_2 = \{1, 2, 3\}$.

Лемма 3. *Каждое из множеств* $Б_1 = \{\bar{y}\bar{z}u \vee yz\bar{u} \vee yzu\}$, $Б_2 = \{x \vee y, x(y + z + 1)\}$ *является базисом в* C_4 *и не существует базиса Б в* C_4 *такого, что* $|Б| \geqslant 3$.

Доказательство. Из диаграммы Поста вытекает, что $\Sigma_\pi(C_4) = \{F_1^2, D_1, A_4, F_5^2\}$ и $\Sigma_\pi(C_4)$ является к. системой в C_4. Непосредственной проверкой с помощью $\Sigma_\pi(C_4)$ убеждаемся, что $Б_i$ при $i = 1, 2$ является полной системой в C_4 и для всякого $Б' \subseteq Б_i$ выполнено $[Б'] \neq C_4$. Значит, каждое $Б_i$ является базисом в C_4. Покажем, что не существует базиса Б в C_4 такого, что $|Б| > 2$. Пусть такой базис существует, тогда, очевидно, $|Б| \in \{3, 4\}$, в связи с чем рассмотрим два случая, когда $|Б| = 3$ и $|Б| = 4$.

Случай $|Б| = 3$.

Если такой базис Б существует, то он имеет вид $\{f_1, f_2, f_3\}$. Построим матрицу T_1, как на рис. 2.

	F_1^2	F_5^2	A_4	D_1
f_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
f_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
f_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}

Рис. 2.

В ней на пересечении строки f_i со столбцом R из $\{F_1^2, F_5^2, A_4, D_1\}$ стоит 1, если $f_i \in R$, и стоит 0, если $f_i \notin R, i = 1, 2, 3$. Так как $Б_3$ базис в C_4, то в каждой строке должны быть нули и единицы. Действительно, в случае нулевой строки f_i функция f_i является полной в C_4 и потому $Б_3$ не был бы базисом. Если же строка f_i единичная, то $Б_3 \backslash \{f_i\}$ является полной системой в C_4 и потому $Б_3$ также не базис.

Таким образом, для f_i возможны случаи, когда f_i содержит точно j нулей и $j = 1, 2, 3$.

Пусть для f_i выполнено $j = 1$. Воспользуемся леммой из [2] «о паре свойств», которая утверждает, что имеют место такие следования для α-функции при вхождении ее в пары классов из F_{1_2}, F_{5_2}, A_4 и D_1:

$$(D_1, F_1^2) \to (D_1, F_5^2) \to (D_1, A_4) \to (F_5^2, F_1^2) \to (D_1, F_1^2).$$

Отсюда следует, что строка f_i точно с одним нулем в T_1 невозможна.

Пусть для f_i выполнено $j = 2$. Здесь вид строки f_i может быть лишь таким

$$0011,\ 0101,\ 0110,\ 1100,\ 1010,\ 1001,$$

которые обозначим слева направо через α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6. Вновь воспользуемся леммой «о паре свойств», из которой следует, что строки α_1, α_2, α_4, α_6 в T_1 невозможны. Значит, далее можно считать, что в T_1 строка с двумя нулями может быть только вида α_3 или α_5.

Рассмотрим теперь случай, когда для любого $i = 1, 2, 3$ в строке f_i из T_1 имеется точно три нуля. Заметим, что так как $Б_3$ базис, то при удалении из T_1 любой строки остается подматрица, в которой есть столбец из единиц. Это означает, что в T_1 есть единичный столбец, а все остальные столбцы нулевые. Пусть $V \in \{F_1^2, F_5^2, A_4, D_1\}$ такой столбец, тогда Б$_3 \subseteq V$ и Б$_3$ не базис в C_4. Значит, нет такой матрицы T_1, в которой все строки точно с тремя нулями.

Таким образом осталось рассмотреть такие матрицы T_1, в которых есть строки с двумя нулями и они вида α_3 или α_5, а также есть строки с тремя нулями.

Пусть T_1 содержит α_3, α_5 и строку с тремя нулями, то есть имеет вид, как на рис. 3.

	F_1^2	F_5^2	A_4	D_1
f_1	0	1	1	0
f_2	1	0	1	0
f_3	c_1	c_2	0	c_4

Рис. 3.

Легко видеть, что всегда если c_j, $j = 1, 2, 4$, равно единице, то в T_1 найдется строка f_l, удаляя которую, останется подматрица без единичного столбца, что означает полноту оставшейся пары Б$_3 \backslash \{f_l\}$, то есть Б$_3$ не является базисом в C_4.

Пусть теперь T_1 содержит из α_3 и α_5 только α_3 и две строки ровно с тремя нулями, то есть она имеет вид, как на рис. 4.

	F_1^2	F_5^2	A_4	D_1
f_1	0	1	1	0
f_2	d_1	d_2	d_3	d_4
f_3	e_1	e_2	e_3	e_4

Рис. 4.

Как и в предыдущем случае, нетрудно убедиться, что всегда найдется строка f_l, после удаления которой останется подматрица, не содержащая единичного столбца, а это означает, что Б$_3 \backslash \{f_l\}$ не является базисом.

Случай когда T_1 содержит не α_3, а α_5 рассматривается полностью аналогично.

Значит, в C_4 не существует базиса из трех б. функций.

Случай $|\text{Б}| = 4$.

Покажем, что в C_4 нет базиса из четырех б. функций. Предположим, что это не так и система $\text{Б}_4 = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ является базисом в C_4. Построим матрицу T так, как на рис. 5, заполненную нулями и единицами.

	F_1^2	F_5^2	A_4	D_1
f_1	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}
f_2	b_{21}	b_{22}	b_{23}	b_{24}
f_3	b_{31}	b_{32}	b_{33}	b_{34}
f_4	b_{41}	b_{42}	b_{43}	b_{44}

Рис. 5.

В ней на пересечении строки f_i со столбцом $R \in \{F_1^2, F_5^2, A_4, D_1\}$ стоит 1, если $f_i \in R$, и 0, если $f_i \notin R, i = 1, 2, 3, 4$. Так как Б_4 базис в C_4, то в каждой строке должны быть как нули, так и единицы. Более того в любой строке должен быть точно один ноль, так как в противном случае одну из функций можно было бы удалить из Б_4 без потери свойства полноты оставшегося множества функций, что противоречило бы базисности Б_4 в C_4. Значит, в каждой строке в T имеется 3 единицы и один ноль. Это означает, что, например, в строке под номером f_1 найдутся два столбца с номерами W и V такие, что $W \neq V, \{W, V\} \notin \{\{A_4, F_1^2\}, \{A_4, F_5^2\}\}$ и в строке f_1 на местах W и V стоят единицы. Снова пользуясь леммой «о паре свойств», устанавливаем, что в этом случае f_1 будет принадлежать каждому из классов $R \backslash \{W, V\}$, то есть строка f_1 состояла бы только из единиц, что противоречит строению матрицы T. Значит, базиса Б_4 в C_4 не существует. Лемма доказана.

Следствие 1. *Имеет место* $spC_4 = \{1, 2\}$.

3. Классы типа A

Здесь мы рассмотрим классы A_1, A_2, A_3, A_4 и вычислим при указании соответствующих базисов значения spA_i при $i = 1, 2, 3, 4$.

Лемма 4. *Каждое из множеств* $Б_3 = \{0, 1, xy \vee zu\}$, $Б_4 = \{0, 1, xy, x \vee y\}$ *является базисом в* A_1 *и не существует базиса* $Б$ *в* A_1, *такого что* $|Б| \in \{1, 2, d\}$, *где* $d > 4$.

Доказательство. Как следует из диаграммы Поста, имеет место $\Sigma_\pi(A_1) = \{A_2, A_3, S_6, P_6\}$ и $\Sigma_\pi(A_1)$ является к. системой в A_1. Непосредственной проверкой с помощью $\Sigma_\pi(A_1)$ убеждаемся, что $Б_i$ при $i = 3, 4$ является полной системой в A_1 и для всякого $Б' \subset Б_i$ выполнено $[Б'] \neq A_1$. Отсюда следует, что каждое $Б_i$ является базисом в A_1.

Далее, нетрудно видеть, что если Б — базис в A_1, то $Б \supseteq \{0, 1\}$. Отсюда следует, что $|Б| \geqslant 3$. С другой стороны, $|Б| \leqslant |\Sigma_4(A_1)| = 4$. Отсюда следует утверждение леммы.

Следствие 1. *Имеет место* $spA_1 = \{3, 4\}$.

Лемма 5. *Каждое из множеств* $Б_2 = \{xy \vee zu, 0\}$, $Б_3 = \{xy, x \vee y, 0\}$ *является базисом в* A_3 *и не существует базиса* $Б$ *в* A_3, *такого что* $|Б| \in \{1, d\}$, *где* $d > 3$.

Доказательство. Как следует из диаграммы Поста, имеет место $\Sigma_\pi(A_3) = \{F_7^2, S_5, A_4\}$ и $\Sigma_\pi(A_3)$ является к. системой в A_3. Непосредственной проверкой с помощью $\Sigma_\pi(A_3)$ убеждаемся, что $Б_i$ при $i = 2, 3$ является полной системой в A_3 и для всякого $Б \subset Б_i$ выполнено $[Б] \neq A_3$. Отсюда следует, что каждое $Б_i$ является базисом в A_3.

Далее, нетрудно видеть, что если $Б'$ — базис в A_3, то $1 \in Б'$ и $|Б'| \leqslant |\Sigma_\pi(A_3)| = 3$. Отсюда следует утверждение леммы.

Следствие 1. *Имеет место* $spA_3 = \{2, 3\}$.

В силу двойственности справедливо утверждение.

Следствие 2. *Имеет место* $spA_2 = \{2, 3\}$.

Лемма 6. *Каждое из множеств* $Б_1 = \{xy \vee zu\}$ *и* $Б_2 = \{xy, z \vee u\}$ *является базисом в* A_4 *и не существует базиса* $Б$ *в* A_4 *такого, что* $|Б| > 2$.

Доказательство. Из диаграммы Поста следует, что $\Sigma_\pi(A_4) = \{F_2^2, F_6^2\}$ и $\Sigma_\pi(A_4)$ является к. системой в A_4. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $Б_i$ при $i = 1, 2$ является базисом в A_4, а для базиса Б выполнено $|Б| \leqslant 2$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Имеет место* $spA_4 = \{1, 2\}$.

4. Классы типа D

Здесь мы рассмотрим классы D_1, D_2, D_3 и вычислим при указании соответствующих базисов значения spD_i при $i = 1, 2, 3$.

Лемма 7. *Каждое из множеств* $Б_1 = \{\bar{h}_2\}$, $Б_2 = \{\bar{x}, h_2\}$, *где* $h_2(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$, *является базисом в* D_3 *и не существует в* D_3 *базиса Б такого, что* $|Б| > 2$.

Доказательство. Как следует из диаграммы Поста, имеет место $\Sigma_\pi(D_3) = \{D_1, L_5\}$ и $\Sigma_\pi(D_3)$ является к. системой в D_3. Непосредственной проверкой с помощью $\Sigma_\pi(D_3)$ убеждаемся, что $Б_i$ при $i = 1, 2$ является полной системой в D_3 и для всякого $Б' \subseteq Б_i$ выполнено $[Б'] \neq D_3$. Отсюда следует, что каждое $Б_i$ является базисом в D_3. Так как для базиса Б в D_3 выполнено $|Б| \leqslant |\Sigma_\pi(D_3)| = 2$, то заключаем, что наша лемма доказана.

Следствие 1. *Имеет место соотношение* $spD_3 = \{1, 2\}$.

Лемма 8. *Каждое из множеств* $Б_1 = \{h_2(x, y, z) + u + v\}$, $Б_2 = \{h_2, x + y + z\}$ *является базисом в* D_1 *и не существует в* D_1 *базиса Б такого, что* $|Б| > 2$.

Доказательство. Как следует из диаграммы Поста, имеет место $\Sigma_\pi(D_1) = \{D_2, L_4\}$ и $\Sigma_\pi(D_1)$ является к. системой. Непосредственной проверкой с помощью $\Sigma_\pi(D_1)$ убеждаемся, что $Б_i$ при $i = 1, 2$ является полной системой в D_1 и для всякого $Б' \subset Б_i$ выполнено $[Б'] \neq D_1$. Отсюда следует, что $Б_i$ — базис в D_1. Так как для базиса Б в D_1 выполнено $|Б| \leqslant |\Sigma_\pi(D_1)| = 2$, то заключаем, что наша лемма доказана.

Следствие 1. *Имеет место соотношение* $spD_1 = \{1, 2\}$.

Лемма 9. *Множество* $Б_1 = \{h_2\}$ *является базисом в* D_2 *и не существует базиса Б в* D_2*, такого что* $|Б| > 1$.

Доказательство. Как следует из диаграммы Поста, имеет место $\Sigma_\pi(D_2) = \{x\}$ и система $\Sigma_\pi(D_2)$ является к. системой. Отсюда следует утверждение леммы.

Следствие 1. *Имеет место соотношение* $spD_2 = \{1\}$.

5. Классы типа L

Здесь мы рассмотрим классы L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 и вычислим при указании соответствующих базисов значения spL_i при $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Лемма 10. *Каждое из множеств* $Б_2 = \{1, x+y\}$, $Б_3 = \{0, 1, x+y+z\}$ *является базисом в* L_1 *и не существует базиса Б в* L_1*, такого что* $|Б| \in \{1, d\}$ *при* $d > 3$.

Доказательство. Как следует из диаграммы Поста, имеет место $\Sigma_\pi(L_1) = \{L_2, L_3, L_5, O_9\}$ и $\Sigma_\pi(L_1)$ является к. системой. Непосредственной проверкой с помощью $\Sigma_\pi(L_1)$ убеждаемся, что $Б_i$ при $i = 1, 2$ является полной системой в L_1 и для всякого $Б' \subset Б_i$ выполнено $[Б'] \neq L_1$. Отсюда следует, что каждое $Б_i$ является базисом в L_1.

Пусть $Б = \{f\}$ и $[Б] = L_1$. Тогда, очевидно, выполнено $f(0, \ldots, 0) = 1$ и $f(1, \ldots, 1) = 0$. Отсюда следует, что $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{2k+1} x_i + 1$, а, значит, $f \in L_1 \bigcap D_3 \neq L_1$, что противоречит полноте f в L_1. Значит, такого базиса Б в L_1 нет.

Пусть теперь $Б = \{f_{L_2}, f_{L_3}, f_{L_5}, f_{O_9}\}$, где f_Q означает, что $f_Q \in L_1 \backslash Q$, $Q \in \{L_2, L_3, L_5, O_9\}$. Ясно, что $f_{L_3}(0, \ldots, 0) = 1$. Пусть $f_{L_3}(1, \ldots, 1) = a$. Тогда $f_{L_3}(x_1, \ldots, x_n) \notin L_2$ при $a = 1$ и $f_{L_3}(x_1, \ldots, x_n) \notin L_5$ при $a = 0$. Значит, $Б \backslash \{f_{L_2}\}$ при $a = 1$ и $Б\{f_{L_5}$ при $a = 0$ являются полными системами в L_1. Так как для всякого базиса $Б'$ в L_1 верно $|Б'| \leqslant |\Sigma_\pi(L_1)| \leqslant 4$, то лемма доказана.

Следствие 1. *Имеет место соотношение* $sp(L_1) = \{2, 3\}$.

Лемма 11. *Каждое из множеств* $Б_1 = \{x + y\}$*,* $Б_2 = \{0, x + y + z\}$ *является базисом в* L_3 *и не существует базиса Б в* L_3 *птакого, что* $|Б| > 2$*.*

Доказательство. Как следует из диаграммы Поста, имеет место $\Sigma_\pi(L_3) = \{L_4, O_6\}$ и $\Sigma_\pi(L_3)$ является к. системой. Непосредственной проверкой с помощью $\Sigma_\pi(L_3)$ убеждаемся, что $Б_i$ при $i = 1, 2$ является полной системой в L_3 и для всякого $Б' \subset Б_i$ выполнено $[Б'] \neq L_1$. Отсюда следует, что каждое $Б_i$ является базисом в L_3. Заметим, что для базиса Б в L_3 выполнено $|Б| \leqslant |\Sigma_\pi(L_3)| = 2$. Отсюда следует утверждение леммы.

Следствие 1. *Имеет место* $spL_3 = \{1, 2\}$*.*

В силу двойственности справедливо утверждение.

Следствие 2. *Имеет место* $spL_2 = \{1, 2\}$*.*

Лемма 12. *Каждое из множеств* $Б_1 = \{x+y+z+1\}$*,* $Б_2 = \{\bar{x}, x+y+z\}$ *является базисом в* L_5 *и не существует базиса Б в* L_5 *такого, что* $|Б| > 2$*.*

Доказательство. Как следует из диаграммы Поста, имеет место $\Sigma_\pi(L_5) = \{L_4, O_1\}$ и $\Sigma_\pi(L_5)$ является к. системой. Непосредственной проверкой с помощью $\Sigma_\pi(L_5)$ убеждаемся, что $Б_i$ при $i = 1, 2$ является полной системой в L_5 и для всякого $Б' \subset Б_i$ выполнено $[Б'] = L_5$. Отсюда следует, что каждое $Б_i$ является базисом в L_5. Замечая, что для базиса Б в L_5 выполнено $|Б| \leqslant |\Sigma_\pi(L_5)| = 2$, заключаем, что лемма доказана.

Следствие 1. *Имеет место* $spL_5 = \{1, 2\}$*.*

Лемма 13. *Множество* $Б_1 = \{x + y + z\}$ *является базисом в* L_4 *и не существует в* L_4 *базиса Б такого, что* $|Б| > 1$*.*

Доказательство. Из диаграммы Поста следует, что $\Sigma_\pi(L_4) = \{O_1\}$ и $\{O_1\}$ является к. системой. Тем самым для любой функции f из L_4 такой, что $f \not\equiv x$, выполнено $[\{f\}] = L_4$. Отсюда следует лемма.

Следствие 1. *Имеет место* $spL_4 = \{1\}$*.*

6. Классы типа F

Здесь мы рассмотрим классы F_i^μ, F_i^∞, $i = 1, 2, \ldots, 8$, $\mu = 2, 3, \ldots$, и вычислим для них спектры с явным указанием базисов, соответствующих этим спектрам.

Сначала рассмотрим классы F_j^μ, $j = 5, 6, 7, 8$, F_j^∞, а затем, используя двойственность, получим описание спектров для остальных классов типа F.

Пусть $h_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_{\mu+1}) = \bigvee\limits_{i=1}^{\mu+1} x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_{\mu+1}$.

Лемма 14. *Каждое из множеств $Б_1 = \{\bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z}\}$, $Б_2 = \{x\bar{y}, h_\mu\}$, $Б_3 = \{x(y \vee \bar{z}), 0, h_\mu\}$ является базисом в F_8^μ и не существует базиса $Б$ в F_8^μ, такого что $|Б| > 3$.*

Доказательство. Как следует из диаграммы Поста, имеет место $\sum_\pi(F_8^\mu) = \{F_7^\mu, F_5^\mu, F_8^{\mu+1}\}$, и $\sum_\pi(F_8^\mu)$ является к. системой в F_8^μ. Непосредственной проверкой убеждаемся, что каждое из множеств $Б_i$, $i = 1, 2, 3$, является полной системой в F_8^μ, а для каждого $Б' \subset Б_i$ выполнено $[Б'] \neq F_8^\mu$. Значит, $Б_i$ является базисом в F_8^μ. Остается заметить, что для базиса Б в F_8^μ выполнено $|Б| \leqslant |\sum_\pi(F_8^\mu)| = 3$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Имеет место $sp\, F_8^\mu = \{1, 2\}$.*

В силу двойственности справедливо утверждение.

Следствие 2. *Имеет место $sp\, F_4^\mu = \{1, 2\}$.*

Лемма 15. *Множество $Б_2 = \{0, h_\mu\}$ является базисом для F_7^μ и не существует базиса $Б$ в F_7^μ такого, что $|Б| \in \{1, d\}$, где $d > 2$.*

Доказательство. Как следует из диаграммы Поста, имеет место $\sum_\pi(F_7^\mu) = \{F_6^\mu, F_7^{\mu+1}\}$ и $\sum_\pi(F_7^\mu)$ является к. системой в F_7^μ. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $Б_2$ является полной системой в F_7^μ, а для всякого $Б' \subset Б_2$ выполнено $[Б'] \neq F_7^\mu$. Значит, $Б_2$ — базис в F_7^μ.

Нетрудно видеть, что если Б — базис в F_7^μ, то $0 \in Б$. Тем самым, так как $[\{0\}] \neq F_7^\mu$, то $|Б| > 1$. Значит, нет базиса Б, такого что $|Б| = 1$ и $[Б] = F_7^\mu$.

В заключение отметим, что всегда для базиса Б в F_7^μ выполнено $|Б| \leqslant |\sum_\pi(F_7^\mu)| = 2$, а тем самым лемма доказана.

Следствие 1. *Справедливо соотношение* $sp\,F_7^\mu = \{2\}$.

В силу двойственности имеет место утверждение.

Следствие 2. $sp\,F_3^\mu = \{2\}$.

Лемма 16. *Каждое из множеств*
$Б_1 = \{(\bigvee\limits_{i=1}^{\mu+3} x_1x_2...x_{i-1}\bar{x}_ix_{i+1}...x_{\mu+3}) \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4...x_{\mu+3} \vee x_1x_2...x_{\mu+3}\}$, $Б_2 = \{x(y \vee \bar{z}), h_\mu\}$ *является базисом в* F_5^μ *и не существует в* F_5^μ *базиса Б такого, что* $|Б| > 2$.

Доказательство. Как следует из диаграммы Поста, имеет место $\sum_\pi(F_5^\mu) = \{F_5^{\mu+1}, F_6^\mu\}$ и $\sum_\pi(F_5^\mu)$ является к. системой в F_5^μ. Непосредственной проверкой убеждаемся, что каждое из множеств Б$_i$, $i = 1, 2$, является полной системой в F_5^μ, а для каждого Б$' \subset$ Б$_i$ выполнено [Б$'$] $\neq F_5^\mu$. Остается заметить, что для базиса Б в F_5^μ выполнено $|$Б$| \leqslant |\sum_\pi(F_5^\mu)| = 2$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Имеет место* $sp\,F_5^\mu = \{1, 2\}$.

В силу двойственности справедливо утверждение.

Следствие 2. *Имеет место* $sp\,F_1^\mu = \{1, 2\}$.

Лемма 17. *Имеют место положения:*

а) Каждое из множеств $Б_1 = \{xu(y \vee z) \vee yz\}$, $Б_2 = \{x(y \vee z), h_2\}$ *является базисом в* F_6^2 *и нет базиса Б в* F_6^2*, такого что* $|Б| > 2$*;*

б) множество $\{h_\mu\}$ *является базисом в* F_6^μ *при* $\mu > 2$ *и нет в* F_6^μ *базиса Б$'$ такого, что* $|Б'| > 1$.

Доказательство. Рассмотрим два случая, когда $\mu = 2$ и $\mu > 2$.

Случай $\mu = 2$. Как следует из диаграммы Поста, имеет место $\sum_\pi(F_6^2) = \{F_6^3, D_2\}$ и $\sum_\pi(F_6^2)$ является к. системой в F_6^2. Непосредственной проверкой убеждаемся, что каждое Б$_i$, $i = 1, 2$, является полной системой в F_6^2, а для каждого Б$'' \subset$ Б$_i$ выполнено [Б$''$] $\neq F_6^2$. Значит, Б$_i$ является базисом в F_6^2. Если Б — базис в F_6^2, то $|$Б$| \leqslant |\sum_\pi(F_6^2)| = 2$. Значит, при $\mu = 2$ лемма доказана.

Случай $\mu > 2$. Как следует из диаграммы Поста, имеет место $\sum_\pi(F_6^\mu) = \{F_6^{\mu+1}\}$ и $\sum_\pi(F_6^\mu)$ является к. системой в F_6^μ. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $h_\mu \notin F_6^{\mu+1}$ и потому $[\{h_\mu\}] = F_6^\mu$. Если Б$'$ — базис в F_6^μ, то $|$Б$'| \leqslant |\sum_\pi(F_6^\mu)| = 1$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Имеет место* $sp\, F_6^2 = \{1, 2\}$, $sp\, F_6^\mu = \{1\}$ *при* $\mu > 2$.

В силу двойственности справедливо утверждение.

Следствие 2. *Имеет место* $sp\, F_2^2 = \{1, 2\}$, $sp\, F_2^\mu = \{1\}$ *при* $\mu > 2$.

Лемма 18. *Каждое из множеств* $Б_1 = \{x\bar{y}\}$, $Б_2 = \{0, x(y \vee \bar{z})\}$ *является базисом в* F_8^∞ *и не существует в* F_8^∞ *базиса* $Б$, *такого что* $|Б| > 2$.

Доказательство. Из диаграммы Поста следует, что $\sum_\pi(F_8^\infty) = \{F_5^\infty, F_7^\infty\}$ и $\sum_\pi(F_8^\infty)$ является к. системой в F_8^∞. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $Б_i$ является полной системой в F_8^∞ при $i = 1, 2$ и для любого $Б' \subset Б_i$ выполнено $[Б'] \neq F_8^\infty$. Значит, $Б_i$ — базис в F_8^∞. Далее, ясно, что если Б — базис в F_8^∞, то $|Б| \leqslant |\sum_\pi(F_8^\infty)| = 2$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Имеет место* $sp\, F_8^\infty = \{1, 2\}$.

В силу двойственности имеем утверждение.

Следствие 2. *Имеет место* $sp\, F_4^\infty = \{1, 2\}$.

Лемма 19. *Множество* $Б_2 = \{0, x(y \vee z)\}$ *является базисом в* F_7^∞ *и не существует базиса* $Б$ *в* F_7^∞ *такого, что* $|Б| \in \{1, d\}$ *при* $d > 2$.

Доказательство. Из диаграммы Поста следует, что $\sum_\pi(F_7^\infty) = \{F_6^\infty, P_3\}$ и $\sum_\pi(F_7^\infty)$ является к. системой в F_7^∞. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $Б_2$ — полная система в F_7^∞ и для любого $Б' \subset Б_2$ выполнено $[Б'] \neq F_7^\infty$. Значит, $Б_2$ — базис в F_7^∞. Далее, ясно, что если Б — базис в F_7^∞, то $Б \ni 0$, то есть $|Б| > 1$, а также $|Б| \leqslant |\sum_\pi(F_7^\infty)| = 2$. Отсюда следует лемма.

Следствие 1. *Справедливо соотношение* $sp\, F_7^\infty = \{2\}$.

В силу двойственности имеет место утверждение.

Следствие 2. *Справедливо соотношение* $sp\, F_3^\infty = \{2\}$.

Лемма 20. *Множество* $Б_1 = \{x(y \vee \bar{z})\}$ *является базисом в* F_5^∞ *и нет базиса* $Б$ *в* F_5^∞, *такого что* $|Б| > 1$.

Доказательство. Из диаграммы Поста следует, что $\sum_\pi(F_5^\infty) = \{F_6^\infty\}$ и F_6^∞ — к. система в F_5^∞. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что $Б_1 \nsubseteq F_6^\infty$. Значит, $Б_1$ — базис в F_5^∞. Очевидно, что если Б — базис в F_5^∞, то с учетом соотношения $|Б| \leqslant |\sum_\pi(F_5^\infty)| = 1$ заключаем, что $|Б| = 1$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Имеет место* $sp\, F_5^\infty = \{1\}$.

С учетом двойственности получаем утверждение.

Следствие 2. *Имеет место* $sp\, F_1^\infty = \{1\}$.

Лемма 21. *Множество* $Б_1 = \{x(y \vee z)\}$ *является базисом в* F_6^∞ *и нет базиса Б в* F_6^∞*, такого что* $|Б| > 1$.

Доказательство. Из диаграммы Поста следует, что $\sum_\pi(F_6^\infty) = \{P_1\}$ и P_1 — к. система в F_6^∞. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $Б_1 \nsubseteq P_1$. Значит, $Б_1$ — базис в F_6^∞. Очевидно, что если Б — базис в F_6^∞, то с учетом соотношения $|Б| \leqslant |\sum_\pi(F_5^\infty)| = 1$ заключаем, что $|Б| = 1$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Имеет место* $sp\, F_6^\infty = \{1\}$.

В силу двойственности имеем утверждение.

Следствие 2. *Имеет место* $sp\, F_2^\infty = \{1\}$.

7. Классы типов P и S

Классами типа P считаем классы P_1, P_3, P_5, P_6, а классами типа S — классы S_1, S_3, S_5 и S_6. Поскольку классы типа S двойственны классам типа P, ограничимся рассмотрением классов типа P.

Нетрудно видеть, что $P_3 = P_1 \cup \{0\}$, $P_5 = P_1 \cup \{1\}$, $P_6 = P_1 \cup \{0\}$, а $P_1 = [\{\mathop{\&}\limits_{i=1}^{s} x_i\}]$, где $s > 1$. Отсюда вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 22. *Всякий базис в классах* P_1, P_3, P_5, P_6 *имеет вид* $\{\mathop{\&}\limits_{i=1}^{s} x_i\}$, $\{\mathop{\&}\limits_{i=1}^{s} x_i, 0\}$, $\{\mathop{\&}\limits_{i=1}^{s} x_i, 1\}$, $\{\mathop{\&}\limits_{i=1}^{s} x_i, 0, 1\}$, $s > 1$, *соответственно.*

Следствие 1. *Имеет место* $sp\,P_1 = \{1\}$, $sp\,P_3 = \{2\}$, $sp\,P_5 = \{2\}$, $sp\,P_6 = \{3\}$.

С учетом двойственности справедливо утверждение.

Следствие 2. *Имеет место* $sp\,S_1 = \{1\}$, $sp\,S_3 = \{2\}$, $sp\,S_5 = \{2\}$, $sp\,S_6 = \{3\}$.

8. Классы типа O

Классами типа O считаем классы O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6, O_7, O_8, O_9. Очевидным является следующее утверждение.

Лемма 23. *Всякий базис в классах* $O_1, \ldots, O_9$ *имеет вид* $\{x\}$, $\{1\}$, $\{0\}$, $\{\bar{x}\}$, $\{x, 1\}$, $\{x, 0\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 1, x\}$, $\{c, \bar{x}\}$, *соответственно.*

Следствие 1. *Имеет место* $sp\,O_i = \{1\}$ *при* $i = 1, 2, 3, 4$, $sp\,O_j = \{2\}$ *при* $j = 5, 6, 7, 9$, $sp\,O_8 = \{3\}$.

Список литературы

[1] Post E. Two-valued iterative systems of mathematical logic. Prinston, 1941.

[2] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Физматлит, 1966.

[3] Блохина Г. Н. О предикатном описании классов Поста // Дискретный анализ. Вып. 16. Новосибирск, 1970.

[4] Кудрявцев В. В. О функциональной системе пучков логических функций // Фундаментальная и прикладная математика. Т. 5, вып. 1. М.: Изд-во МГУ.