Проблема полноты в исчислении высказываний

Г. В. Боков

В работе проблема полноты систем аксиом в исчислении высказываний рассматривается с позиции оператора замыкания, порожденного правилами вывода. Описываются некоторые свойства данного оператора, а также свойства замкнутых и предполных классов, задаваемых этим оператором. Доказывается алгоритмическая неразрешимость проблемы полноты конечных систем аксиом в исчислении высказываний.

1. Введение

Перед тем, как перейти к рассмотрению проблемы полноты в исчислении высказываний, необходимо дать описание тех объектов, с которыми придется столкнуться далее.

В качестве основного объекта исследования выступают тавтологии или тождественно истинные формулы над связками $\{\wedge, \vee, \neg, \to\}$. Множество всех тавтологий обозначим через T. В терминах исчисления высказываний тавтологии следовало бы называть теоремами, но в силу его полноты и непротиворечивости эти понятия равнозначны [1]. Будем придерживаться стандартных соглашений по опусканию скобок [5]. Причем для операций $\wedge$ и $\vee$ вводится дополнительное соглашение: конъюнктам и дизъюнктам вида

$$\mathfrak{A}_1 \wedge \mathfrak{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{A}_{n-1} \wedge \mathfrak{A}_n \text{ и } \mathfrak{B}_1 \vee \mathfrak{B}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_{m-1} \vee \mathfrak{B}_m$$

соответствуют формулы

$$(\mathfrak{A}_1 \wedge (\mathfrak{A}_2 \wedge \ldots \wedge (\mathfrak{A}_{n-1} \wedge \mathfrak{A}_n))) \text{ и } (\mathfrak{B}_1 \vee (\mathfrak{B}_2 \vee \ldots \vee (\mathfrak{B}_{m-1} \vee \mathfrak{B}_m))).$$

Данную расстановку скобок будем называть стандартной.

Следующим не менее важным объектом исследования выступают правила вывода, позволяющие из тавтологий снова получать тавтологии:

1) *Правило подстановки.* Пусть $\mathfrak{A}$ — тавтология, содержащая переменное высказывание X, а $\mathfrak{B}$ — произвольная формула логики высказываний[1]. Тогда, если заменить в $\mathfrak{A}$ все вхождения X на $\mathfrak{B}$, то полученная формула тоже будет тавтологией.
2) *Правило заключения* или *modus ponens.* Если формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ — тавтологии, то формула $\mathfrak{B}$ тоже тавтология.

Следует сказать несколько слов по поводу правила подстановки. Можно вовсе убрать из рассмотрения данное правило, если ввести соглашение считать каждую формулу целым классом или схемой формул, получающихся из данной, путем подстановки вместо переменных высказываний всевозможных формул логики высказываний. Далее правило подстановки все же будет использоваться, но в некоторых случаях для удобства будем пользоваться данным соглашением.

Итак, у нас есть тавтологии или теоремы, и есть правила вывода, позволяющие из одних тавтологий получать другие. Тогда встает вопрос, можно ли из некоторого узкого класса тавтологий посредством правил вывода получить все тавтологии из T? Данный вопрос носит название проблемы полноты. При этом систему тавтологий, обладающую данным свойством называют полной системой, а сами тавтологии — аксиомами. Проблема полноты является частным случаем проблемы выразимости. Последняя состоит в указании всех таких пар (M_1, M_2), что $M_1, M_2 \subseteq T$ и M_2 выразимо через M_1, то есть все тавтологии из M_2 можно получить с помощью применения правил вывода к тавтологиям, принадлежащим M_1.

При рассмотрении проблемы полноты удобно ввести понятие оператора замыкания J, порожденного правилами вывода [2]. Пусть $M \subseteq T$ некоторое подмножество тавтологий. Обозначим через $[M]$ множество всех тавтологий, которые либо принадлежат M, либо по-

[1] Все формулы логики высказываний рассматриваются над связками $\{\wedge, \vee, \neg, \to\}$.

лучены с помощью однократного применения правил вывода к тавтологиям, принадлежащим M. Определим множества $M_k \subseteq T$ индукцией по k:

$$M_0 = M$$
$$M_{k+1} = [M_k]$$

Тогда положим $J(M) = \bigcup_{k=0}^{\infty} M_k$.

Легко проверить, что J является оператором замыкания. В самом деле:

1) $M = M_0 \Rightarrow M \subseteq J(M)$;
2) $M \subseteq M' \Rightarrow M_0 \subseteq M'_0 \Rightarrow \forall k\ M_k \subseteq M'_k \Rightarrow J(M) \subseteq J(M')$;
3) Рассмотрим произвольную тавтологию $\mathfrak{A} \in J(J(M))$. Из определения оператора J следует, что $\mathfrak{A}$ можно вывести из некоторых тавтологий $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n \in J(M)$. Тогда найдется такое число k, что $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n \in M_k$, и, следовательно, $\mathfrak{A} \in J(M)$. Итак,

$$\left.\begin{array}{l} J(J(M)) \subseteq J(M) \\ J(M) \subseteq J(J(M)) \end{array}\right\} \Rightarrow J(M) = J(J(M)).$$

Таким образом определенный оператор замыкания позволяет в его терминах переформулировать проблему выразимости и тем более проблему полноты. Так, скажем, что множество $M_2 \subseteq T$ выразимо через $M_1 \subseteq T$ с помощью оператора J, если $M_2 \subseteq J(M_1)$, при этом множество $J(M_1)$ называется замыканием множества M_1. Тогда задача выразимости в терминах оператора J выглядит следующим образом: найти все такие пары (M_1, M_2), что $M_1, M_2 \subseteq T$ и $M_2 \subseteq J(M_1)$. Перейдем к формулированию проблемы полноты.

Система тавтологий $M \subseteq T$ называется J-полной в T, если $J(M) = T$. В качестве примера можно привести следующую полную систему тавтологий [5]:

1) $X \to (Y \to X)$
2) $(X \to (Y \to Z)) \to ((X \to Y) \to (X \to Z))$
3) $X \wedge Y \to X$
4) $X \wedge Y \to Y$
5) $(X \to Y) \to ((X \to Z) \to (X \to Y \wedge Z))$
6) $X \to X \vee Y$
7) $Y \to X \vee Y$
8) $(X \to Z) \to ((Y \to Z) \to (X \vee Y \to Z))$
9) $(X \to Y) \to (\overline{Y} \to \overline{X})$
10) $X \to \overline{\overline{Y}}$
11) $\overline{\overline{X}} \to Y$

Тавтологии, из которых выводятся все другие тавтологии, в исчислении высказываний принято называть аксиомами. В частности, выше приведена полная непротиворечивая система аксиом для исчисления высказываний.

Проблема полноты в терминах оператора замыкания J или проблема J-полноты выглядит следующим образом: для произвольной системы тавтологий M из T требуется выяснить, является ли она J-полной в T, то есть $J(M) = T$. Данная проблема эквивалентна задаче описания всех подмножеств M, которые являются J-полными в T, последняя является частным случаем решения проблемы выразимости.

В качестве основного подхода к решению проблемы полноты используется подход, основанный на получении критериев полноты в терминах предполных классов. Принцип определения критериев зависит от свойств структуры замкнутых подмножеств рассматриваемого множества. В нашем случае произвольное подмножество тавтологий M будем называть замкнутым классом относительно оператора J или просто J-замкнутым классом, если $J(M) = M$. Основным понятием в данном подходе служит понятие критериальной системы. Оно определяется следующим образом: пусть $\Delta(T)$ — совокупность всех замкнутых подмножеств множества T. Поскольку $J(T) = T$, то $\Delta(T)$ не пуст. Критериальной системой называется произвольное подмножество $\Theta, \Theta \subseteq \Delta(T)$, обладающее свойством: всякое множество M тавтологий из T является полным тогда и только тогда, когда для любого элемента $Q, Q \in \Theta$, выполнено соотношение $M \nsubseteq Q$. Для применения критериальной системы при исследовании множеств на полноту, хотелось бы, чтобы она в некотором роде была минимальной. Это объясняется тем, что если Θ — критериальная система и в ней найдутся такие элементы Q_1 и Q_2, что $Q_1 \subseteq Q_2$, то множество $\Theta \setminus Q_1$ также будет критериальной системой. Рассмотрение критериальной системы с этой точки зрения привод к понятию предполного класса. Определим его следующим образом: J-замкнутый класс тавтологий M будем называть J-предполным, если $J(M) \neq T$ и, при добавлении к M любой тавтологии из $T \setminus M$, получается J-полная система. Непосредственно из определения предполного класса следует, что каждый предполный класс содержится в критериальной системе. Если через Θ_1 обозначить множество предполных классов, то под неизбыточностью критериальной системы Θ можно считать представление ее в виде $\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2$, где во второе слагаемое Θ_2 входят только такие замкнутые классы из Θ, которые не являются подмножествами ни одного из предполных классов. Если определить приведенную критериальную систему, как систему, не содержащую собственных подсистем, являющихся критериальными, то, согласно с [3], оказывается справедливой теорема

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны*

1) *Существует непустая приведенная критериальная система;*
2) *Каждый замкнутый класс содержится в некотором предполном классе;*
3) *Критериальная система состоит только из предполных классов.*

Кроме того, если выполнено хотя бы одно из условий, то подмножество тавтологий M является J-полным в T тогда и только тогда, когда оно не является подмножеством ни одного предполного класса в T.

На основании данной теоремы задача J-полноты для множества тавтологий, обладающего указанными свойствами, фактически сводится к отысканию всех J-предполных классов в T. Поскольку в дальнейшем будет рассматриваться только оператор замыкания J, то для удобства приставку $J-$ иногда будем опускать.

2. J-замыкание и J-предполные классы

Непосредственно из определения оператора J следует

Утверждение 1. *Оператор J является алгебраическим оператором замыкания, то есть для любого $M \subseteq T$ и для любой формулы $\mathfrak{A} \in T$, если $\mathfrak{A} \in J(M)$, то $\mathfrak{A} \in J(M')$, где M' - конечное множество тавтологий из M.*

Доказательство. Действительно, если $\mathfrak{A} \in J(M)$, то $\mathfrak{A} \in M_k$ для некоторого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Возьмем наименьшее k, для которого выполнено $\mathfrak{A} \in M_k$ и $\mathfrak{A} \notin M_{k-1}$. Докажем индукцией по k, что $\mathfrak{A} \in J(M')$, для некоторого конечного $M' \subseteq M$.

1) $k = 0$.
   Если $\mathfrak{A} \in M$, то $\mathfrak{A} \in J(\{\mathfrak{A}\})$
2) $k \to k + 1$.
   Пусть $\mathfrak{A} \notin M$, тогда $k > 0$ и, следовательно, $\mathfrak{A}$ получена с помощью однократного применения правил вывода из тавтологий $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m$, принадлежащих M_{k-1}, где m равно 1 или 2 в зависимости от того, какое правило применялось. По индуктивному предположению для каждого $i = 1, \ldots, m$ выполнено $\mathfrak{A}_i \in J(M_i)$, где M_i — соответствующие конечные подмножества тавтологий из M. Тогда, полагая $M' = \cup_{i=1}^{m} M_i$, получаем $\mathfrak{A} \in J(M')$ и M' — конечное подмножество M.

Утверждение доказано.

Для замкнутых относительно оператора J классов справедлива

Теорема 2. *Множество замкнутых классов имеет мощность континуума.*

Доказательство. Поскольку множество всех тавтологий T счетно, то замкнутых подмножеств не более, чем континуум. Покажем, что мощность множества замкнутых классов не менее, чем континуум.

Рассмотрим бесконечное множество тавтологий $\Gamma = \{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \ldots\}$, где $\mathfrak{A}_i$ — это тавтология вида

$$\underbrace{(X \vee \overline{X}) \wedge \ldots \wedge (X \vee \overline{X})}_{i}.$$

Пусть $M \subseteq \Gamma$ и $\mathfrak{A}_i \notin M$, тогда легко видеть, что в этом случае $\mathfrak{A}_i \notin J(M)$. Это объясняется тем, что к формулам из множества M можно применить только правило подстановки, которое не изменяет числа сомножителей в конъюнкции. Таким образом, разным подмножествам множества Γ соответствуют разные замкнутые классы, их содержащие. Так как множество Γ имеет континуум подмножеств, то мощность множества замкнутых классов не менее, чем континуум. Теорема доказана.

Далее понадобится следующее свойство алгебраического оператора замыкания [2].

Теорема 3. *Пусть I-алгебраический оператор на множестве M. Если в M существуют конечные I-полные системы, то каждый собственный, то есть не совпадающий с M, замкнутый класс содержится в некотором предполном классе.*

Поскольку для исчисления высказываний существует конечная система аксиом, порождающая все тавтологии из T [5], то, согласно теореме 1, верно

Следствие 1. *Система предполных классов в T образует критериальную систему.*

Таким образом, проблема полноты для множества тавтологий из T свелась к рассмотрению множества всех предполных классов в T. Однако, следующая теорема показывает, что свойство критериальности множества предполных классов не дает эффективной процедуры решения проблемы полноты.

Теорема 4. *Множество предполных классов имеет мощность континуума.*

Доказательство. Рассмотрим множество тавтологий $\mathit{\Gamma} = \{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \ldots\}$, определенное в теореме 2. Из свойств данного множества вытекает, что для любых $M_1, M_2 \subseteq \mathit{\Gamma}$, $M_1 \neq M_2$, следует, что $J(M_1) \neq J(M_2)$.

Пусть $M \subseteq \mathit{\Gamma}$, определим

$$M' = \{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \mid \mathfrak{A} \in \mathit{\Gamma} \setminus M, \mathfrak{B} \in T\}$$
$$\widetilde{M} = M \cup M'$$

По теореме 3 $\widetilde{M}$ содержится в некотором предполном классе Π. Покажем, что для любых $M_1, M_2 \subseteq \mathit{\Gamma}$ таких, что $M_1 \neq M_2$, следует $\Pi_1 \neq \Pi_2$, где Π_1 и Π_2 — предполные классы, соответствующие $\widetilde{M_1}$ и $\widetilde{M_2}$.

В самом деле, для любой тавтологии $\mathfrak{A} \in M_1$ и $\mathfrak{A} \notin M_2$ выполнено $\mathfrak{A} \in \Pi_1$. Допустим, что $\mathfrak{A} \in \Pi_2$, тогда $J(\Pi_2 \cup \{\mathfrak{A}\}) \neq T$. С другой стороны, $\mathfrak{A} \notin M_2$, следовательно, $\mathfrak{A} \in \mathit{\Gamma} \setminus M_2$ и $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \in \widetilde{M_2}$ для любой формулы $\mathfrak{B} \in T$. Откуда непосредственно следует, что $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \in \Pi_2$. Поэтому, если добавить к Π_2 тавтологию $\mathfrak{A}$, то с помощью правила *modus ponens* можно получить все тавтологии из T, то есть $J(\Pi_2 \cup \{\mathfrak{A}\}) = T$. Из противоречия следует, что $\Pi_1 \neq \Pi_2$.

Поскольку, множество $\mathit{\Gamma}$ имеет континуальное семейство подмножеств и разным подмножествам соответствуют разные предполные классы, то множество всех предполных классов имеет мощность континуума. Теорема доказана.

Важным частным случаем является рассмотрение не любых, а лишь конечных полных систем тавтологий. Следующая теорема дает возможность построить эффективную разрешающую процедуру для проблемы полноты таких систем.

Теорема 5. *Существует счетная система предполных классов, критериальная относительно проблемы полноты конечных систем тавтологий, и не существует конечной системы предполных классов, обладающих этим свойством.*

Доказательство. Пусть M — множество всех конечных неполных систем тавтологий. По теореме 3 каждая конечная система тавтологий из M содержится в некотором предполном классе. Так как множество M счетно, то, взяв для каждой системы из M по одному предполному классу, получим утверждение теоремы.

Предположим, что нашлась конечная система предполных классов $\{\Pi_1, \ldots, \Pi_n\}$ критериальная относительно проблемы полноты конечных систем. Тогда существует предполный класс Π_{n+1}, отличный от всех Π_i, $i = 1, \ldots, n$. Следовательно, для любого $i = 1, \ldots, n$ класс Π_{n+1} содержит тавтологию $\mathfrak{A}_i \notin \Pi_i$. Поэтому система $\{\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n\}$ не содержится ни в одном из классов $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$, но и не является полной, так как целиком лежит в Π_{n+1}. Теорема доказана.

Из дальнейшего станет ясно, что для конечных систем тавтологий нельзя выбрать счетное критериальное множество предполных классов, для которого существовала бы эффективная процедура распознавания полноты конечных систем.

3. Алгоритмическая неразрешимость задачи о J-полноте

Для изложения данного раздела понадобится ряд фактов из теории алгоритмов [4].

Однородная система продукции Поста — это тройка $\Sigma = \langle A, V, \omega \rangle$, где $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — конечный алфавит; $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ — множество пар вида $v_i = (a_i, \alpha_i)$, где $a_i \in A,\ \alpha_i \in A^*$ (A^* — это множество слов в алфавите A), $i = 1, \ldots, n$; $\omega \geqslant 1$ — натуральное число. Будем говорить, что Σ применима к слову $\xi \in A^*$, если $\xi = a_{i_1} \ldots a_{i_k}$ и $k \geqslant \omega$. Слово $\xi' = a_{i_{\omega+1}} \ldots a_{i_k} \alpha_{i_1}$ будем называть результатом применения Σ к слову ξ и обозначать $\xi' = \Sigma(\xi)$. Если $k < \omega$, то Σ неприменима к слову ξ. Будем называть слово $\eta \in A^*$ Σ-продукцией слова $\xi \in A^*$, если существует конечная цепочка слов $\xi_1, \ldots, \xi_s \in A^*$ такая, что $\xi_1 = \xi, \xi_s = \eta$ и $\xi_{i+1} = \Sigma(\xi_i),\ i = 1, \ldots, s-1$.

Если последовательность Σ-продукций слова $\xi \in A^*$ конечна, то будем говорить, что при применении к слову ξ система Σ останавливается через конечное число шагов. Для каждой однородной системы продукции Поста поставим вопрос о разрешимости проблемы остановки этой системы: существует ли алгоритм, который по любому наперед заданному слову ξ устанавливает, конечно или бесконечно множество его Σ-продукций, то есть останавливается ли Σ при применении к слову ξ или нет.

Для данной проблемы верна

Теорема 6. *Существует однородная система продукций Поста $\Sigma_0 = \langle A_0, V_0, \omega_0 \rangle$, для которой не существует алгоритма, решающего проблему остановки.*

Чтобы не загромождать текст большим числом индексов, далее будем работать с системой продукций Поста $\Sigma = \langle A, V, \omega \rangle$ в предположении, что для нее верна данная теорема. Перейдем к рассмотрению задачи о полноте конечных систем тавтологий. Цель дальнейшего изложения будет состоять в том, чтобы свести данную задачу к проблеме остановки системы продукций Поста Σ. Для этого определим своего рода кодирование, сопоставив каждой букве алфавита A некоторую тавтологию однозначным образом:

$$a_i \leftrightarrow \underbrace{X \vee \ldots \vee X}_{i+1} \vee \overline{X}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Здесь и далее, когда не оговорено противного, предполагается, что скобки расставлены стандартным образом. Тавтологию, соответствующую букве a_i, будем обозначать $\mathfrak{a}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Введем вспомогательный символ a_0 и соответствующую ему тавтологию $\mathfrak{a}_0$. Далее, произвольному слову $\xi \in A^*$ сопоставим тавтологию $\mathfrak{A}_\xi$ по следующему правилу:

$$\xi = a_{i_1} \ldots a_{i_s} \leftrightarrow \mathfrak{A}_\xi = \mathfrak{a}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{i_s}.$$

Для каждой пары $(a_i, \alpha_i) \in V$, $i = 1, \ldots, n$ тавтологию, соответствующую слову α_i, будем обозначать $\mathfrak{A}_i$. Таким образом, для каждого $i = 1, \ldots, n$ паре (a_i, α_i) сопоставляется пара $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{A}_i)$.

Пусть U — конечная полная система тавтологий, которая не содержит ни одной тавтологии, из которой можно получить тавтологию

$\mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{i_k}$ путем перестановки скобок и подстановок вместо переменных высказываний, где $i_1, \ldots, i_k$ пробегают множество $\{1, \ldots, n\}$, а $k \in \mathbb{N}$. Такая система всегда найдется, например, система аксиом, определенная выше. Через $\mathfrak{U}$ будем обозначать произвольную тавтологию из множества U.

Далее, для произвольного слова $\xi \in A^*$, $\xi = a_{i_1} \ldots a_{i_s}$, рассмотрим систему Σ_ξ, состоящую из тавтологий:

(1) $\mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{A}_\xi$

(2) $\mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{j_\omega} \wedge Y \to \mathfrak{a}_0 \wedge Y \wedge \mathfrak{A}_{j_1}, \quad \forall j_1, \ldots, j_\omega \in \{1, \ldots, n\}$

(3) $\mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{j_\omega} \to \mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{A}_{j_1}, \quad \forall j_1, \ldots, j_\omega \in \{1, \ldots, n\}$

(4) $\mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{j_k} \to \mathfrak{U}, \quad \forall k \in \{1, \ldots, \omega - 1\},$
$\forall j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\},\ \forall \mathfrak{U} \in U$

(5) $(X \wedge Y) \wedge Z \to X \wedge (Y \wedge Z)$

(6) $(Y \to Z) \to (X \wedge Y \to X \wedge Z)$

Поскольку, все индексы пробегают конечные множества, а $\mathfrak{U}$ — произвольная тавтология из конечного множества U, то система Σ_ξ конечна. Тавтологии типа (2) и (3) — это своего рода формализация применения однородной системы продукции Поста Σ к некоторому слову.

Прежде, чем описывать свойства системы Σ_ξ, следует сделать замечание относительно тавтологий (5) и (6). Для этого докажем лемму.

Лемма 1. *Пусть множество $M \subseteq T$ содержит тавтологии (5) и (6), тогда для любого $p \geqslant 2$ и для любых $j_1, \ldots, j_p, q \in \{1, \ldots, n\}$, если $\mathfrak{a}_0 \wedge (\mathfrak{a}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{j_p}) \wedge \mathfrak{A}_q \in M$ то $\mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{j_p} \wedge \mathfrak{A}_q \in J(M)$.*

Доказательство. Сначала покажем, что для любого $k \in \{0, \ldots, p–2\}$ выполнено включение:

$$\mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{j_k} \wedge ((\mathfrak{a}_{j_{k+1}} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{j_p}) \wedge \mathfrak{A}_q) \to$$
$$\to \mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{j_{k+1}} \wedge ((\mathfrak{a}_{j_{k+2}} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{j_p}) \wedge \mathfrak{A}_q) \in J(M).$$

Рассмотрим произвольное $k \in \{0, \dots, p-2\}$. С помощью правила подстановки из тавтологии (5) можно получить тавтологию:

$$((\mathfrak{a}_{j_{k+1}} \wedge \dots \wedge \mathfrak{a}_{j_p}) \wedge \mathfrak{A}_q) \to \mathfrak{a}_{j_{k+1}} \wedge ((\mathfrak{a}_{j_{k+2}} \wedge \dots \wedge \mathfrak{a}_{j_p}) \wedge \mathfrak{A}_q).$$

Далее посредством тавтологии (6) убеждаемся в справедливости включения. Поскольку, при $k = 0$ левой частью включения является тавтология $\mathfrak{a}_0 \wedge (\mathfrak{a}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathfrak{a}_{j_p}) \wedge \mathfrak{A}_q$, которая по условию леммы принадлежит M, а при $k = p-2$ правой частью включения является тавтология $\mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathfrak{a}_{j_p} \wedge \mathfrak{A}_q$, то последовательным применением правила *modus ponens* из первой тавтологии и данных включений можно вывести последнюю. Следовательно, $\mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathfrak{a}_{j_p} \wedge \mathfrak{A}_q \in J(M)$. Лемма доказана.

Таким образом, тавтологии (5) и (6), входящие в Σ_ξ, играют роль технической вставки, которая позволяет не заботиться о расстановке скобок в конъюнктах. В нашем случае конъюнктами будут тавтологии вида:

$$\mathfrak{a}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathfrak{a}_{i_s}.$$

Заметим, что в тавтологиях группы (2) при подстановке вместо переменного высказывания Y произвольного конъюнкта, в котором скобки расставлены стандартным образом, то в антецеденте получающейся при этом импликации расположен конъюнкт уже со стандартной расстановкой скобок. Поэтому к данной импликации можно применить правило *modus ponens*, не заботясь о расстановке скобок. Но в результате применения данного правила получится уже конъюнкт не со стандартной расстановкой скобок, поэтому к нему необходимо применить лемму 1. В результате снова получим конъюнкт со стандартной расстановкой скобок. Используя данное замечание, иногда будем опускать рассуждения и выкладки, связанные с перестановкой скобок.

Для только что определенной системы тавтологий Σ_ξ справедлива:

Лемма 2. *Для произвольного слова $\xi \in A^*$ система тавтологий Σ_ξ является полной в T тогда и только тогда, когда множество Σ-продукций слова ξ конечно.*

Доказательство. Докажем сначала обратное утверждение, что, если множество Σ-продукций слова ξ конечно, то система Σ_ξ является полной в T.

Пусть множество Σ-продукций слова ξ конечно и $\xi = a_{i_1} \dots a_{i_s}$. Это означает, что система Σ-продукций $\xi = \xi_1 \to \xi_2 \to \dots \to \xi_m$ обрывается на некотором слове ξ_m, длина которого равна k и $k < \omega$. Не ограничивая общности можно считать, что $m > 1$, тогда $s \geqslant \omega$ и тавтология $\mathfrak{A}_\xi$ имеет вид:

$$\mathfrak{a}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathfrak{a}_{i_\omega} \wedge (\mathfrak{a}_{i_{\omega+1}} \wedge \dots \wedge \mathfrak{a}_{i_s}), \text{ если } s > \omega,$$
$$\mathfrak{a}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathfrak{a}_{i_\omega}, \text{ если } s = \omega.$$

В первом случае, с помощью тавтологии типа (2) сначала выведем формулу

$$\mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathfrak{a}_{i_\omega} \wedge (\mathfrak{a}_{i_{\omega+1}} \wedge \dots \wedge \mathfrak{a}_{i_s}) \to (\mathfrak{a}_{i_{\omega+1}} \wedge \dots \wedge \mathfrak{a}_{i_s}) \wedge \mathfrak{A}_{i_1},$$

откуда с помощью правила *modus ponens* и перестановки скобок получим тавтологию

$$\mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{i_{\omega+1}} \wedge \dots \wedge \mathfrak{a}_{i_s} \wedge \mathfrak{A}_{i_1},$$

которая, с очевидным изменением, совпадает с тавтологией, соответствующей слову ξ_2, при $s > \omega$. Аналогично, во втором случае, когда $s = \omega$, с помощью тавтологии типа (3) выведем тавтологию $\mathfrak{A}_{i_1}$, которая также, с очевидным изменением, совпадает с тавтологией, соответствующей слову ξ_2, но при $s = \omega$. Применяя те же рассуждения к тавтологии, соответствующей слову ξ_2, можно вывести тавтологию, соответствующую слову ξ_3, и т. д., пока не выведем тавтологию, соответствующую слову ξ_m. Если $\xi_m = a_{j_1} \dots a_{j_k},\ k < \omega$, то тавтология, соответствующая слову ξ_m, имеет вид

$$\mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathfrak{a}_{j_k}.$$

С помощью (4) и правила *modus ponens* сможем вывести произвольную тавтологию $\mathfrak{U}$ из U. Так как U — это полная система, то Σ_ξ также полна.

Теперь докажем прямое утверждение леммы: если система Σ_ξ является полной в T, то множество Σ-продукций слова ξ конечно. Рассмотрим систему тавтологий Σ', получающуюся из Σ_ξ отбрасыванием тавтологии (1). Докажем индукцией по длине вывода l, что из Σ' выводимы только тавтологии вида:

$$(2') \quad \mathfrak{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{B}_m \wedge \mathfrak{a}'_0 \wedge \mathfrak{a}'_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}'_{j_\omega} \wedge \mathfrak{C} \to \\ \to \mathfrak{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{B}_m \wedge \mathfrak{a}'_0 \wedge \mathfrak{C} \wedge \mathfrak{A}'_{j_1}$$

$$(3') \quad \mathfrak{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{B}_m \wedge \mathfrak{a}'_0 \wedge \mathfrak{a}'_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}'_{j_\omega} \to \mathfrak{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{B}_m \wedge \mathfrak{a}'_0 \wedge \mathfrak{A}'_{j_1}$$

$$(4') \quad \mathfrak{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{B}_m \wedge \mathfrak{a}'_0 \wedge \mathfrak{a}'_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}'_{j_k} \to \mathfrak{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{B}_m \wedge \mathfrak{U}'$$

$$(5') \quad \mathfrak{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{B}_m \wedge ((\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \wedge \mathfrak{C}) \to \mathfrak{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{B}_m \wedge \mathfrak{A} \wedge (\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{C})$$

$$(6') \quad \mathfrak{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{B}_m \wedge (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}) \to \mathfrak{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{B}_m \wedge (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{C})$$

Штрихи означают тавтологии, полученные из исходных путем подстановки вместо переменных высказываний произвольных формул. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_m$ — произвольные формулы. Индексы пробегают множества: $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \{1, \ldots, \omega - 1\}$, $j_1, \ldots, j_\omega \in \{1, \ldots, n\}$, а $\mathfrak{U} \in U$. Под длиной вывода некоторой формулы $\mathfrak{A} \in J(M)$ понимается такое наименьшее $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, что $\mathfrak{A} \in M_l$ и $\mathfrak{A} \notin M_{l-1}$.

База индукции: $l = 0$. Каждая тавтология из Σ' обладает этим свойством, при $m = 0$.

Шаг индукции: Пусть Σ'_l — множество всех тавтологий, выводимых из Σ' за l шагов, то есть длина вывода не превосходит l, и пусть для Σ'_l верно предположение индукции. Покажем, оно верно и для Σ'_{l+1}. Сразу можно заметить, что операция подстановки не изменяет вида формул, поэтому рассмотрим только *modus ponens*. Правило *modus ponens* применимо только к тавтологии вида (6′), при $m = 0$, и какой-нибудь другой тавтологии. Но его применение не изменяет вида тавтологии, так как к антецеденту и консеквенту импликации слева добавляется один и тот же сомножитель, поэтому Σ'_{l+1} также состоит из тавтологий указанного вида.

Определим следующие множества тавтологий:

$$\Sigma_\xi^0 = \{\mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{A}_\xi\} \cup J(\Sigma'),$$
$$\Sigma_\xi^{p+1} = [\Sigma_\xi^p].$$

Выберем в качестве p наименьшее целое неотрицательное число, для которого Σ_ξ^p содержит тавтологию вида

$$\mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{j_k},$$

для которой $k < \omega$, и для каждого $q < p$ в Σ_ξ^q нет таких тавтологий. Так как система Σ_ξ является полной в T и $\Sigma_\xi \subseteq \Sigma_\xi^0$, то такое p всегда найдется. Рассмотрим множество тавтологий

$$M_q = \Sigma_\xi^q \setminus J(\Sigma'),$$

тогда для каждого $q, 0 \leqslant q \leqslant p$, все формулы из M_q имеют вид $\mathfrak{a}_0' \wedge \mathfrak{A}$, для некоторой тавтологии $\mathfrak{A}$. Для M_0 это верно. Пусть это справедливо для M_q и $q < p$, докажем, что все формулы из M_{q+1} также обладают этим свойством. Поскольку, $M_{q+1} = [\Sigma_\xi^q] \setminus J(\Sigma')$, то каждая формула из M_{q+1} может быть получена либо с помощью правила подстановки из тавтологии $\mathfrak{a}_0' \wedge \mathfrak{B} \in M_q$, либо помощью правила *modus ponens* из тавтологий:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{a}_0' \wedge \mathfrak{B} \in M_q, \\ &\mathfrak{a}_0' \wedge \mathfrak{B} \to \mathfrak{C} \in J(\Sigma'). \end{aligned}$$

Правило подстановки не изменяет вида тавтологий, поэтому для него утверждение остается справедливым. Так как $q < p$, то среди тавтологий M_q нет тавтологии вида $\mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{j_k}$, для которой $k < \omega$. Поэтому тавтология $\mathfrak{a}_0' \wedge \mathfrak{B} \to \mathfrak{C} \in J(\Sigma')$ может иметь только вид $(2')$ или $(3')$. Это означает, что формула $\mathfrak{C}$ должна иметь вид $\mathfrak{a}_0' \wedge \mathfrak{A}$, для некоторой тавтологии $\mathfrak{A}$, что и доказывает справедливость утверждения для правила *modus ponens*.

Покажем, что для каждой тавтологии вида:

$$\mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{j_m} \in M_q,$$

слово $a_{j_1} \ldots a_{j_m}$, соответствующее данной тавтологии, является некоторой Σ-продукцией слова ξ. В самом деле, если $q = 0$, то $M_0 = \{\mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{A}_\xi\}$ и, следовательно, для M_0 утверждение верно. Пусть оно верно для M_q и $q < p$, докажем его для M_{q+1}. Пусть тавтология

$$\mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{j_m} \in M_{q+1},$$

тогда она получена с помощью применения правила *modus ponens*, причем возможны три ситуации, в которых она может быть выведена:

$$\begin{aligned}
&1)\quad \mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{\nu_\omega}\\
&\qquad \mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{\nu_\omega} \to \mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{j_m},\\
&2)\quad \mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{\nu_\omega} \wedge \mathfrak{a}_{j_1}\\
&\qquad \mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{\nu_\omega} \wedge \mathfrak{a}_{j_1} \to \mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{j_1} \wedge \mathfrak{a}_{j_2} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{j_m},\\
&3)\quad \mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{j_t} \wedge ((\mathfrak{a}_{j_{t+1}} \wedge \mathfrak{a}_{j_{t+2}}) \wedge \mathfrak{a}_{j_{t+3}} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{j_m})\\
&\qquad \mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{j_t} \wedge ((\mathfrak{a}_{j_{t+1}} \wedge \mathfrak{a}_{j_{t+2}}) \wedge \mathfrak{a}_{j_{t+3}} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{j_m}) \to\\
&\qquad\qquad \to \mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{j_m},
\end{aligned}$$

где $0 \leqslant t \leqslant m-3$. В первых двух случаях слово $\mathfrak{a}_{j_1} \ldots \mathfrak{a}_{j_m}$ является Σ-продукцией слова $\mathfrak{a}_{\nu_1} \ldots \mathfrak{a}_{\nu_\omega}$ и слова $\mathfrak{a}_{\nu_1} \ldots \mathfrak{a}_{\nu_\omega}\mathfrak{a}_{j_1}$ соответственно, которые по предположению являются Σ-продукциями слова ξ, следовательно, оно является Σ-продукцией слова ξ.

Во втором случае однозначно восстанавливается цепочка, по которой выводится данная тавтология:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{\nu_\omega} \wedge \mathfrak{a}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{j_{t+2}}\\
&\mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{\nu_\omega} \wedge \mathfrak{a}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{j_{t+2}} \to \mathfrak{a}_0 \wedge (\mathfrak{a}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{j_{t+2}}) \wedge \mathfrak{A}_\mu\\
&\mathfrak{a}_0 \wedge (\mathfrak{a}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{j_{t+2}}) \wedge \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{j_1} \wedge ((\mathfrak{a}_{j_2} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{j_{t+2}}) \wedge \mathfrak{A}_\mu)\\
&\ldots\\
&\mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{j_1} \wedge \ldots \wedge ((\mathfrak{a}_{j_t} \wedge \mathfrak{a}_{j_{t+1}} \wedge \mathfrak{a}_{j_{t+2}}) \wedge \mathfrak{A}_\mu) \to\\
&\qquad\qquad \to \mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{j_t} \wedge ((\mathfrak{a}_{j_{t+1}} \wedge \mathfrak{a}_{j_{t+2}}) \wedge \mathfrak{A}_\mu)\\
&\mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{j_t} \wedge ((\mathfrak{a}_{j_{t+1}} \wedge \mathfrak{a}_{j_{t+2}}) \wedge \mathfrak{A}_\mu) \to \mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{j_{t+2}} \wedge \mathfrak{A}_\mu,
\end{aligned}$$

где $\mathfrak{A}_\mu = \mathfrak{a}_{j_{t+3}} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{j_m}$ и $\mu = \nu_1$. Тогда слово $\mathfrak{a}_{j_1} \ldots \mathfrak{a}_{j_m}$ является Σ-продукцией слова $\mathfrak{a}_{\nu_1} \ldots \mathfrak{a}_{\nu_\omega}\mathfrak{a}_{j_1} \ldots \mathfrak{a}_{j_{t+2}}$, которое по предположению является Σ-продукцией слова ξ, следовательно, оно является Σ-продукцией слова ξ.

По выбору p в Σ^p_ξ, а следовательно и в M_p, найдется тавтология $\mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{a}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{j_k}$, для которой $k < \omega$. По доказанному выше получаем, что слово $\mathfrak{a}_{j_1} \ldots \mathfrak{a}_{j_k}$ является Σ-продукцией слова ξ, причем его длина меньше ω. Это означает, что множество Σ-продукций слова ξ конечно и лемма доказана.

Теорема 7. *Свойство полноты конечных систем тавтологий алгоритмически неразрешимо.*

Доказательство. Предположим противное, то есть существует алгоритм A_T, решающий задачу распознавания полноты конечных систем тавтологий. Рассмотрим произвольное слово $\xi \in A^*$ и, соответствующую ему, систему тавтологий Σ_ξ. Так как система Σ_ξ конечна, то с помощью алгоритма A_T можно проверить, полна она или нет. По лемме 2 имеем: если система Σ_ξ является полной, то множество Σ-продукций слова ξ конечно, если же Σ_ξ не является полной, то множество Σ-продукций слова ξ бесконечно. Это означает, что алгоритм A_T позволяет решить проблему остановки для однородной системы продукции Поста Σ. В силу теоремы 6 получаем противоречие. Теорема доказана.

Из данной теоремы вытекает важное следствие, касающееся решения проблемы выразимости для исчисления высказываний.

Следствие 2. *Проблема выразимости для исчисления высказываний алгоритмически неразрешима.*

Список литературы

[1] Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г. Введение в математическую логику. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.

[2] Кон П. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968.

[3] Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.

[4] Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1965.

[5] Новиков П. С. Элементы математической логики. М.: Наука, 1973.