О сложности вложения матриц

Д. В. Зайцев

Введение

В этой работе изучается сложность универсальных матриц, которые позволяют получать матрицы заданного класса в качестве подматриц. Под сложностью понимаем размер универсальной матрицы. Подобные объекты рассматривались в работах, посвященных последовательностям и торам де Брёйна [1].

В них накладывались более жёсткие условия, в частности требовалась однозначность выделения подматрицы, поэтому получение минимальных универсальных матриц с размерностью три и больше не удавалось [2]. В данной работе разрешается варьирование универсальной матрицы при идентификации подматрицы, и не требуется однозначность выделения матрицы в универсальной матрице. Допускается произвольная размерность матриц.

Получена лучшая по порядку универсальная матрица. Она может представлять интерес при определении топологии универсального реконфигурируемого чипа.

Работа продолжает исследование начатое в работе [3], где рассматривались универсальные графы.

1. Основные определения и результаты

Пусть задано конечное непустое множество A, которое будем называть алфавитом. Обозначим через $\mathcal{A}$ мощность алфавита A. Можно считать, что наш алфавит состоит из чисел $A = \{0, \dots, \mathcal{A} - 1\}$.

Пусть заданы $P_1, \dots, P_r$, где $P_i = \{1, \dots, n_i\}$ — начальные отрезки натурального ряда. r-мерная матрица M размера $n_1, \dots, n_r$ над A это отображение $M : P_1 \times \ldots \times P_r \to A$.

Обозначим набор размеров r-мерной матрицы $n_1, \dots, n_r$ через $\bar{n}$.

Число вхождений букв из A в $n_1, \dots, n_r$-матрице M обозначим через $V(M)$. Величину $V(M)$ также будем называть числом элементов матрицы или объёмом по аналогии с длиной слова. $V(M) = V_{\bar{n}} = n_1 \cdot \ldots \cdot n_r$.

Каждому элементу $n_1, \dots, n_r$-матрицы соответствует набор из r индексов. На множестве наборов индексов существует лексикографический порядок. Соответственно, мы можем говорить о начальном элементе матрицы и о том, что некоторый элемент матрицы находится ближе или дальше от начального.

Введём конкатенацию двух матриц по выбранному i-тому ($1 \leqslant i \leqslant r$) направлению. Рассмотрим $n_1, \dots, n_{i-1}, n_i, n_{i+1}, \dots, n_r$-матрицу M и $n_1, \dots, n_{i-1}, n'_i, n_{i+1}, \dots, n_r$-матрицу M'. Для конкатенации двух матриц размеры матриц должны быть согласованы. Рассмотрим матрицу M'' размера $n_1, \dots, n_{i-1}, n_i + n'_i, n_{i+1}, \dots, n_r$. Для определённости будем говорить о строках. Когда задано направление, становится не важным, как называть последовательности элементов заданного направления в матрице размерности r. Итак, назовём матрицу M'' конкатенацией матриц M и M' по i-тому направлению, если одномерные строки i-го направления матрицы M'' представляют собой конкатенации соответствующих строк i-го направления матриц M и M'. Формально можно записать это следующим образом. Пусть для любого k такого, что $1 \leqslant k \leqslant r$ и $k \neq i$, j_k принимает значения от 1 до n_k. Получаем строку матрицы M'' с индексами $j_1, \dots, j_{i-1}, j_{i+1}, \dots, j_r$ так

$$a_{j_1,\dots,j_{i-1},1,j_{i+1},\dots,j_r}, \dots \\ \dots, a_{j_1,\dots,j_{i-1},n_i,j_{i+1},\dots,j_r}, b_{j_1,\dots,j_{i-1},1,j_{i+1},\dots,j_r}, \dots \\ \dots, b_{j_1,\dots,j_{i-1},n'_i,j_{i+1},\dots,j_r}.$$

Конкатенация матриц по фиксированному направлению ассоциативна.

Назовём матрицу M_1 размерности r подматрицей (или блоком) матрицы M размерности r, если существует такой набор матриц $\{M_1, \ldots, M_{2r+1}\}$ размерности r, что M можно получить в результате конкатенации следующего вида

$$M = (M_{2r} \ldots (M_4(M_2 M_1 M_3) M_5) \ldots M_{2r+1}),$$

где применяются конкатенации по направлениям $1, \ldots, r$ в соответствующих скобках.

Расположение подматрицы определяется расположением начального элемента этой подматрицы в матрице.

Пусть заданы переменные $x_1, \ldots, x_k$, принимающие значения из алфавита A. Рассмотрим матрицу, в которой зафиксировано k непересекающихся подмножеств элементов. Элементы каждого подмножества принимают значение соответствующей переменной. Подмножества могут иметь разное число элементов и могут быть пустыми. Будем называть элементы таких подмножеств переключателями, зависящими от соответствующей переменной.

Класс матриц над алфавитом A с переключателями от переменных $x_1, \ldots, x_k$ обозначим через $C(A, x_1, \ldots, x_k)$.

Будем говорить, что M вкладывается в матрицу $U \in C(A, x_1, \ldots, x_k)$ (или U порождает M), если существует такой набор значений переменных $x_1, \ldots, x_k$, что M является подматрицей U.

Обозначим класс $n_1, \ldots, n_r$-матриц над алфавитом A через $C_{\bar{n}}$. Универсальная матрица для класса $C_{\bar{n}}$ — это такая матрица $U \in C(A, x_1, \ldots, x_k)$, что любая матрица M из класса $C_{\bar{n}}$ вкладывается в U.

Пусть $\Upsilon_k(C_{\bar{n}}) \subset C(A, x_1, \ldots, x_k)$ — множество универсальных матриц для класса матриц $C_{\bar{n}}$.

Минимальная универсальная матрица $\check{U}$ для данного класса матриц $C_{\bar{n}}$ — это универсальная матрица из $\Upsilon_k(C_{\bar{n}})$, имеющая наименьшее число элементов.

Сложностью вложения класса матриц $C_{\bar{n}}$ в универсальную матрицу из $\Upsilon_k(C_{\bar{n}})$ назовём число элементов в минимальной универсальной матрице $\check{U} \in \Upsilon_k(C_{\bar{n}})$. Обозначим сложность через $L_C(\bar{n}, k)$.

Пусть $\bar{n}_s = (n_{1,s}, \ldots, n_{r,s})$ — последовательность наборов натуральных чисел, задающих размеры r-мерных матриц. Пусть k_s — последовательность натуральных чисел, задающих число переменных.

Теорема 1. *Для любого алфавита A, для любой размерности r, если*
а) $V_{\bar{n}_s} \to +\infty$,
б) $V_{\bar{n}_s} - k_s \gtrsim V_{\bar{n}_s}$,
в) $\forall i\ (1 \leqslant i \leqslant r)\ n_{i,s} \geqslant 2\, \left]\sqrt[r]{\log_{\mathcal{A}} V_{\bar{n}_s}}\right[$,
при $s \to +\infty$, то имеет место $L_C(\bar{n}_s, k_s) \asymp |A|^{V_{\bar{n}_s} - k_s}$.

2. Доказательство теоремы

Пусть t — вещественное число $(0 < t < 1)$. Положим $q = q(\bar{n}_s, t) = [(V_{\bar{n}_s})^t]$.

Построим некоторую универсальную матрицу из $\Upsilon_{k_s}(C_{\bar{n}_s})$. Будем обозначать её $U(\bar{n}_s, k_s, q)$. Определим несколько матриц специального вида, которые послужат строительными кирпичиками для $U(\bar{n}_s, k_s, q)$.

Пусть i — целое число $(0 \leqslant i \leqslant q+1)$.

1) Матрица $S_i(\bar{n}_s)$ имеет форму r-мерного куба со сторонами $\left]\sqrt[r]{\log_{\mathcal{A}} V_{\bar{n}_s}}\right[$ элементов. Число $l(\bar{n}_s)$ элементов матрицы $S_i(\bar{n}_s)$ имеет вид:

$$l(\bar{n}_s) = \left]\sqrt[r]{\log_{\mathcal{A}} V_{\bar{n}_s}}\right[^r.$$

$$l(\bar{n}_s) \sim \log_{\mathcal{A}} V_{\bar{n}_s} \quad \text{при} \quad s \to +\infty.$$

$S_i(\bar{n}_s)$ содержит подматрицу с размерами сторон $\left[\sqrt[r]{l(\bar{n}_s) -]\log_{\mathcal{A}}(q+1)[}\right]$. Пусть начальный элемент этой подматрицы расположен на максимально возможном удалении от начального элемента матрицы $S_i(\bar{n}_s)$. Эта подматрица заполнена нулями кроме последнего элемента, равного единице. Число элементов в этой подматрице равно $\left[\sqrt[r]{l(\bar{n}_s) -]\log_{\mathcal{A}}(q+1)[}\right]^r$.

Остальная часть $S_i(\bar{n}_s)$ занята записью числа i в алфавите A. Для этого требуется не более $]\log_{\mathcal{A}}(q+1)[$ элементов матрицы, поэтому выделенного объёма $l(\bar{n}_s) - \left[\sqrt[r]{l(\bar{n}_s) -]\log_{\mathcal{A}}(q+1)[}\right]^r$ достаточно. См. рис. 1.

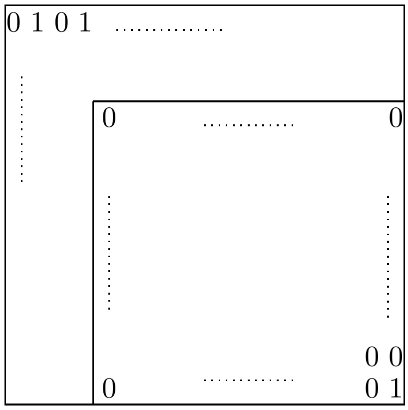

Рис. 1. Матрица $S_i(\bar{n}_s)$ при $r = 2$.

2) Пусть $W'_{i,j}(\bar{n}_s, k_s)$ — матрица из $C_{\bar{n}_s}$. Пусть $d_i(\bar{n}_s, k_s)$ — число матриц с первым индексом равным i. Опишем устройство матрицы $W'_{i,j}(\bar{n}_s, k_s)$ при $0 \leqslant i \leqslant q$ и $1 \leqslant j \leqslant d_i(\bar{n}_s, k_s)$. Определение $W'_{q+1,j}(\bar{n}_s, k_s)$ при $1 \leqslant j \leqslant d_{q+1}(\bar{n}_s, k_s)$ будет дано ниже. Пусть первые k_s элементов матрицы $W'_{i,j}(\bar{n}_s, k_s)$ — переключатели, которые зависят от k_s разных переменных. То есть каждая из имеющихся в распоряжении переменных определяет состояние одного переключателя в $W'_{i,j}(\bar{n}_s, k_s)$. Пусть в оставшейся части матрицы, имеющей $V(W'_{i,j}(\bar{n}_s, k_s)) - k_s = V_{\bar{n}_s} - k_s$ элементов, в некотором фиксированном месте расположена подматрица $S_i(\bar{n}_s)$.

Для определённости, пусть $S_i(\bar{n}_s)$ расположена на максимально возможном удалении от начального элемента матрицы $W'_{i,j}(\bar{n}_s, k_s)$ и от переключателей.

Из условия теоремы б) следует, что существует a $(0 < a \leqslant 1)$ такое, что с некоторого достаточно большого s верно $V_{\bar{n}_s} - k_s \geqslant aV_{\bar{n}_s} > > V(S_i(\bar{n}_s))$. Значит, достаточно объема для подматрицы $S_i(\bar{n}_s)$. По условию теоремы в), никакая сторона матрицы не может расти слишком медленно и препятствовать размещению $S_i(\bar{n}_s)$.

Оставшееся в $W'_{i,j}(\bar{n}_s, k_s)$ место, $V_{\bar{n}_s} - k_s - l(\bar{n}_s)$ элементов, занимают символы алфавита A таким образом, что эта часть матрицы не содержит матриц из $\{S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_{i-1}(\bar{n}_s)\}$ в качестве подматриц.

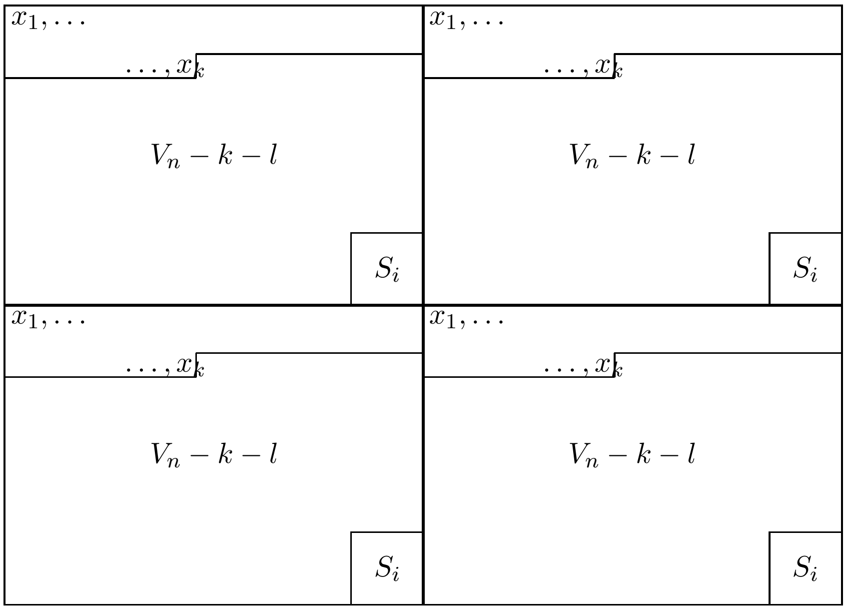

Рис. 2. Матрица $W_{i,j}(\bar{n}_s, k_s)$ и подматрицы $W'_{i,j}(\bar{n}_s, k_s)$ при $r = 2$, $(0 \leqslant i \leqslant q,\ 0 \leqslant j \leqslant d_i(\bar{n}_s, k_s))$.

3) Опишем устройство матрицы $W'_{q+1,j}(\bar{n}_s, k_s)$, где $1 \leqslant j \leqslant d_{q+1}(\bar{n}_s, k_s)$. Также, как в случае $0 \leqslant i \leqslant q$, первые k_s элементов матрицы $W'_{q+1,j}(\bar{n}_s, k_s)$ — переключатели, которые зависят от k_s разных переменных. Пусть в оставшейся части матрицы, имеющей $V(W'_{q+1,j}(\bar{n}_s, k_s)) - k_s = V_{\bar{n}_s} - k_s$ элементов, расположены символы алфавита A таким образом, что эта часть матрицы не содержит матриц из $\{S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_q(\bar{n}_s)\}$ в качестве подматриц.

4) Пусть матрица $W_{i,j}(\bar{n}_s, k_s) \in C_{2\bar{n}_s}$ $(0 \leqslant i \leqslant q,\ 1 \leqslant j \leqslant d_i(\bar{n}_s, k_s))$ имеет размеры сторон $2n_{s,1}, \ldots, 2n_{s,r}$. Пусть, по определению, каждая $W_{i,j}(\bar{n}_s, k_s)$ состоит из 2^r одинаковых $\bar{n}_s$-подматриц $W'_{i,j}(\bar{n}_s, k_s)$ (см. рис. 2).

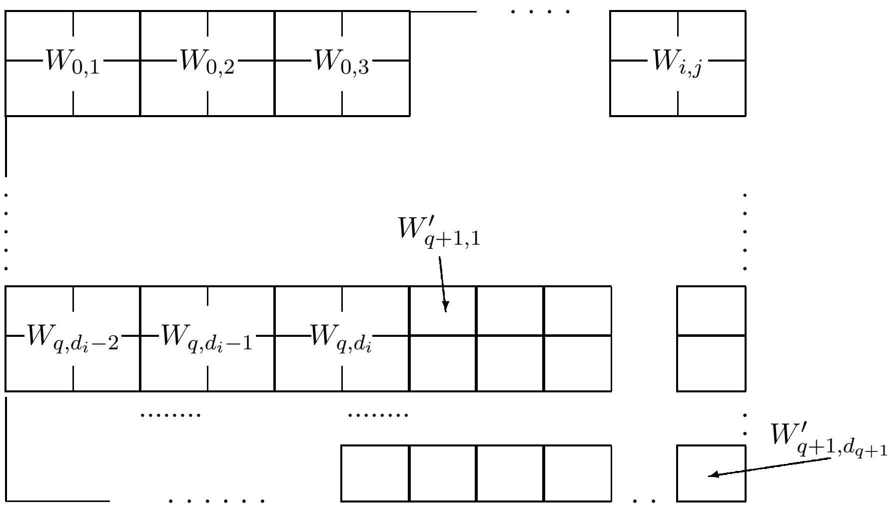

Рис. 3. Матрица $U(\bar{n}_s, k_s, q)$ и подматрицы $W_{i,j}(\bar{n}_s, k_s)$, $W'_{q+1,j}(\bar{n}_s, k_s)$ при $r = 2$.

Теперь покажем, как из составных частей, определённых выше, строится универсальная матрица.

$U(\bar{n}_s, k_s, q)$ состоит из конкатенации $2n_{s,1}, \ldots, 2n_{s,r}$-матриц $W_{i,j}(\bar{n}_s, k_s)$, где $0 \leqslant i \leqslant q$, $1 \leqslant j \leqslant d_i(\bar{n}_s, k_s)$ и $n_{s,1}, \ldots, n_{s,r}$-матриц $W'_{q+1,j}(\bar{n}_s, k_s)$, где $1 \leqslant j \leqslant d_{q+1}(\bar{n}_s, k_s)$ (См. рис. 3). Очерёдность и направление конкатенации не важны, так как при определении места вложения некоторой $n_{s,1}, \ldots, n_{s,r}$-матрицы M в качестве подматрицы матрицы $U(\bar{n}_s, k_s, q)$ мы не будем рассматривать подматрицы матрицы $U(\bar{n}_s, k_s, q)$, которые пересекают границы одной из $W_{i,j}(\bar{n}_s, k_s)$ $(0 \leqslant i \leqslant q,\ 1 \leqslant j \leqslant d_i(\bar{n}_s, k_s))$ или $W'_{q+1,j}(\bar{n}_s, k_s)$ $(1 \leqslant j \leqslant d_{q+1}(\bar{n}_s, k_s))$. Число матриц $W_{i,j}(\bar{n}_s, k_s)$ и матриц $W'_{q+1,j}(\bar{n}_s, k_s)$, то есть значения $d_i(\bar{n}_s, k_s)$ $(0 \leqslant i \leqslant q + 1)$, будут определены в утверждениях 1 и 2.

Заметим, что всегда можно добиться, чтобы r-мерная матрица $U(\bar{n}_s, k_s, q)$ имела форму r-мерного параллелепипеда. Действительно, можно получать $U(\bar{n}_s, k_s, q)$ из матриц $W_{i,j}(\bar{n}_s, k_s)$, каждый раз проводя конкатенацию в одном направлении. Такая конкатенация сохраняет форму параллелепипеда. Дальше присоединяем матрицы

$W'_{q+1,1}(\bar{n}_s, k_s), \ldots, W'_{q+1,d_{q+1}}(\bar{n}_s, k_s)$ в том же направлении. Для выравнивания до параллелепипеда может потребоваться не более $2^{r-1} - 1$ матриц с размерами, как у $W'_{q+1,j}(\bar{n}_s, k_s)$.

Вложение класса $C_{\bar{n}_s}$ в универсальную матрицу будем осуществлять по частям. Рассмотрим подклассы $\Theta_0(\bar{n}_s), \ldots, \Theta_q(\bar{n}_s), \Theta_{q+1}(\bar{n}_s)$ матриц в классе $C_{\bar{n}_s}$. Пусть $\Theta_i(\bar{n}_s)$ $(0 \leqslant i \leqslant q)$ состоит из матриц класса $C_{\bar{n}_s}$, которые содержат $S_i(\bar{n}_s)$ в качестве подматрицы и при этом не содержат ни одной из $\{S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_{i-1}(\bar{n}_s)\}$ в качестве подматрицы. Пусть $\Theta_{q+1}(\bar{n}_s)$ состоит из матриц класса $C_{\bar{n}_s}$, которые не содержат ни одной из $\{S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_q(\bar{n}_s)\}$ в качестве подматриц. То есть сюда входят все оставшиеся матрицы. Из определения следует, что $\bigcup_{i=0}^{q+1} \Theta_i(\bar{n}_s) = C_{\bar{n}_s}$.

Заметим, что подматрица $S_i(\bar{n}_s)$ матрицы $M \in C_{\bar{n}_s}$ здесь может пониматься как подматрица с возможным переходом через границу. Можно сказать, что рассматриваем r-мерные матрицы на r-мерной поверхности тора, полученного из r-мерного параллелепипеда (в котором вписана матрица M) склейкой противоположных сторон.

Рассмотрим непересекающиеся подмножества матриц $U_0(\bar{n}_s, k_s), \ldots, U_q(\bar{n}_s, k_s), U_{q+1}(\bar{n}_s, k_s)$, из элементов которых конкатенациями получается $U(\bar{n}_s, k_s, q)$.

Пусть по определению $U_i(\bar{n}_s, k_s)$ $(0 \leqslant i \leqslant q)$ содержит $d_i(\bar{n}_s, k_s)$ матриц $W_{i,1}(\bar{n}_s, k_s), \ldots, W_{i,d_i}(\bar{n}_s, k_s)$.

Матрицы определённого таким образом $U_i(\bar{n}_s, k_s)$ порождают $\Theta_i(\bar{n}_s)$. Для матриц из $\Theta_i(\bar{n}_s)$ $(0 \leqslant i \leqslant q+1)$ не требуется единственность места вложения. Для любой матрицы M из $\Theta_i(\bar{n}_s)$ мы можем указать $W_{i,j}(\bar{n}_s, k_s)$ из $U_i(\bar{n}_s, k_s)$ такую, что некоторая её $\bar{n}_s$-подматрица равна M при соответствующем выборе значений переменных.

Действительно, во-первых, в каждой матрице из $U_i(\bar{n}_s, k_s)$ можно выбрать $\bar{n}_s$-подматрицу с таким же расположением подматрицы $S_i(\bar{n}_s)$, что и в M. Это следует из следующего. По определению, $W'_{i,j}(\bar{n}_s, k_s)$ содержит подматрицу $S_i(\bar{n}_s)$. Матрица $W_{i,j}(\bar{n}_s, k_s)$ построена из 2^r одинаковых матриц $W'_{i,j}(\bar{n}_s, k_s)$, как указано выше. Следовательно, все возможные расположения $S_i(\bar{n}_s)$ внутри $\bar{n}_s$-подматрицы обеспечены выбором расположения этой $\bar{n}_s$-подматрицы в $W_{i,j}(\bar{n}_s, k_s)$. Во-вторых, нахождение $\bar{n}_s$-подматрицы, в которой блоки, окружающие $S_i(\bar{n}_s)$, такие же как у M, сводится к нахождению $W'_{i,j}(\bar{n}_s, k_s)$ (и, следовательно, $W_{i,j}(\bar{n}_s, k_s)$), содержащей нужные блоки. Если $\bar{n}_s$-подматрица, равная M, пересекает границы $W'_{i,j}(\bar{n}_s, k_s)$ в $W_{i,j}(\bar{n}_s, k_s)$, то требуемые блоки в $W'_{i,j}(\bar{n}_s, k_s)$ оказываются переставленными по сравнению с соответствующими блоками M (см. рис 4). В-третьих, если есть множество матриц, порожденных совокупностью матриц $U_i(\bar{n}_s, k_s) = \{W_{i,0}(\bar{n}_s, k_s), \ldots, W_{i,d_i}(\bar{n}_s, k_s)\}$, таких, что каждая не содержит ни одной из $\{S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_{i-1}(\bar{n}_s)\}$ на выделенных местах (не соответствующих переключателю или $S_i(\bar{n}_s)$ при вложении), то в качестве их подмножества есть и все матрицы, не содержащие матриц из $\{S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_{i-1}(\bar{n}_s)\}$ нигде.

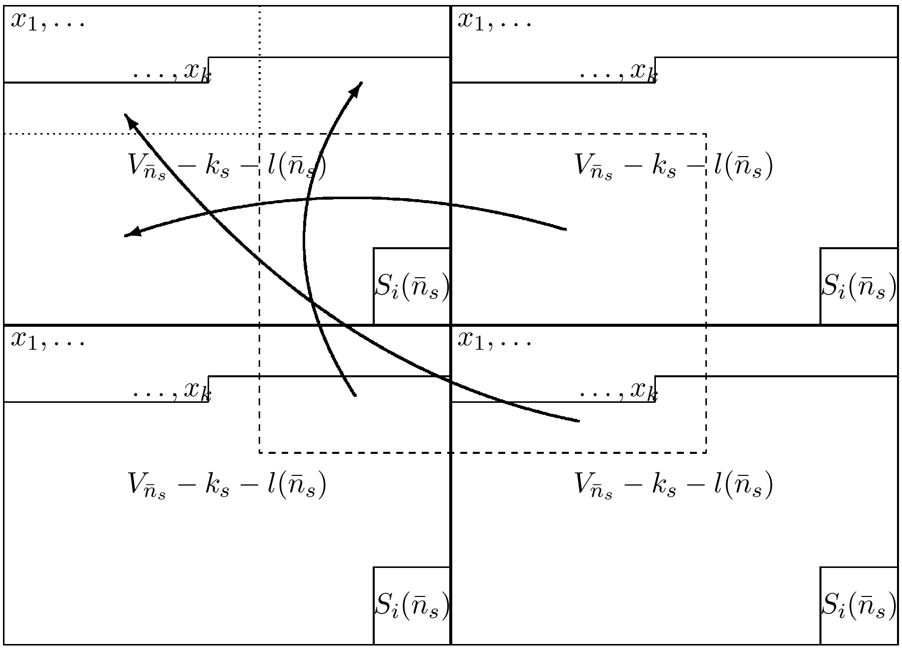

Рис. 4. Матрица $W_{i,j}(\bar{n}_s, k_s)$, подматрицы $W'_{i,j}(\bar{n}_s, k_s)$ при $r = 2$ ($0 \leqslant i \leqslant q$, $0 \leqslant j \leqslant d_i(\bar{n}_s, k_s)$) и подматрица M.

Пусть по определению $U_{q+1}(\bar{n}_s, k_s)$ содержит матрицы $W'_{q+1,1}(\bar{n}_s, k_s), \ldots, W'_{q+1,d_{q+1}}(\bar{n}_s, k_s)$.

Матрицы определённого таким образом $U_{q+1}(\bar{n}_s, k_s)$ порождают $\Theta_{q+1}(\bar{n}_s)$. Действительно, если совокупностью матриц $\{W'_{q+1,1}(\bar{n}_s, k_s), \ldots, W'_{q+1,d_{q+1}}(\bar{n}_s, k_s)\}$ порождаются все $\bar{n}_s$-матрицы, не содержащие подматриц из $\{S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_q(\bar{n}_s)\}$ на выделенных местах, то в качестве их подмножества есть и все матрицы, не содержащие подматриц из $\{S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_q(\bar{n}_s)\}$ нигде. Значит, в совокупности матриц $\{W'_{q+1,1}(\bar{n}_s, k_s), \ldots, W'_{q+1,d_{q+1}}(\bar{n}_s, k_s)\}$ при некотором наборе значений переманных можно указать любую $\bar{n}_s$-подматрицу, не содержащую подматриц из $\{S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_q(\bar{n}_s)\}$ нигде.

Поскольку все матрицы класса $C_{\bar{n}_s}$ вложены в объединение $\bigcup_{i=0}^{q+1} U_i(\bar{n}_s, k_s)$, то матрица $U(\bar{n}_s, k_s, q)$ универсальна. Остаётся найти её размеры.

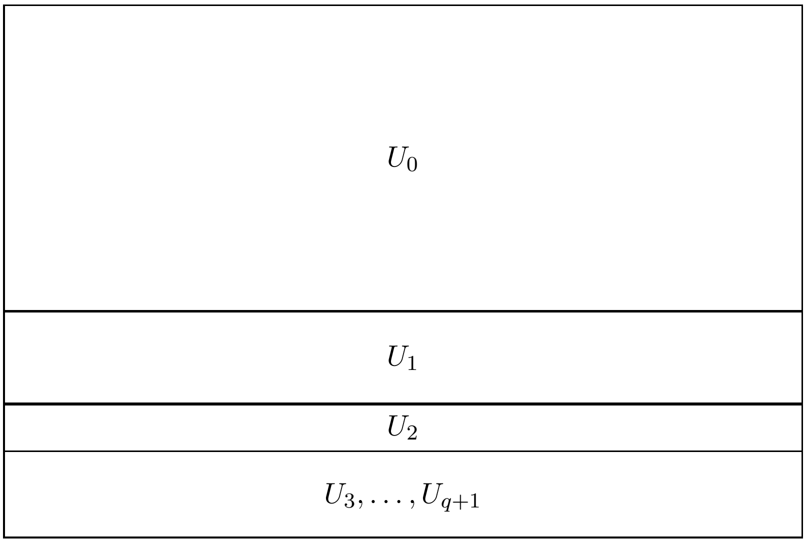

Рис. 5. Матрица $U(\bar{n}_s, k_s, q)$ и подмножества $U_i(\bar{n}_s, k_s)$ при $r = 2$.

Приведём простейшую верхнюю оценку сложности вложения. Число матриц в $C_{\bar{n}_s}$ равно $\mathcal{A}^{V_{\bar{n}_s}}$. Их можно вложить в $\mathcal{A}^{V_{\bar{n}_s} - k_s}$ $n_{s,1}, \ldots$ $\ldots, n_{s,r}$-матриц, содержащих k_s переключателей от k_s различных переменных в каждой. Поскольку $V_{\bar{n}_s}$ — число элементов в одной матрице, то общее число элементов в универсальной матрице, составленной из них, равно $V_{\bar{n}_s}\mathcal{A}^{V_{\bar{n}_s}-k_s}$. Ниже мы покажем, что на самом деле достаточно значительно меньше.

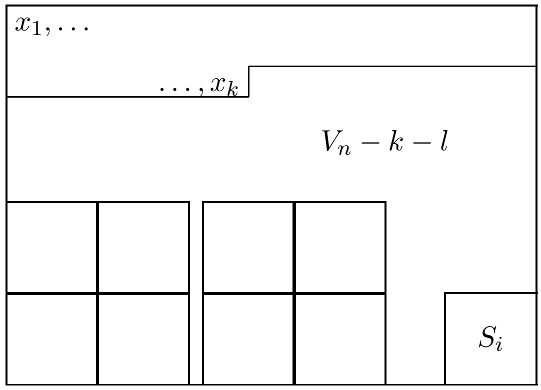

Рис. 6. Матрица $W'_{ij}(\bar{n}_s, k_s)$ и подматрицы с $2^r l_s(\bar{n}_s)$ элементами при $r = 2$.

После того, как мы определили $U(\bar{n}_s, k_s, q)$, перейдём к подсчёту верхней оценки её размера.

Утверждение 1. *Существует* a $(0 < a \leqslant 1)$ *такое, что для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $N(\varepsilon)$ *такое, что для любых* $t \in (0,1)$, $i \in \{0, \ldots, q\}$ *и* $s > N(\varepsilon)$ *имеет место*

$$|U_i(\bar{n}_s, k_s)| = d_i(\bar{n}_s, k_s) < \left(\frac{1}{e^{\frac{(1-t)a}{2^r}}} + \varepsilon\right)^i \mathcal{A}^{V_{\bar{n}_s}-k_s-\log_{\mathcal{A}} V_{\bar{n}_s}}.$$

Пусть $\Omega(\bar{n}_s, k_s, i)$ — класс $\bar{n}_s$-матриц, в которых первые k_s элементов занимают переключатели от k_s разных переменных, а на максимальном удалении от начала расположена подматрица $S_i(\bar{n}_s)$. Мы договорились размещать переключатели, заполняя ими элементы матрицы по порядку. Порядок выбран лексикографический на наборах значений индексов элементов матрицы. Таким образом, если k_s растёт, переключатели заполняют строки, потом слои всё большей размерности. Пусть M принадлежит $\Omega(\bar{n}_s, k_s, i)$. Обозначим часть матрицы M, не занятую переключателями и $S_i(\bar{n}_s)$, через H_M. В H_M содержится $V_{\bar{n}_s} - k_s - l(\bar{n}_s)$ элементов.

Пусть $\Omega'(\bar{n}_s, k_s, i)$ — это подкласс класса матриц $\Omega(\bar{n}_s, k_s, i)$ такой, что для любой $M \in \Omega'(\bar{n}_s, k_s, i)$ её H_M не содержит матриц из $\{S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_{i-1}(\bar{n}_s)\}$ в качестве подматриц.

Число матриц из $\Omega(\bar{n}_s, k_s, i)$, в которых нет матриц из $\{S_0, \ldots \ldots, S_{i-1}\}$, не превосходит число матриц из $\Omega'(\bar{n}_s, k_s, i)$. Это верно, поскольку второе ограничение даёт большую свободу выбора матриц.

Матрицы множества $\Omega'(\bar{n}_s, k_s, i)$ были (по определению) взяты в качестве $W'_{i,j}(\bar{n}_s, k_s)$ для построения матриц $W_{i,j}(\bar{n}_s, k_s)$, из которых состоит $U_i(\bar{n}_s, k_s)$. Имеем $|\Omega'(\bar{n}_s, k_s, i)| = |U_i(\bar{n}_s, k_s)|$.

Из условия теоремы б) следует, что существует a $(0 < a \leqslant 1)$ такое, что с некоторого достаточно большого s верно $V_{\bar{n}_s} - k_s \geqslant aV_{\bar{n}_s}$. Значит, объем, не занятый переключателями, растёт быстрее $2^r l(\bar{n}_s)$. Кроме того, по условию теоремы в), ни одна сторона матрицы не меньше $2\,\big]\sqrt[r]{\log_{\mathcal{A}} V_{\bar{n}_s}}\big[$. Следовательно, начиная с некоторого s, матрица со сторонами $2\,\big]\sqrt[r]{\log_{\mathcal{A}} V_{\bar{n}_s}}\big[$ поместится в $H_{W'_{i,j}(\bar{n}_s,k_s)}$. Благодаря условию а), с ростом $V_{\bar{n}_s}$ число подматриц такого размера, которые можно разместить в $H_{W'_{i,j}(\bar{n}_s,k_s)}$ без попарных пересечений, растёт.

Пусть $\Xi(\bar{n}_s)$ — это класс матриц с размерами сторон $2\,\big]\sqrt[r]{\log_{\mathcal{A}} V_{\bar{n}_s}}\big[$ и элементами из A. Число элементов матрицы из $\Xi(\bar{n}_s)$ равно $2^r l(\bar{n}_s)$. В $H_{W'_{i,j}(\bar{n}_s,k_s)}$ рассмотрим множества непересекающихся подматриц, принадлежащих $\Xi(\bar{n}_s)$, (см. рис. 6). Множество таких подматриц, имеющее наибольную мощность, обозначим через $J_{W'_{i,j}(\bar{n}_s,k_s)}$. Из определения следует, что

$$|J_{W'_{i,j}(\bar{n}_s,k_s)}| \leqslant \left[\frac{V_{\bar{n}_s} - k_s - l(\bar{n}_s)}{2^r l(\bar{n}_s)}\right] \leqslant \frac{V_{\bar{n}_s} - k_s - l(\bar{n}_s)}{2^r l(\bar{n}_s)}.$$

Пусть $\Omega''(\bar{n}_s, k_s, i)$ — это подкласс класса матриц $\Omega(\bar{n}_s, k_s, i)$ такой, что для любой матрицы $M \in \Omega''(\bar{n}_s, k_s, i)$ любая матрица $N \in J_M$ не содержит подматриц из $\{S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_{i-1}(\bar{n}_s)\}$. Число матриц из $\Omega'(\bar{n}_s, k_s, i)$ не превосходит число матриц из $\Omega''(\bar{n}_s, k_s, i)$.

Для оценки мощности множества $\Omega''(\bar{n}_s, k_s, i)$ найдём верхнюю оценку мощности множества матриц из $\Xi(\bar{n}_s)$, не содержащих подматриц из $\{S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_{i-1}(\bar{n}_s)\}$. Для этого достаточно найти нижнюю оценку мощности множества матриц из $\Xi(\bar{n}_s)$, содержащих хотя бы одну подматрицу из $\{S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_{i-1}(\bar{n}_s)\}$ и вычислить разность $|\Xi(\bar{n}_s)|$ и этой нижней оценки.

Покажем, сколько по меньшей мере есть матриц в $\Xi(\bar{n}_s)$, которые содержат подматрицу из $\{S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_{i-1}(\bar{n}_s)\}$. Рассмотрим произвольную матрицу $N \in \Xi(\bar{n}_s)$ (см. рис. 7). Обозначим через $\mathcal{S}$ класс матриц с размерами сторон $\left]\sqrt[r]{\log_{\mathcal{A}} V_{\bar{n}_s}}\right[$, с элементами из A. Матрицы $\{S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_q(\bar{n}_s)\}$ принадлежат $\mathcal{S}$.

Будем ссылаться на подматрицы по расположению начального элемента и размеру. Обозначим через $O_1(\bar{n}_s, q)$ блок нулей с единицей в последнем элементе (см. определение $S_i(\bar{n}_s)$). Напомним, что $O_1(\bar{n}_s, q)$ имеет размеры сторон $\left[\sqrt[r]{l(\bar{n}_s) -]\log_{\mathcal{A}}(q+1)[}\right]$. Число элементов в $O_1(\bar{n}_s, q)$ равно $\left[\sqrt[r]{l(\bar{n}_s) -]\log_{\mathcal{A}}(q+1)[}\right]^r$. Пусть $P(\bar{n}_s, q)$ — подматрица матрицы N, чей начальный элемент совпадает с начальным элементом матрицы N, имеющая размер, как у $O_1(\bar{n}_s, q)$. Пусть P' — подматрица матрицы N, чей начальный элемент совпадает с начальным элементом матрицы N и размеры сторон равны $p_1, \ldots, p_r$.

Если подматрица матрицы N, у которой начальный элемент лежит в подматрице $P(\bar{n}_s, q)$, равна одной из $\{S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_q(\bar{n}_s)\}$, и её начальный элемент имеет индексы, равные $p_1, \ldots, p_r$, то в N не может быть второй подматрицы, равной одной из $\{S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_q(\bar{n}_s)\}$, у которой начальный элемент лежит в P'. Действительно, при таких условиях блок $O_1(\bar{n}_s, q)$ одной подматрицы пересекается с аналогичным блоком другой. Причём единица одного блока $O_1(\bar{n}_s, q)$ оказывается среди нулей второго блока $O'_1(\bar{n}_s, q)$, чего не может быть по определению $O_1(\bar{n}_s, q)$. См. рис 7. Отсюда следует, что в $\Xi(\bar{n}_s)$ можно выделить не менее $|P(\bar{n}_s, q)| = \left[\sqrt[r]{l(\bar{n}_s) -]\log_{\mathcal{A}}(q+1)[}\right]^r$ непересекающихся классов матриц, имеющих одинаковое место первой встречи заданной подматрицы из $\{S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_q(\bar{n}_s)\}$.

i — мощность множества $\{S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_{i-1}(\bar{n}_s)\}$.

$\mathcal{A}^{2^r l(\bar{n}_s) - l(\bar{n}_s)}$ — количество матриц в $\Xi(\bar{n}_s)$, которые имеют заданную подматрицу с $l(\bar{n}_s)$ элементами.

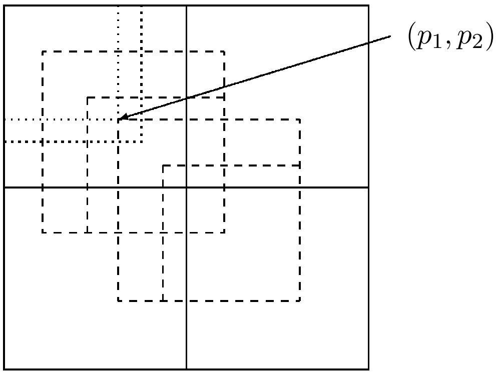

Рис. 7. Матрица N и пара подматриц из $\{S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_{i-1}(\bar{n}_s)\}$ при $r = 2$.

$|P(\bar{n}_s, q)|\mathcal{A}^{2^r l(\bar{n}_s) - l(\bar{n}_s)} i$ — нижняя оценка числа матриц в $\Xi(\bar{n}_s)$, содержащих хотя бы одну из $\{S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_{i-1}(\bar{n}_s)\}$.

Получаем верхнюю оценку числа матриц в $\Xi(\bar{n}_s)$, которые не содержат ни одной из $\{S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_{i-1}(\bar{n}_s)\}$. Она равна

$$\mathcal{A}^{2^r l(\bar{n}_s)} - |P(\bar{n}_s, q)|\mathcal{A}^{2^r l(\bar{n}_s) - l(\bar{n}_s)} i.$$

Поскольку в $H_{W'_{ij}(\bar{n}_s, k_s)}$ число непересекающихся подматриц из $\Xi(\bar{n}_s)$ не превосходит $|J_{W'_{ij}(\bar{n}_s, k_s)}| \leqslant \frac{V_{\bar{n}_s} - k_s - l(\bar{n}_s)}{2^r l(\bar{n}_s)}$, получаем

$$|U_i(\bar{n}_s, k_s)| = d_i(\bar{n}_s, k_s) < |\Omega''(\bar{n}_s, k_s, i)| < \\ < (\mathcal{A}^{2^r l(\bar{n}_s)} - |P(\bar{n}_s, q)|\mathcal{A}^{2^r l(\bar{n}_s) - l(\bar{n}_s)} i)^{\frac{V_{\bar{n}_s} - k_s - l(\bar{n}_s)}{2^r l(\bar{n}_s)}}.$$

Условия, накладываемые на матрицы из $U_0(\bar{n}_s, k_s)$ более простые, чем при $i > 0$ (нет запрещённых подматриц). Легко найти, что

$$d_0(\bar{n}_s, k_s) = \mathcal{A}^{V_{\bar{n}_s} - k_s - l(\bar{n}_s)}.$$

Для оценки сверху мощности $d_i(\bar{n}_s, k_s)$ при $i > 0$ нам будет удобно рассмотреть отношение $d_i(\bar{n}_s, k_s)$ к $\mathcal{A}^{V_{\bar{n}_s} - k_s - l(\bar{n}_s)}$.

$$\frac{d_i(\bar n_s,k_s)}{\mathcal{A}^{V_{\bar n_s}-k_s-l(\bar n_s)}}<\frac{(\mathcal{A}^{2^r l(\bar n_s)}-|P(\bar n_s,q)|\mathcal{A}^{2^r l(\bar n_s)-l(\bar n_s)}i)^{\frac{V_{\bar n_s}-k_s-l(\bar n_s)}{2^r l(\bar n_s)}}}{\mathcal{A}^{V_{\bar n_s}-k_s-l(\bar n_s)}}=$$

$$=\left(\frac{\mathcal{A}^{2^r l(\bar n_s)}-|P(\bar n_s,q)|\mathcal{A}^{2^r l(\bar n_s)-l(\bar n_s)}i}{\mathcal{A}^{2^r l(\bar n_s)}}\right)^{\frac{V_{\bar n_s}-k_s-l(\bar n_s)}{2^r l(\bar n_s)}}=$$

$$=\left(\left(1-\frac{|P(\bar n_s,q)|i}{\mathcal{A}^{l(\bar n_s)}}\right)^{\frac{\mathcal{A}^{l(\bar n_s)}}{|P(\bar n_s,q)|i}}\right)^{\frac{(V_{\bar n_s}-k_s-l(\bar n_s))|P(\bar n_s,q)|i}{2^r l(\bar n_s)A^{l(\bar n_s)}}}$$

Рассмотрим функцию двух аргументов $h(x,y)=x^y$. И рассмотрим следующие множества значений аргументов $\frac{1}{e}\leqslant x\leqslant c<1$, $0\leqslant y<+\infty$, где $c>\frac{1}{e}$ — некоторая константа. Пусть a и b лежат в соответствующих множествах. При стремлении x к a и y к b предел по совокупности переменных равен повторным пределам значений функции $h(x,y)$. Пусть

$$f(s,i)=\left(1-\frac{|P(\bar n_s,q)|i}{\mathcal{A}^{l(\bar n_s)}}\right)^{\frac{\mathcal{A}^{l(\bar n_s)}}{|P(\bar n_s,q)|i}},$$

пусть

$$g(s)=\frac{(V_{\bar n_s}-k_s-l(\bar n_s))|P(\bar n_s,q)|}{2^r l(\bar n_s)A^{l(\bar n_s)}},$$

тогда

$$\frac{d_i(\bar n_s,k_s)}{\mathcal{A}^{V_{\bar n_s}-k_s-l(\bar n_s)}}<h(f(s,i),g(s)i)=(f(s,i))^{g(s)i}.$$

Поскольку при $s\to+\infty$ верно, $V_{\bar n_s}\to+\infty$, $l(\bar n_s)\sim\log_{\mathcal{A}}V_{\bar n_s}$ и $q\sim(V_{\bar n_s})^t$, то $|P(\bar n_s,q)|\sim(1-t)\log_{\mathcal{A}}V_{\bar n_s}$. Следовательно, $\frac{\mathcal{A}^{l(\bar n_s)}}{|P(\bar n_s,q)|i}\sim$ $\sim\frac{V_{\bar n_s}}{i(1-t)\log_{\mathcal{A}}V_{\bar n_s}}\to+\infty$ при любом постоянном t, допустимом условием, и $0<i\leqslant q=[(V_{\bar n_s})^t]$.

Последовательность $(1-\frac{1}{p_s})^{p_s}$ стремится к $\frac{1}{e}$ справа при $p_s\to+\infty$. Для $f(s,i)$ получаем следующее. Для любого $\varepsilon_0>0$ существует $N'(\varepsilon_0,i)$ такой, что если $s>N'(\varepsilon_0,i)$, то

$$f(s,i)<\frac{1}{e}+\varepsilon_0.$$

Наименьшие значения последовательности $\frac{\mathcal{A}^{l(\bar{n}_s)}}{|P(\bar{n}_s,q)|i}$ наблюдаем при самом большом $i = [(V_{\bar{n}_s})^t]$, следовательно, можем взять $N_0(\varepsilon_0) = N'(\varepsilon_0, [(V_{\bar{n}_s})^t]) \geqslant N'(\varepsilon_0, i)$, который годится для всех рассматриваемых i.

Как следствие, получаем, что для любого $\varepsilon_0 > 0$ существует $N_0(\varepsilon_0)$, что при $s > N_0(\varepsilon_0)$ для любого $g(s) > 0$ верно

$$(f(s,i))^{g(s)} < \left(\frac{1}{e} + \varepsilon_0\right)^{g(s)}.$$

Поскольку по условию теоремы $V_{\bar{n}_s} - k_s \gtrsim V_{\bar{n}_s}$, то существует a $(0 < a \leqslant 1)$, существует $N_1'(a)$, что при $s > N_1'(a)$ верно $V_{\bar{n}_s} - k_s \geqslant aV_{\bar{n}_s}$. Значит, существует a $(0 < a \leqslant 1)$ такое, что для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует $N_1(\varepsilon_1) \geqslant N_1'$, что для любого постоянного t $(0 < t < 1)$ при $s > N_1(\varepsilon_1)$ выполняется

$$\frac{2^r}{1-t} g(s) = \frac{V_{\bar{n}_s} - k_s}{V_{\bar{n}_s}} - \frac{\log_{\mathcal{A}} V_{\bar{n}_s}}{V_{\bar{n}_s}} > \frac{aV_{\bar{n}_s}}{V_{\bar{n}_s}} - \varepsilon_1 = a - \varepsilon_1.$$

Значит, существует a $(0 < a \leqslant 1)$, существует достаточно маленький $1 - \frac{1}{e} > \varepsilon_0 > 0$ такой, что для любого $\varepsilon_1 > 0$, существует $N_2'(a, \varepsilon_0, \varepsilon_1) = \max(N_0, N_1)$ такой, что для любого постоянного t $(0 < t < 1)$ при $s > N_2'$ верно

$$(f(s,i))^{g(s)} < \left(\frac{1}{e} + \varepsilon_0\right)^{g(s)} < \left(\frac{1}{e} + \varepsilon_0\right)^{\frac{1-t}{2^r}(a-\varepsilon_1)}.$$

Существует a $(0 < a \leqslant 1)$, существует ε_0 $(1 - \frac{1}{e} > \varepsilon_0 > 0)$ такой, что для любого $\varepsilon_2 > 0$, существует $\varepsilon_1 > 0$, существует $N_2(a, \varepsilon_0, \varepsilon_2) \geqslant N_2'(a, \varepsilon_0, \varepsilon_1)$, что для любого t $(0 < t < 1)$ при $s > N_2(a, \varepsilon_0, \varepsilon_2)$ верно

$$\begin{aligned}(f(s,i))^{g(s)} &< \left(\frac{1}{e} + \varepsilon_0\right)^{\frac{1-t}{2^r}(a-\varepsilon_1)} = \\ &= \left(\frac{1}{e} + \varepsilon_0\right)^{\frac{1-t}{2^r}a} \left(\frac{1}{e} + \varepsilon_0\right)^{\frac{1-t}{2^r}(-\varepsilon_1)} < \left(\frac{1}{e} + \varepsilon_0\right)^{\frac{1-t}{2^r}a} + \varepsilon_2.\end{aligned}$$

Существует a ($0 < a \leqslant 1$) такой, что для любого $\varepsilon_3 > 0$ существует ε_0 ($1 - \frac{1}{e} > \varepsilon_0 > 0$) такой, что для любого $\varepsilon_2 > 0$, существует $N_3(a, \varepsilon_3, \varepsilon_2) \geqslant N_2(a, \varepsilon_0, \varepsilon_2)$, что для любого t ($0 < t < 1$) при $s > N_3$ верно

$$(f(s,i))^{g(s)} < \left(\frac{1}{e} + \varepsilon_0\right)^{\frac{1-t}{2^r}a} + \varepsilon_2 < \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1-t}{2^r}a} + \varepsilon_3 + \varepsilon_2.$$

Пусть $\varepsilon \geqslant \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, $N(\varepsilon) \geqslant N_3(a, \varepsilon_3, \varepsilon_2)$. Тогда существует a ($0 < < a \leqslant 1$) такой, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$ такой, что для любого t ($0 < t < 1$), для любого i ($1 \leqslant i \leqslant [(V_{\bar{n}_s})^t]$) при $s > N(\varepsilon)$ выполняется

$$(f(s,i))^{g(s)i} < \left(\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1-t}{2^r}a} + \varepsilon\right)^i$$

С учётом доказанного выше получаем, что существует a ($0 < a \leqslant \leqslant 1$) такой, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$ такой, что для любого t ($0 < t < 1$), для любого i ($1 \leqslant i \leqslant [(V_{\bar{n}_s})^t]$) при $s > N(\varepsilon)$ выполняется

$$\frac{d_i(\bar{n}_s, k_s)}{\mathcal{A}^{V_{\bar{n}_s} - k_s - l(\bar{n}_s)}} < h(f(s,i), g(s)) < \left(\frac{1}{e^{\frac{(1-t)a}{2^r}}} + \varepsilon\right)^i.$$

Следовательно, для $d_i(\bar{n}_s, k_s)$ при тех же условиях справедливо следующее отношение:

$$d_i(\bar{n}_s, k_s) < \left(\frac{1}{e^{\frac{(1-t)a}{2^r}}} + \varepsilon\right)^i \mathcal{A}^{V_{\bar{n}_s} - k_s - \log_{\mathcal{A}} V_{\bar{n}_s}}.$$

Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $N(\varepsilon)$ *такой, что для любых* $t \in (0,1)$ *и* $s > N(\varepsilon)$ *имеет место*

$$d_{q+1}(\bar{n}_s, k_s) < \left(\frac{1}{e} + \varepsilon\right)^{\frac{(1-t)}{2^r}\frac{V_{\bar{n}_s} - k_s}{V_{\bar{n}_s}} V_{\bar{n}_s}^t} \mathcal{A}^{V_{\bar{n}_s} - k_s}.$$

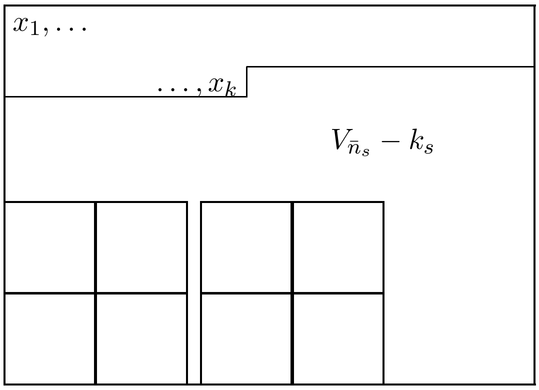

Рис. 8. Матрица $W'_{q+1,j}(\bar{n}_s, k_s)$ и подматрицы с $2^r l_s(\bar{n}_s)$ элементами при $r = 2$.

Пусть $\Omega(\bar{n}_s, k_s, q+1)$ — класс $\bar{n}_s$-матриц из $C_{\bar{n}_s}$, в которых первые k_s элементов занимают переключатели от k_s разных переменных. Пусть M принадлежит $\Omega(\bar{n}_s, k_s, q+1)$. Обозначим часть матрицы M, не занятую переключателями, через H_M. В H_M содержится $V_{\bar{n}_s} - k_s$ элементов.

Пусть $\Omega'(\bar{n}_s, k_s, q+1)$ — это подкласс класса матриц $\Omega(\bar{n}_s, k_s, q+1)$ такой, что для любой $M \in \Omega(\bar{n}_s, k_s, q+1)$ соответствующая H_M не содержит матриц из $\{S_0(\bar{n}_s), \dots, S_q(\bar{n}_s)\}$ в качестве подматриц. Число матриц из $\Omega(\bar{n}_s, k_s, q+1)$, в которых нет матриц из $\{S_0(\bar{n}_s), \dots$ $\dots, S_q(\bar{n}_s)\}$, не превосходит число матриц из $\Omega'(\bar{n}_s, k_s, q+1)$.

$\Omega'(\bar{n}_s, k_s, q+1)$ согласно определению равно $U_{q+1}(\bar{n}_s, k_s)$. Имеем $|\Omega'(\bar{n}_s, k_s, q+1)| = |U_{q+1}(\bar{n}_s, k_s)|$.

Из условия теоремы б) следует, что существует a $(0 < a \leqslant 1)$ такое, что с некоторого достаточно большого s верно $V_{\bar{n}_s} - k_s \geqslant$ $\geqslant aV_{\bar{n}_s}$. Значит, объем, незанятый переключателями, растёт быстрее $2^r l(\bar{n}_s)$. По условию теоремы в) ни одна сторона матрицы не меньше $2\,]\sqrt[r]{\log_{\mathcal{A}} V_{\bar{n}_s}}\,[$. Следовательно, начиная с некоторого s, матрица со сторонами $2\,]\sqrt[r]{\log_{\mathcal{A}} V_{\bar{n}_s}}\,[$ поместится в $H_{W'_{q+1,j}(\bar{n}_s,k_s)}$. Из условия а), с ростом $V_{\bar{n}_s}$ число подматриц такого размера, которые можно разместить в $H_{W'_{q+1,j}(\bar{n}_s,k_s)}$ без попарных пересечений, растёт.

Пусть $\Xi(\bar{n}_s)$ — это класс матриц с размерами сторон $2\left]\sqrt[r]{\log_{\mathcal{A}} V_{\bar{n}_s}}\right[$ и элементами из A. Число элементов матрицы из $\Xi(\bar{n}_s)$ равно $2^r l(\bar{n}_s)$. В $H_{W'_{q+1,j}(\bar{n}_s,k_s)}$ рассмотрим множества непересекающиеся подматриц, принадлежащих $\Xi(\bar{n}_s)$, (см. рис. 8). Множество таких подматриц, имеющее наибольную мощность, обозначим через $J_{W'_{q+1,j}(\bar{n}_s,k_s)}$. Из определения следует, что

$$|J_{W'_{q+1,j}(\bar{n}_s,k_s)}| \leqslant \left[\frac{V_{\bar{n}_s} - k_s}{2^r l(\bar{n}_s)}\right] \leqslant \frac{V_{\bar{n}_s} - k_s}{2^r l(\bar{n}_s)}.$$

Пусть $\Omega''(\bar{n}_s, k_s, q+1)$ — это подкласс $\Omega(\bar{n}_s, k_s, q+1)$ такой, что для любой $M \in \Omega(\bar{n}_s, k_s, q+1)$ любая $N \in J_M$ не содержит подматриц из $\{S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_q(\bar{n}_s)\}$. Число матриц из $\Omega'(\bar{n}_s, k_s, q+1)$ не превосходит число матриц из $\Omega''(\bar{n}_s, k_s, q+1)$.

Для оценки мощности множества $\Omega''(\bar{n}_s, k_s, q+1)$ найдём верхнюю оценку мощности множества матриц из $\Xi(\bar{n}_s)$, не содержащих подматриц из $\{S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_q(\bar{n}_s)\}$. Для этого достаточно найти нижнюю оценку мощности множества матриц из $\Xi(\bar{n}_s)$, содержащих хотя бы одну подматрицу из $\{S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_q(\bar{n}_s)\}$ и вычислить разность $|\Xi(\bar{n}_s)|$ и этой нижней оценки.

Покажем, сколько по меньшей мере есть матриц в $\Xi(\bar{n}_s)$, которые содержат подматрицу из $\{S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_q(\bar{n}_s)\}$. Рассмотрим произвольную матрицу $N \in \Xi(\bar{n}_s)$ (см. рис. 7). Обозначим через $\mathcal{S}$ класс матриц с размерами сторон $\left]\sqrt[r]{\log_{\mathcal{A}} V_{\bar{n}_s}}\right[$, с элементами из A. Матрицы из $\{S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_q(\bar{n}_s)\}$ принадлежат S.

Будем ссылаться на подматрицы по расположению начального элемента и размеру. Рассмотрим $O_1(\bar{n}_s, q)$ блок нулей с единицей в последнем элементе (см. определение $S_i(\bar{n}_s)$). Напомним, что $O_1(\bar{n}_s, q)$ имеет размеры сторон $\left[\sqrt[r]{l(\bar{n}_s) -]\log_{\mathcal{A}}(q+1)[}\right]$. Число элементов в $O_1(\bar{n}_s, q)$ равно $\left[\sqrt[r]{l(\bar{n}_s) -]\log_{\mathcal{A}}(q+1)[}\right]^r$. Пусть, как и раньше, $P(\bar{n}_s, q)$ — подматрица матрицы N, чей начальный элемент совпадает с начальным элементом матрицы N, имеющая размер, как у $O_1(\bar{n}_s, q)$. Пусть P' — подматрица матрицы N, чей начальный элемент совпадает с начальным элементом матрицы N и размеры сторон равны $p_1, \ldots, p_r$.

Если подматрица матрицы N, у которой начальный элемент лежит в подматрице $P(\bar{n}_s, q)$, равна одной из $\{S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_q(\bar{n}_s)\}$, и её начальный элемент имеет индексы, равные $p_1, \ldots, p_r$, то в N не может быть второй подматрицы, равной одной из $\{S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_q(\bar{n}_s)\}$, у которой начальный элемент лежит в P'. См. рис 7. Это предложение уже было доказано в утв. 1. Отсюда следует, что в $\Xi(\bar{n}_s)$ можно выделить не менее $|P(\bar{n}_s, q)| = \left[\sqrt[r]{l(\bar{n}_s) -]\log_{\mathcal{A}}(q+1)[}\right]^r$ непересекающихся классов матриц, имеющих одинаковое место первой встречи данной подматрицы из $\{S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_q(\bar{n}_s)\}$.

$q+1$ — мощность множества $\{S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_q(\bar{n}_s)\}$.

$\mathcal{A}^{2^r l(\bar{n}_s) - l(\bar{n}_s)}$ — количество матриц в $\Xi(\bar{n}_s)$, которые имеют заданную подматрицу с $l(\bar{n}_s)$ элементами.

$|P(\bar{n}_s, q)|\mathcal{A}^{2^r l(\bar{n}_s) - l(\bar{n}_s)}(q+1)$ — нижняя оценка числа матриц в $\Xi(\bar{n}_s)$, содержащих хотя бы одну из $S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_q(\bar{n}_s)$.

Получаем верхнюю оценку числа матриц в $\Xi(\bar{n}_s)$, которые не содержат ни одной из $S_0(\bar{n}_s), \ldots, S_q(\bar{n}_s)$, равную

$$\mathcal{A}^{2^r l(\bar{n}_s)} - |P(\bar{n}_s, q)|\mathcal{A}^{2^r l(\bar{n}_s) - l(\bar{n}_s)}(q+1).$$

Поскольку в $H_{W'_{ij}(\bar{n}_s, k_s)}$ число непересекающихся подматриц из $\Xi(\bar{n}_s)$ не превосходит $|J_{W'_{(q+1),j}(\bar{n}_s, k_s)}| \leqslant \frac{V_{\bar{n}_s} - k_s}{2^r l(\bar{n}_s)}$, получаем

$$|U_{q+1}(\bar{n}_s, k_s)| = d_{q+1}(\bar{n}_s, k_s) < |\Omega''(k_s, q+1)| <$$
$$< (\mathcal{A}^{2^r l(\bar{n}_s)} - |P(\bar{n}_s, q)|\mathcal{A}^{2^r l(\bar{n}_s) - l(\bar{n}_s)}(q+1))^{\frac{V_{\bar{n}_s} - k_s}{2^r l(\bar{n}_s)}}.$$

Для оценки сверху мощности $d_{q+1}(\bar{n}_s, k_s)$ нам будет удобно рассмотреть отношение $d_{q+1}(\bar{n}_s, k_s)$ к $\mathcal{A}^{V_{\bar{n}_s} - k_s}$. Поскольку при $s \to +\infty$ $V_{\bar{n}_s} \to +\infty$, $l(\bar{n}_s) \sim \log_{\mathcal{A}} V_{\bar{n}_s}$, $q \sim (V_{\bar{n}_s})^t$, $|P(\bar{n}_s, q)| \sim (1-t)\log_{\mathcal{A}} V_{\bar{n}_s}$, $\frac{\mathcal{A}^{l(\bar{n}_s)}}{|P(\bar{n}_s, q)|(q+1)} \sim \frac{V_{\bar{n}_s}^{(1-t)}}{(1-t)\log_{\mathcal{A}} V_{\bar{n}_s}} \to +\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$ такое, что для любого постоянного t, удовлетворяющего условиям утверждения, при $s > N(\varepsilon)$ верно

$$\frac{d_{q+1}(\bar{n}_s,k_s)}{\mathcal{A}^{V_{\bar{n}_s}-k_s}} < \frac{\left(\mathcal{A}^{2^r l(\bar{n}_s)} - |P(\bar{n}_s,q)|\mathcal{A}^{2^r l(\bar{n}_s)-l(\bar{n}_s)}(q+1)\right)^{\frac{V_{\bar{n}_s}-k_s}{2^r l(\bar{n}_s)}}}{\mathcal{A}^{V_{\bar{n}_s}-k_s}} =$$

$$= \left(\frac{\mathcal{A}^{2^r l(\bar{n}_s)} - |P(\bar{n}_s,q)|\mathcal{A}^{2^r l(\bar{n}_s)-l(\bar{n}_s)}(q+1)}{\mathcal{A}^{2^r l(\bar{n}_s)}}\right)^{\frac{V_{\bar{n}_s}-k_s}{2^r l(\bar{n}_s)}} =$$

$$= \left(\left(1 - \frac{|P(\bar{n}_s,q)|(q+1)}{\mathcal{A}^{l(\bar{n}_s)}}\right)^{\frac{\mathcal{A}^{l(\bar{n}_s)}}{|P(\bar{n}_s,q)|(q+1)}}\right)^{\frac{(V_{\bar{n}_s}-k_s)|P(\bar{n}_s,q)|(q+1)}{2^r l(\bar{n}_s)\mathcal{A}^{l(\bar{n}_s)}}} <$$

$$< \left(\frac{1}{e}+\varepsilon\right)^{\frac{(1-t)}{2^r}\frac{V_{\bar{n}_s}-k_s}{V_{\bar{n}_s}}V_{\bar{n}_s}^t}.$$

Следовательно, для $d_{q+1}(\bar{n}_s,k_s)$ также справедливо следующее отношение

$$d_{q+1}(\bar{n}_s,k_s) < \left(\frac{1}{e}+\varepsilon\right)^{\frac{(1-t)}{2^r}\frac{V_{\bar{n}_s}-k_s}{V_{\bar{n}_s}}V_{\bar{n}_s}^t}\ \mathcal{A}^{V_{\bar{n}_s}-k_s}.$$

Утверждение 2 доказано.

Лемма 1. *Для любого алфавита A, для любой размерности r, если*
а) $V_{\bar{n}_s} \to +\infty$,
б) $V_{\bar{n}_s} - k_s \gtrsim V_{\bar{n}_s}$,
в) $\forall i\ (1 \leqslant i \leqslant r)\ n_{i,s} \geqslant 2\,\big]\sqrt[r]{\log_{\mathcal{A}} V_{\bar{n}_s}}\big[$,
при $s \to +\infty$, то имеет место $L_C(\bar{n}_s,k_s) \lesssim |A|^{V_{\bar{n}_s}-k_s}$.

Доказательство. По определению, сложность вложения класса матриц $C_{\bar{n}_s}$ в универсальную матрицу с переключателями от k_s переменных $L_C(\bar{n}_s,k_s)$ — число элементов в минимальной универсальной матрице для $C_{\bar{n}_s}$. В качестве верхней оценки возьмём число элементов в универсальной матрице $U(\bar{n}_s,k_s,q)$, которую построили выше.

По определению, матрица $U(\bar{n}_s,k_s,q)$ состоит из конкатенации матриц, входящих в множества матриц $U_i(\bar{n}_s,k_s)$ $(0 \leqslant i \leqslant q)$ и $U_{q+1}(\bar{n}_s,k_s)$ (каждая матрица используется один раз). В $U_i(\bar{n}_s,k_s)$ входит $d_i(\bar{n}_s,k_s)$ матриц, имеющих $2^r V_{\bar{n}_s}$ элементов, в $U_{q+1}(\bar{n}_s,k_s)$

входит $d_{q+1}(\bar n_s, k_s)$ матриц, имеющих $V_{\bar n_s}$ элементов в каждой. Следовательно, число элементов универсальной матрицы $U(\bar n_s, k_s, q)$ получаем так

$$|U(\bar n_s, k_s, q)| = 2^r V_{\bar n_s} \sum_{i=0}^{q} d_i(\bar n_s, k_s) + V_{\bar n_s} d_{q+1}(\bar n_s, k_s),$$

$d_i(\bar n_s, k_s)$ было оценено в утверждении 1, $d_{q+1}(\bar n_s, k_s)$ — в утверждении 2. Напомним, что q было выбрано следующего вида: $q = [(V_{\bar n_s})^t]$. Получаем, что существует a $(0 < a \leqslant 1)$ такое, что для любого $\varepsilon >$ > 0 существует $N(\varepsilon)$ такое, что для любого фиксированного $0 < t < 1$ справедливо, если $s > N(\varepsilon)$, то

$$|U(\bar n_s, k_s, q)| < \\ < 2^r V_{\bar n_s} \sum_{i=0}^{q} \left(\frac{1}{e^{\frac{(1-t)a}{2^r}}} + \varepsilon \right)^i \mathcal{A}^{V_{\bar n_s} - k_s - \log_{\mathcal{A}} V_{\bar n_s}} + \\ + V_{\bar n_s} \left(\frac{1}{e} + \varepsilon \right)^{\frac{(1-t)}{2^r} \frac{V_{\bar n_s} - k_s}{V_{\bar n_s}} V_{\bar n_s}^t} \mathcal{A}^{V_{\bar n_s} - k_s}.$$

Используем, что для $\rho \neq 1$ $\sum_{i=0}^{q} \frac{1}{\rho^i} = \frac{\frac{1}{\rho^{q+1}} - 1}{\frac{1}{\rho} - 1}$. Причём при $\rho > 1$ ряд сходится при $q \to +\infty$.

Поскольку $0 < a \leqslant 1$, $0 < t < 1$ и $r > 0$, то можем выбрать $\varepsilon > 0$ такое, чтобы $\frac{1}{e^{\frac{(1-t)a}{2^r}}} + \varepsilon < 1$. При этом $\frac{1}{e} + \varepsilon < 1$ также.

Тогда получаем, что ряд сходится:

$$\sum_{i=0}^{q} \left(\frac{1}{e^{\frac{(1-t)a}{2^r}}} + \varepsilon \right)^i = \frac{\left(\frac{1}{e^{\frac{(1-t)a}{2^r}}} + \varepsilon \right)^{[(V_{\bar n_s})^t] + 1} - 1}{\frac{1}{e^{\frac{(1-t)a}{2^r}}} + \varepsilon - 1}.$$

Числитель последней дроби стремится к -1 справа при $V_{\bar n_s} \to +\infty$. Знаменатель также отрицательный. Следовательно,

$$\sum_{i=0}^{q}\left(\frac{1}{e^{\frac{(1-t)a}{2^r}}}+\varepsilon\right)^i < \frac{-1}{\frac{1}{e^{\frac{(1-t)a}{2^r}}}+\varepsilon-1} =$$
$$= \frac{1}{1-\varepsilon-\frac{1}{e^{\frac{(1-t)a}{2^r}}}} = \frac{1}{1-\varepsilon-e^{\frac{(t-1)a}{2^r}}}$$

Теперь перейдём ко второму слагаемому оценки $|U(\bar{n}_s,k_s,q)|$. Докажем, что $V_{\bar{n}_s}\left(\frac{1}{e}+\varepsilon\right)^{\frac{(1-t)}{2^r}\frac{V_{\bar{n}_s}-k_s}{V_{\bar{n}_s}}V_{\bar{n}_s}^t} < 1$. Поскольку $\frac{1}{e}+\varepsilon<1$, то $d = = \frac{1}{\frac{1}{e}+\varepsilon} > 1$. При таком d неравенство эквивалентно $2^r V_{\bar{n}_s}^{1-t}\log_d V_{\bar{n}_s} < (1-t)(V_{\bar{n}_s}-k_s)$.

Поскольку по условию б) существует a ($0<a\leqslant 1$) такое, что с некоторого достаточно большого s верно $V_{\bar{n}_s}-k_s \geqslant aV_{\bar{n}_s}$, и при любой постоянной t ($0<t<1$) выполняется

$$2^r V_{\bar{n}_s}^{1-t}\log_d V_{\bar{n}_s} < (1-t)aV_{\bar{n}_s} \leqslant (1-t)(V_{\bar{n}_s}-k_s),$$

то при достаточно большом s исходное неравенство тоже верно.

Подставив полученные оценки, имеем

$$L_C(\bar{n}_s,k_s) \leqslant |U(\bar{n}_s,k_s,q)| \lesssim$$
$$\lesssim 2^r V_{\bar{n}_s}\frac{1}{1-e^{\frac{(t-1)a}{2^r}}}\mathcal{A}^{V_{\bar{n}_s}-k_s-\log_{\mathcal{A}}V_{\bar{n}_s}} + \mathcal{A}^{V_{\bar{n}_s}-k_s} =$$
$$= \left(\frac{2^r}{1-e^{\frac{(t-1)a}{2^r}}}+1\right)\mathcal{A}^{V_{\bar{n}_s}-k_s}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Для любой размерности r, для любого числа переменных k_s, для любого алфавита A, для любого $s>0$ имеет место $\mathcal{A}^{V_{\bar{n}_s}-k_s} \leqslant L_C(\bar{n}_s,k_s)$.*

Доказательство. Нижняя оценка доказывается из мощностных соображений. Каждая $\bar{n}_s$-матрица из $C_{\bar{n}_s}$, по определению, имеет $V_{\bar{n}_s}$

элементов, которые берём из алфавита A. Число таких матриц равно $\mathcal{A}^{V_{\bar{n}_s}}$, где $\mathcal{A} = |A|$.

В матрице U можно выделить не более $|U|$ мест, где может быть помещена подматрица. Также имеем неограниченное число переключателей, каждый из которых принимает значение одной из k_s переменных. Переменные также принимают значения из алфавита A. Значит, на каждом месте в матрице U, используя разные наборы значений k_s переменных, может быть порождено не более $\mathcal{A}^{k_s}$ матриц из $C_{\bar{n}_s}$.

Любая универсальная матрица U, в том числе и минимальная, должна порождать все $\bar{n}_s$-матрицы из $C_{\bar{n}_s}$. Следовательно, должно выполняться следующее соотношение:

$$\mathcal{A}^{V_{\bar{n}_s}} \leqslant |U|\mathcal{A}^{k_s}, \text{ следовательно, } \mathcal{A}^{V_{\bar{n}_s}-k_s} \leqslant |U|.$$

Поскольку $L_C(\bar{n}_s, k_s)$ по определению — число элементов в минимальной универсальной матрице для $C_{\bar{n}_s}$, получаем нижнюю оценку

$$\mathcal{A}^{V_{\bar{n}_s}-k_s} \leqslant L_C(\bar{n}_s, k_s),$$

что и требовалось. Лемма доказана.

Утверждение теоремы 1 следует из леммы 1 и леммы 2.
Теорема доказана.

Автор выражает благодарность профессору А. С. Подколзину, под руководством которого выполнена эта работа.

Список литературы

[1] Холл М. Графические методы. Последовательности де Брёйна // В кн.: Комбинаторика. М.: Мир, 1970. С. 128–139.

[2] Hurlbert G., Isaak G. On the de Bruijn torus problem // Journal of Combinatorial Theory. Series A. 1995.

[3] Зайцев Д. В. О сложности вложения графов // Интеллектуальные системы. Т. 11, вып. 1–4. М., 2008. С. 473–492.