Комбинаторная формула числа пороговых функций

М. В. Носов

Пусть F пороговая функция от n переменных. Известно, что её можно задать функцией $f_1(x_1, \ldots, x_n)$, где

$$\begin{gathered} f_1(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a_0, \\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}, \\ |a_i| \leqslant P, i = 1, \ldots, n, \\ P \geqslant (n+1)^{\frac{n+1}{2}}, P \in \mathbf{N}. \end{gathered}$$

Очевидно, тогда F можно задать функцией

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 2a_1x_1 + \ldots + 2a_nx_n + 2a_0 + 1,$$

при этом разделяющая гиперплоскость не проходит через вершины куба. Аналогично, функция G пороговая и

$$g(x_1, \ldots, x_n) = 2b_1x_1 + \ldots + 2b_nx_n + 2b_0 + 1$$

с теми же условиями на коэффициенты. Если $\alpha \in E_2^n$, то

$$\begin{gathered} F(\alpha) = G(\alpha) \Longleftrightarrow f(\alpha)g(\alpha) \geqslant 1, \\ F(\alpha) \neq G(\alpha) \Longleftrightarrow f(\alpha)g(\alpha) \leqslant -1. \end{gathered}$$

Значит

$$F(\alpha)=G(\alpha)\Longleftrightarrow\prod_{j=0}^{2K}\left(f(\alpha)g(\alpha)-j\right)=0,$$

$$F(\alpha)\neq G(\alpha)\Longleftrightarrow\prod_{j=0}^{2K}\left(f(\alpha)g(\alpha)-j\right)\leqslant -1,$$

$$K\geqslant\frac{1}{2}(2(n+1)P+1)^2, K\in\mathbf{N}.$$

Пусть

$$\varepsilon=\sum_{\alpha\in E_2^n}\prod_{j=0}^{2K}\left(f(\alpha)g(\alpha)-j\right),$$

если F и G равны, то $\varepsilon=0$, если F и G разные, то $\varepsilon\leqslant -1$. Пусть

$$\delta=\frac{1}{M!}\prod_{m=1}^{M}\left(\left(\sum_{\alpha\in E_2^n}\prod_{j=0}^{2K}\left(f(\alpha)g(\alpha)-j\right)\right)+m\right),$$

$$M\geqslant 2^n(4K)^{2K+1}, M\in\mathbf{N},$$

если F и G равны, то $\delta=1$, если F и G разные, то $\delta=0$. Получаем результат.

Теорема 1. *Число пороговых функций от n переменных задается формулой*

$$N_n=\sum_{\substack{a_0,\ldots,a_n,\\ a_i\in Z,|a_i|\leqslant P}}\left(\sum_{\substack{b_0,\ldots,b_n,\\ b_i\in Z,|b_i|\leqslant P}}\frac{1}{M!}\prod_{m=1}^{M}\left(\left(\sum_{\alpha\in E_2^n}\prod_{j=0}^{2K}(f(\alpha)g(\alpha)-j)\right)+m\right)\right)^{-1},$$

$$\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),$$

$$f(\alpha)=2a_1\alpha_1+\ldots+2a_n\alpha_n+2a_0+1,$$

$$g(\alpha)=2b_1\alpha_1+\ldots+2b_n\alpha_n+2b_0+1,$$

где P,K,M — натуральные числа, удовлетворяющие условиям

$$P\geqslant(n+1)^{\frac{n+1}{2}}, K\geqslant\frac{1}{2}(2(n+1)P+1)^2, M\geqslant 2^n(4K)^{2K+1}.$$