Математическое моделирование упругопластических процессов с траекториями средней кривизны

И. Н. Молодцов

Построены и изучены определяющие четырехчленные уравнения дифференциального типа, связывающие напряжения и деформации в процессах сложного нагружения пластически деформируемого материала. Предложен вариант идентификации определяющих функционалов, произведено сравнение с теорией средних кривизн.

1. Введение

В предложенной нами в [3] аксиоматике механики деформируемого твердого тела (МДТТ) термодинамические аксиомы представлены в виде 16 равноправных и равнодопустимых формализмов описания неравновесных систем. В ней уравнения МДТТ (баланса массы, импульса и энергии) замыкаются не только уравнениями состояния (определяющими уравнениями), но также уравнениями связности в качестве условий полной равновесности. В этом случае реализуется классическая идея о достаточности механической калибровки уравнений состояния, а сама калибровка становится центром теоретических построений. Давление принципа калибровки требует от теоретиков, развивающих математические описания сложных процессов, происходящих в материале при пластических деформациях, таких как эффекты нелокальности взаимодействий тел-точек, запаздывания пластических и других необратимых изменений в материале, особого внимания к возможным реализациям механизмов диссипации энергии.

Большинство определяющих соотношений в теории пластичности используют постулаты пластичности, разделение полных деформаций на обратимую и необратимую части, представления о поверхности нагружения и характере упругой разгрузки. Альтернативный подход использовал А. А. Ильюшин в [1] при построении класса соотношений дифференциального типа, связывающих между собой физически наблюдаемые величины — напряжения и полные деформации — в процессах сложного нагружения. При использовании подобных соотношений, кроме калибровки определяющих функционалов, также требуется установление в рамках теории переменных, характеризующих термомеханическое состояние упругопластического тела, условий активного нагружения (диссипации) и законов разгрузки.

2. Основные уравнения

При построении определяющих соотношений, описывающих процесс сложного пластического нагружения деформируемого тела, применяем подход, предложенный А. А. Ильюшиным, а позднее в [5] конкретизированный В. И. Малым.

Используем стандартные обозначения теории упругопластических процессов. Так $\overline{\sigma}$ и $\overline{\varepsilon}$ обозначают любые согласованные по работе пары пятимерных векторов-девиаторов напряжений и деформаций. Преимуществом полных деформаций и напряжений перед любыми другими величинами является их измеримость (наблюдаемость). Однако, при помощи этих величин нельзя физически корректно записать представления термодинамических функций, ибо напряжения и деформации неадекватно характеризуют термодинамическое состояния упругопластического тела. Поэтому нашей непосредственной целью является сначала построение базовых определяющих соотношений теории обобщением трехчленной формулы и сравнение полученных уравнений с прототипом, далее изучение вопросов, связанных с калибровкой определяющих функционалов и затем обсуждение возможных способов постановки и решения задачи о выборе термодинамических переменных состояния.

В процессе нагружения трехчленная формула А. А. Ильюшина тождественно преобразуется к форме

$$d\overline{\varepsilon} = \frac{1}{P}d\overline{\sigma} + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{P}\right)\{d\overline{\sigma} - (\overline{n}_\sigma, d\overline{\sigma})\overline{n}_\sigma\}, \overline{n}_\sigma \equiv \overline{\sigma}/\sigma, \qquad (0)$$

в которой видна использованная при построении формулы идея расширения векторного базиса уравнения процессов малой кривизны. Из (0) следуют два соотношения:

$$(\overline{n}_\sigma, d\overline{\sigma}) = P(\overline{n}_\sigma, d\overline{\varepsilon}),\ (\overline{n}_\varepsilon - \overline{n}_\sigma(\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon), d\overline{\sigma}) = N(\overline{n}_\varepsilon - \overline{n}_\sigma(\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon), d\overline{\varepsilon}),$$

которые используются для идентификации определяющих функционалов P и N. Трехчленная формула используются в теории пластичности для описания процессов сложного нагружения с траекториями средней кривизны. Подобно тому, как это было сделано в [1], [2] далее изучаются функциональные окрестности решений этих уравнений, полученные максимальным расширением векторного базиса. В этом случае уравнение процесса нагружения имеет вид:

$$\begin{gathered} d\overline{\varepsilon} = \frac{1}{N}d\overline{\sigma} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N}\right)(\overline{n}_\sigma, d\overline{\sigma})\overline{n}_\sigma + K\{d\overline{\sigma} - (d\overline{\sigma}, \overline{n}_\sigma)\overline{n}_\sigma\} + \\ + L\{d\overline{\varepsilon} - (d\overline{\varepsilon}, \overline{n}_\sigma)\overline{n}_\sigma\} + \frac{1}{\Psi}\Big\{M_1\frac{\sigma}{\varepsilon}(\overline{n}_\sigma, d\overline{\sigma}) + M_2\frac{\sigma}{\varepsilon}(\overline{n}_\sigma, d\overline{\varepsilon}) + \\ + M_3(\overline{n}_\varepsilon, d\overline{\sigma}) + M_4(\overline{n}_\varepsilon, d\overline{\varepsilon})\Big\}\{\overline{n}_\varepsilon - (\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon)\overline{n}_\sigma\},\ \Psi \equiv 1 - (\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon)^2. \qquad (1) \end{gathered}$$

В (1) входят кроме функционалов P, N основного процесса также произвольные функционалы процесса K, L, $M_1, \cdots, M_4$ расширенного базиса. Добавленные слагаемые построены по векторам напряжений и деформаций и по их первым дифференциалам. В пятимерном пространстве вектора-девиатора напряжений использованное расширение векторного базиса не является максимальным, но обладает неоспоримым преимуществом, поскольку приводит к векторным уравнениям первого порядка. Самым общим в пятимерном девиаторном пространстве является расширение базиса до пятимерного и это возможно при включении в базис векторов, построенных на вторых дифференциалах девиаторов напряжений и деформаций. Такой подход приведет к функциональным уравнениям второго порядка и увеличит число определяющих функционалов, что при существующей практике и теории эксперимента, по-видимому, сделает теорию неоправданно сложной.

Вне зависимости от того, какие переменные характеризуют состояние упругопластического тела, скалярная величина $\overline{\sigma} d\overline{\varepsilon} + \overline{\varepsilon} d\overline{\sigma}$ всегда является дифференциалом от скалярного произведения $(\overline{\sigma}, \overline{\varepsilon})$ и, следовательно, функцией состояния. Поэтому в пространстве параметров состояния интеграл от этой величины по любому замкнутому контуру равен нулю. Последнее утверждение устанавливает в термодинамическом смысле равенство (с обратным знаком) интегралов от $\overline{\sigma} d\overline{\varepsilon}$ и $\overline{\varepsilon} d\overline{\sigma}$. Это служит основанием для выбора уравнения обратного процесса (процесса деформации) в подобном (1) виде:

$$\begin{aligned} d\overline{\sigma} = N d\overline{\varepsilon} + (P - N)(\overline{n}_\sigma, d\overline{\varepsilon})\overline{n}_\sigma + A \left\{ d\overline{\sigma} - (d\overline{\sigma}, \overline{n}_\varepsilon)\overline{n}_\varepsilon \right\} + \\ + B \left\{ d\overline{\varepsilon} - (d\overline{\varepsilon}, \overline{n}_\varepsilon)\overline{n}_\varepsilon \right\} + \frac{1}{\Psi} \left\{ C_1(\overline{n}_\sigma, d\overline{\sigma}) + C_2(\overline{n}_\sigma, d\overline{\varepsilon}) + \right. \\ \left. + C_3 \frac{\varepsilon}{\sigma}(\overline{n}_\varepsilon, d\overline{\sigma}) + C_4 \frac{\varepsilon}{\sigma}(\overline{n}_\varepsilon, d\overline{\varepsilon}) \right\} \left\{ \overline{n}_\sigma - (\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon)\overline{n}_\varepsilon \right\}. \quad (2) \end{aligned}$$

Это сотношение содержит еще 6 функционалов — N, A, B, $C_1, \cdots, C_4$. В уравнении (2) добавленные к основному уравнению слагаемые не вносят вклада в дополнительную работу. Считаем, что уравнения (1) и (2) являются прямой и обратной формой записи единого уравнения. Из условий эквивалентности уравнений (1) и (2) следуют связи между функционалами и определяются независимые функционалы процесса. Единое функциональное уравнение содержит 3 независимых функционала и представляется в одной из двух эквивалентных форм:

$$d\overline{\varepsilon} = \frac{1}{Q} d\overline{\sigma} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q} \right) (\overline{n}_\sigma, d\overline{\sigma})\overline{n}_\sigma + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{Q} \right) (\overline{n}'_\varepsilon, d\overline{\sigma})\overline{n}'_\varepsilon, \quad (3)$$

$$\overline{n}'_\varepsilon \equiv \frac{\overline{n}_\varepsilon - (\overline{n}_\varepsilon, \overline{n}_\sigma)\overline{n}_\sigma}{\sqrt{1 - (\overline{n}_\varepsilon, \overline{n}_\sigma)^2}}$$

для процессов нагружения и

$$d\overline{\sigma} = Q d\overline{\varepsilon} + (P - Q)(\overline{n}_\sigma, d\overline{\varepsilon})\overline{n}_\sigma + (N - Q)(\overline{n}'_\varepsilon, d\overline{\varepsilon})\overline{n}'_\varepsilon \quad (4)$$

для процессов деформаций. Основные уравнения (3), (4) содержат три независимых функционала в полном соответствии с принципом макроскопической определимости. Из этих соотношений следует, что при сколь угодно сложной геометрии 5-ти мерной траектории процесса локально процесс деформирования является трехмерным. В частном случае трехмерных процессов соотношения имеют вид:

$$
\begin{gathered}
d\overline{\varepsilon} = \frac{1}{P}(\overline{n}_\sigma, d\overline{\sigma})\overline{n}_\sigma + \frac{1}{N}(\overline{n}'_\varepsilon, d\overline{\sigma})\overline{n}'_\varepsilon + \frac{1}{Q}(\overline{n}_\perp, d\overline{\sigma})\overline{n}_\perp, \\
d\overline{\sigma}_\perp \equiv d\overline{\sigma} - (\overline{n}_\sigma, d\overline{\sigma})\overline{n}_\sigma - (\overline{n}'_\varepsilon, d\overline{\sigma})\overline{n}'_\varepsilon,\ \overline{n}_\perp \equiv \frac{d\overline{\sigma}_\perp}{|d\overline{\sigma}_\perp|}; \\
d\overline{\sigma} = P(\overline{n}_\sigma, d\overline{\sigma})\overline{n}_\sigma + N(\overline{n}'_\varepsilon, d\overline{\sigma})\overline{n}'_\varepsilon + Q(\overline{n}_\perp, d\overline{\sigma})\overline{n}_\perp, \\
d\overline{\varepsilon}_\perp \equiv d\overline{\varepsilon} - (\overline{n}_\sigma, d\overline{\varepsilon})\overline{n}_\sigma - (\overline{n}'_\varepsilon, d\overline{\varepsilon})\overline{n}'_\varepsilon,\ \overline{n}_\perp \equiv \frac{d\overline{\varepsilon}_\perp}{|d\overline{\varepsilon}_\perp|}.
\end{gathered}
$$

Скалярные соотношения

$$
P(\overline{n}_\sigma, d\overline{\varepsilon}) = (\overline{n}_\sigma, d\overline{\sigma}),\ N(\overline{n}'_\varepsilon, d\overline{\varepsilon}) = (\overline{n}'_\varepsilon, d\overline{\sigma}),\ Q(\overline{n}_\perp, d\overline{\varepsilon}) = (\overline{n}_\perp, d\overline{\sigma}) \quad (5)
$$

следуют из уравнений и раскрывают физический смысл определяющих функционалов. Из уравнения (4) следует, что продолжение траектории деформаций вдоль прямой, совпадающей с направлением вектора напряжений, не приводит к отклонению вектора напряжений от данного направления на всем прямолинейном участке. Это свойство (известное как гипотеза локальной простоты) противоречит принципу запаздывания векторных свойств — одному из главных положений теории упругопластических процессов А. А. Ильюшина. Именно это обстоятельство, а также хорошо известный экспериментальный факт о том, что гипотеза локальной простоты выполняется далеко не всегда, [7], приводят нас к необходимости рассматривать ниже варианты усложнения определяющих соотношений.

3. Идентификация определяющих функционалов

Из первого соотношения (5) следует формула, определяющая первый функционал P:

$$
P\cos(\theta_1) = \frac{d\sigma}{ds}.
$$

Здесь видно, что возможно определить скалярные свойства материала в процессе простого нагружения ($\sigma = \Phi(s)$). Тогда последняя формула определит скалярные свойства в произвольном процессе. Второе и третье уравнения (5) записываем для трехмерных траекторий деформаций в естественном сопровождающем репере Френе:

$$\overline{n}_\sigma = \cos(\theta_1)\overline{n}_1 - \sin(\theta_1)(\cos(\theta_2)\overline{n}_2 - \sin(\theta_2)\overline{n}_3)),$$
$$\overline{n}_\varepsilon = \cos(\phi_1)\overline{n}_1 - \sin(\phi_1)(\cos(\phi_2)\overline{n}_2 - \sin(\phi_2)\overline{n}_3)).$$

После преобразований получим соотношения:

$$\begin{aligned}&\left\{N\sin(\theta_1) + \sigma\left(\frac{d\theta_1}{ds} - \kappa_1\right)\right\}\Delta = \\ &\qquad = -\left(\frac{d\theta_2}{ds} - \kappa_2\right)\sigma\sin(\theta_1)\sin(\phi_1)\sin(\theta_2 - \phi_2) + \\ &\qquad\qquad + \sigma\kappa_1\left\{\sin(\theta_1)\cos(\phi_1)(\cos(\theta_2) - 1) + \right.\\ &\qquad\qquad\qquad \left. + \cos(\theta_1)\sin(\phi_1)[\cos(\theta_2 - \phi_2) - \cos(\phi_2)]\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left\{Q\sin(\theta_1) + \sigma\left(\frac{d\theta_1}{ds} - \kappa_1\right)\right\}\sin(\phi_1)\sin(\theta_2 - \phi_2) = \\ &\quad = \left(\frac{d\theta_2}{ds} - \kappa_2\right)\sigma\sin(\theta_1)\Delta + \sigma\kappa_1\left\{\cos(\theta_1)[\sin(\theta_1)\cos(\phi_1)\sin(\theta_2) - \right.\\ &\left. - \cos(\theta_1)\sin(\phi_1)\sin(\phi_2)] - \sin(\phi_1)\sin(\theta_2 - \phi_2)[1 - \sin^2(\theta_1)\cos(\theta_2)]\right\},\end{aligned}$$

$$\Delta \equiv \sin(\theta_1)\cos(\phi_1) - \cos(\theta_1)\sin(\phi_1)\cos(\theta_2 - \phi_2).$$

Эти соотношения тождественно преобразуются в систему дифференциальных уравнений для углов сближения вектора напряжений с векторами естественного сопровождающего репера при заданных N, Q:

$$\frac{d\theta_1}{ds} - \kappa_1\cos(\theta_2) = -\frac{N}{\sigma}\sin(\theta_1) + \frac{N - Q}{D\sigma}\sin(\theta_1)\sin^2(\phi_1)\sin^2(\theta_2 - \phi_2), \tag{6}$$

$$D \equiv \Delta^2 + \sin^2(\phi_1)\sin^2(\theta_2 - \phi_2),$$

$$\frac{d\theta_2}{ds} - \kappa_2 = \frac{N - Q}{D\sigma}\Delta\sin(\phi_1)\sin(\theta_2 - \phi_2) - \kappa_1\sin(\theta_2)\frac{\cos(\theta_1)}{\sin(\theta_1)}. \tag{7}$$

Из уравнения (6) следует в частном случае $N = Q$ известное в теории пластичности процессов средней кривизны уравнение для угла сближения:

$$\frac{d\theta_1}{ds} - \kappa_1 = -\frac{N}{\sigma}\sin(\theta_1).$$

Это уравнение позволило калибровать определяющий функционал соотношением $N = \sigma/\lambda(s)$, определяя в эксперименте зависимость следа запаздывания λ от накопленной длины дуги траектории деформаций. Что касается второго угла θ_2, то уравнением для него является:

$$\frac{d\theta_2}{ds} - \kappa_2 = -\kappa_1\sin(\theta_2)\frac{\cos(\theta_1)}{\sin(\theta_1)}.$$

Отсюда следует, что при использовании теории средних кривизн для описания винтовых траекторий с разными кручениями результаты, касающиеся угла θ_2, будут одинаковыми, то есть независящими от второй кривизны. Формулами (6),(7) уравнения средних кривизн корректируются слагаемыми, пропорциональными $Q - N$. Таким образом, определился смысл дополнительного функционала Q. Как выше уже отмечалось, теория процессов средней кривизны основывалась на гипотезе локальной простоты. В ней использовался только первый член представления угла сближения в виде ряда по кривизнам. Именно гипотеза локальной простоты привела к факторизации ядра в соотношении:

$$\theta(s) = \int\limits_{s_0}^{s} A(s, s_1)\kappa_1(s)ds_1$$

и далее к уравнению для угла сближения вектора напряжений с направляющим вектором траектории деформаций. Данное рассмотрение от гипотез свободно. Уравнения (6), (7) определяют векторные свойства материала, скалярные же свойства вполне определяются диаграммой $\sigma = \Phi(s)$ простого нагружения. Вполне допустимо задание материальных свойств зависимостями:

$$N(s) = \frac{\Phi(s)}{\lambda_1(s)},\ Q(s) = \frac{\Phi(s)}{\lambda_2(s)},$$

в которых $\lambda_i(s)$– заданные из эксперимента функции. Уравнения (6) и (7) решались численно. Начальные условия $\theta_1(0) = \arccos(0.447)$,

$\theta_2(0) = \arcsin(0.25)$, численное значение $\lambda_1(s) \approx 0.00452$, скалярная диаграмма $\Phi(s)$ соответствуют экспериментальным данным [6] на винтовых траекториях деформаций, $\lambda_2 = 0.0005$. Вычисления показывают наличие свойств запаздывания у зависимостей $\theta_1(s)$ и $\theta_3(s)$. Здесь θ_3 вводится соотношением $\sin(\theta_3) = \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)$. Поэтому угол θ_3 является углом между направляющим вектором напряжений и соприкасающейся плоскостью траектории деформаций.

Можно, напротив, исходя из экспериментов, задавать векторные свойства материала соотношениями:

$$\frac{d\theta_1}{ds} - \kappa_1 = -\frac{\theta_1}{\lambda_1},\ \frac{d\theta_2}{ds} - \kappa_2 = -\frac{\theta_2}{\lambda_2}$$

и находить реализующие такие режимы функционалы N и Q :

$$\frac{N}{\sigma} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{\sin(\phi_1)\sin(\theta_2 - \phi_2)}{\Delta}\sin(\theta_2)\left(\kappa_1\frac{\cos(\theta_1)}{\sin(\theta_1)} - \frac{1}{\lambda_2}\right),$$
$$\frac{Q}{\sigma} = \frac{1}{\lambda_1} - \frac{\Delta}{\sin(\phi_1)\sin(\theta_2 - \phi_2)}\sin(\theta_2)\left(\kappa_1\frac{\cos(\theta_1)}{\sin(\theta_1)} - \frac{1}{\lambda_2}\right).$$

В последних формулах несложно перейти от внутренних параметров траектории (углов и кривизн) непосредственно к компонентам векторов напряжений и деформаций и, подставив результат в основные уравнения (3),(4), получить окончательную запись уравнений состояния теории упругопластических процессов.

4. Анализ основных уравнений

Основные уравнения (3),(4) содержат три определяющих функционала. В пятимерном пространстве возможно увеличение числа функционалов до пяти. Рассмотрим самый общий вид функционального уравнения первого порядка, связывающий девиаторы напряжений и деформаций. Поскольку в теории ильюшинского типа максимальное число независимых векторов построенных по напряжениям, деформациям и их скоростям (приращениям) равно трем, то в процессе деформаций уравнение может иметь вид:

$$
\begin{aligned}
d\overline{\sigma} = \left\{P_{11}(\overline{n}_\sigma, d\overline{\varepsilon}) + P_{12}(\overline{n}'_\varepsilon, d\overline{\varepsilon}) + P_{13}(\overline{n}_\perp, d\overline{\varepsilon})\right\}\overline{n}_\sigma + \\
+ \left\{P_{21}(\overline{n}_\sigma, d\overline{\varepsilon}) + P_{22}(\overline{n}'_\varepsilon, d\overline{\varepsilon}) + P_{23}(\overline{n}_\perp, d\overline{\varepsilon})\right\}\overline{n}'_\varepsilon + \\
+ \left\{P_{31}(\overline{n}_\sigma, d\overline{\varepsilon}) + P_{32}(\overline{n}'_\varepsilon, d\overline{\varepsilon}) + P_{33}(\overline{n}_\perp, d\overline{\varepsilon})\right\}\overline{n}_\perp. \quad (8)
\end{aligned}
$$

Нетрудно убедиться, что то же самое соотношение и в том же репере для процесса нагружения имеет вид:

$$
d\overline{\varepsilon} = \overline{n}_i \left(P_{ij}^{-1}\right)(\overline{n}_j, d\overline{\sigma}). \quad (9)
$$

Таким образом, в пятимерном пространстве девиатора деформаций вектор приращения напряжений представляется в основном репере разложением (8), аналогично в процессе нагружения имеем в том же репере представление (9) для приращения деформаций. По принципу макроскопической определимости число независимых материальных функционалов не может превосходить пяти. Поэтому считаем матрицу $\hat{P}$ основного оператора симметричной, тогда поворотом $\hat{Q}$ первого основного репера оба разложения (8) и (9) приводятся к каноническому виду, в котором матрица основного оператора $\hat{P}^*$ диагональна:

$$
\hat{P} = \hat{Q}\hat{P}^*\hat{Q}^T. \quad (10)
$$

В каноническом репере уравнения процесса деформаций и нагружений созвучны уравнениям (3) и (4):

$$
d\overline{\varepsilon} = \frac{1}{Q^*}d\overline{\sigma} + \left(\frac{1}{P^*} - \frac{1}{Q^*}\right)(\overline{n}^*_\sigma, d\overline{\sigma})\overline{n}^*_\sigma + \left(\frac{1}{N^*} - \frac{1}{Q^*}\right)(\overline{n}'^*_\varepsilon, d\overline{\sigma})\overline{n}'^*_\varepsilon, \quad (11)
$$

$$
d\overline{\sigma} = Q^* d\overline{\varepsilon} + (P^* - Q^*)(\overline{n}^*_\sigma, d\overline{\varepsilon})\overline{n}^*_\sigma + (N^* - Q^*)(\overline{n}'^*_\varepsilon, d\overline{\varepsilon})\overline{n}'^*_\varepsilon. \quad (12)
$$

Формула (10) выражает элементы матрицы $\hat{P}$ оператора через пять независимых функционалов: три диагональных элемента и два угла поворота.

Отметим, что в работах [2] использовался подход к построению уравнений связи напряжений и деформаций, приводящий к уравнениям с несимметричной матрицей основного оператора. Общий вариант такой теории не согласуется с принципом макроскопической определимости.

Список литературы

[1] Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963.

[2] Молодцов И. Н. Процессы сложного нагружения в теории пластичности // Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 95-летию со дня рождения А. А. Ильюшина. М., 2006. С. 204–210.

[3] Огибалов П. М., Тамбовцев Е. П., Молодцов И. Н. Нелокальная теория структурированных композитных материалов // Механ. композит. материал. Рига, 1984. № 3. С. 408–416.

[4] Огибалов П. М., Тамбовцев Е. П., Молодцов И. Н. Динамическая калибровка диссипации в нелокальных композитах // Механ. композит. материал. Рига, 1984. № 3. С. 408–416.

[5] Малый В. И. Исследование некоторых функционалов теории упругопластических процессов // Упругость и неупругость. М., 1978. Вып. 5. С. 107–116.

[6] Вавакин А. С., Васин Р. А., Викторов В. В., Широв Р. И. Экспериментальное исследование упругопластического деформирования стали при сложном нагружении по криволинейным пространственным траекториям деформаций / Деп. в ВИНИТИ 16.10.86, № 7298–В86.

[7] Зубчанинов В. Г., Охлопков Н. Л., Гараников В. В. Экспериментальная пластичность. Книга 1. Процессы сложного нагружения. Тверь: Тверской ГТУ, 2003.