О конструктивной характеризации пороговых функций

А. П. Соколов

Введение

Пороговые функции алгебры логики представляют интерес в связи с простотой технической реализации, а также благодаря своим вычислительным возможностям.

Средством задания пороговых функций являются линейные формы вида $x_1w_1 + \ldots + x_nw_n - \sigma$. При этом могут рассматриваться линейные формы, как с действительными, так и с целочисленными коэффициентами. Мы отмечаем, что выразительные возможности данных способов эквивалентны, то есть любая пороговая функция f может быть задана некоторой линейной формой с целочисленными коэффициентами.

Вводится понятие сигнатуры пороговой функции f как набор знаков коэффициентов некоторой линейной формы, задающей f. Оказывается, что если f существенно зависит от всех своих переменных, то сигнатура f определяется однозначным образом. Более того, отношение равенства сигнатур разбивает множество существенных пороговых функций на 2^n взаимно непересекающихся равномощных классов, одним из которых является класс монотонных пороговых функций. Таким образом, структура класса монотонных пороговых функций полностью определяет структуру класса всех пороговых функций.

В работе исследуется сложность преобразования одной пороговой функции, заданной линейной формой, к другой, путем последовательного изменения коэффициентов линейной формы. В качестве меры сложности принимается изменение коэффициента или свободного члена линейной формы на единицу. Данный процесс может интерпретироваться как процесс обучения нейрона с пороговой функцией активации. Для характеризации сложности обучения в худшем случае вводится шенноновская функция $\rho(n)$. Она говорит о том, сколько минимально достаточно выполнить единичных модификаций исходной линейной формы от n переменных для задания желаемой пороговой функции. В работе показывается, что при стремлении n к бесконечности величина $\log \rho(n)$ растет по порядку как $n \log n$.

Для любой пороговой функции существует бесконечное множество задающих ее линейных форм. Линейные формы назовем эквивалентными, если они задают одну и ту же пороговую функцию. Множество всех существенных линейных форм с целочисленными коэффициентами и свободным членом, задающих пороговую функцию f, обозначим $U(f)$. Легко видеть, что множество $U(f)$ замкнуто относительно операции сложения линейных форм. В работе доказано, что всякое множество $U(f)$ содержит единственный базис относительно операции сложения линейных форм, который является счетным и разрешимым, а также описан алгоритм, который последовательно строит базис множества $U(f)$ для заданной пороговой функции f.

1. Основные понятия, постановки и результаты

Введем определения линейной формы и пороговой функции. Пусть $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел, тогда *линейной формой* назовем функцию

$$l_{\vec{w},\sigma}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i - \sigma,$$

определенную на множестве $\mathbb{R}^n$.

Здесь $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ — вектор весовых коэффициентов, а σ — порог. Если все весовые коэффициенты положительные, то будем называть такую линейную форму *положительно-определенной*.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n) : E_2^n \to E_2$, где $E_2 = \{0, 1\}$, называется *пороговой*, если существует линейная форма $l_{\vec{w},\sigma}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 w_1 + \ldots + x_n w_n - \sigma$ такая, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, \text{ если } \sum\limits_{i=1}^{n} x_i w_i - \sigma \geqslant 0; \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

В этом случае говорим, что *линейная форма* $l_{\vec{w},\sigma}$ *задает пороговую функцию* $f(x_1, \ldots, x_n)$ и записываем это так

$$l_{\vec{w},\sigma} \to f(x_1, \ldots, x_n) \text{ или } f_{\vec{w},\sigma}(x_1, \ldots, x_n).$$

Множество всех пороговых функций обозначим $\mathbb{R}T$.

Пороговая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется $\mathbb{Z}$-*пороговой*, если существует линейная форма $x_1 w_1 + \ldots + x_n w_n - \sigma$ с целочисленными коэффициентами и порогом, задающая функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Множество $\mathbb{Z}$-пороговых функций обозначим $\mathbb{Z}T$.

Возникает вопрос, как соотносятся классы функций $\mathbb{Z}T$ и $\mathbb{R}T$? Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Классы* $\mathbb{Z}T$ *и* $\mathbb{R}T$ *совпадают.*

В связи с теоремой 1 далее, если это не будет оговариваться отдельно, будем рассматривать линейные формы только с целочисленными коэффициентами и порогом.

Сигнатурой линейной формы $l_{\vec{w},\sigma} = x_1 w_1 + \ldots + x_n w_n - \sigma$ называем вектор $s\left(l_{\vec{w},\sigma}\right) = (s_1, \ldots, s_n)$, такой что:

$$s_i = \begin{cases} 1, \text{ если } w_i > 0; \\ 0, \text{иначе,} \end{cases}$$

для $i = 1, \ldots, n$.

Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ *существенно зависит от переменного* x_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, если найдутся два набора

$$\begin{aligned} \alpha &= (a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n), \\ \alpha' &= (a_1, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n), \end{aligned}$$

такие, что $f(\alpha) \neq f(\alpha')$.

Пороговую функцию считаем *существенной*, если она существенно зависит от всех своих переменных.

Линейную форму $l_{\vec{w},sigma}$ будем называть *существенной*, если задаваемая ею пороговая функция существенна.

Теорема 2. *Если* $l_{\vec{w},\sigma}$ *и* $l_{\vec{w}',\sigma'}$ *задают существенную пороговую функцию* f*, то* $s\left(l_{\vec{w},\sigma}\right) = s\left(l_{\vec{w}',\sigma'}\right)$.

Из теоремы 2 следует, что сигнатура линейной формы существенной пороговой функции f однозначно определяется этой функцией, что обозначаем $s(f)$. Отношение равенства сигнатур является отношением эквивалентности и задает разбиение множества существенных пороговых функций на классы эквивалентности. Возникает вопрос: сколько этих классов и как они устроены? Следующая теорема дает ответ на данный вопрос.

Пусть $x, d \in E_2$, тогда

$$x^d = \begin{cases} x, & \text{если } d = 1; \\ \bar{x}, & \text{если } d = 0. \end{cases}$$

Функции алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $f'(x_1, \ldots, x_n)$ назовем симметричными относительно переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$; $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$; если

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f'\left(x_1^{d_1}, \ldots, x_n^{d_n}\right),$$

где для всех $j \in \{1, \ldots, n\}$ выполнено

$$\begin{array}{l} d_j = 0, \text{ если } j \in \{i_1, \ldots, i_k\}; \\ d_j = 1, \text{ иначе.} \end{array}$$

Пусть M и M' два множества функций, зависящих от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Назовем множества M и M' симметричными относительно переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$; $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$, если для любой функции $f \in M$ найдется функция $f' \in M'$ симметричная ей относительно переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$, и, наоборот, для любой функции $f' \in M'$ найдется симметричная ей функция $f \in M$.

Назовем множества M и M' симметричными, если они симметричны относительно некоторого непустого множества переменных.

Обозначим через $\mathbb{Z}T^n$ множество пороговых функций от n переменных. Множество существенных пороговых функций от n переменных обозначим через $\widetilde{\mathbb{Z}T}^n$.

Теорема 3. *(Теорема о сигнатурах). Отношение равенства сигнатур разбивает множество* $\widetilde{\mathbb{Z}T}^n$ *на* 2^n *взаимно симметричных равномощных множества, одним из которых является множество монотонных существенных пороговых функций от* n *переменных.*

Введем понятие расстояния между линейными формами и пороговыми функциями.

Пусть $l_{\vec{w}',\sigma'}$ и $l_{\vec{w}'',\sigma''}$ — линейные формы от n переменных. Удаленностью между линейными формами $l_{\vec{w}',\sigma'}$ и $l_{\vec{w}'',\sigma''}$ назовем следующую величину:

$$\rho\left(l_{\vec{w}',\sigma'}; l_{\vec{w}'',\sigma''}\right) = \left|\sigma' - \sigma''\right| + \sum_{i=1}^{n} \left|w_i' - w_i''\right|.$$

Эту величину интерпретируем, как необходимость сделать ρ последовательных единичных изменений компонент одной линейной формы, чтобы получить другую.

Пусть заданы пороговые функции $f'(x_1, \ldots, x_n)$ и $f''(x_1, \ldots, x_n)$. Расстоянием между ними назовем величину:

$$\rho\left(f'; f''\right) = \min_{\substack{l_{\vec{w}',\sigma'} \to f' \\ l_{\vec{w}'',\sigma''} \to f''}} \rho\left(l'; l''\right).$$

Здесь минимум берется по всем линейным формам $l_{\vec{w}',sigma'}$ и $l_{\vec{w}'',sigma''}$, задающим функции f' и f'', соответственно.

Определим величину $\rho(n)$ следующим образом:

$$\rho(n) = \max_{f', f'' \in ZT^n} \rho\left(f'; f''\right).$$

Данная величина характеризует расстояние между наиболее удаленными пороговыми функциями от n переменных. Следующее утверждение характеризует величину $\rho(n)$.

Теорема 4. *Имеет место*

$$\log_2 \rho(n) \asymp n \log_2 n, \text{ \textit{при} } n \to \infty.$$

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — пороговая функция, а l_1 и l_2 — линейные формы от n переменных, задающие f. Легко видеть, что линейная форма l_1+l_2 также задает функцию f. Обозначим $U(f)$ — множество линейных форм от n переменных, задающих f. Как уже отмечалось ранее, множество $U(f)$ замкнуто относительно операции сложения. Возникает вопрос, содержится ли в $U(f)$ базис относительно операции сложения? Если да, то является ли он конечным, и сколько различных базисов содержится в $U(f)$. Следующая теорема дает ответы на эти вопросы.

Теорема 5. *Для любой пороговой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ множество $U(f)$ содержит единственный базис относительно операции сложения, который является счетным и разрешимым.*

Отметим, что в доказательстве Теоремы 5 явно описан алгоритм, который последовательно строит базис множества $U(f)$.

2. Доказательство теоремы 1

Из определения классов $\mathbb{Z}T$ и $\mathbb{R}T$, очевидно, следует, что $\mathbb{Z}T \subseteq \mathbb{R}T$. Докажем обратное вложение. Нетрудно видеть, что справедливо утверждение.

Лемма 1. *Если $l_{\vec{w},\sigma} \to f(x_1, \ldots, x_n)$, то для любого положительного числа k будет верно $l_{k\cdot\vec{w},k\cdot\sigma} \to f(x_1, \ldots, x_n)$.*

Пусть дана линейная форма $l_{\vec{w},\sigma}$ и произвольная точка $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in E_2^n$. Обозначим $\rho_{l_{\vec{w},\sigma}}(\alpha)$ минимальное расстояние от точки α до плоскости l, заданной уравнением $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i w_i - \sigma = 0$.

Лемма 2. *Имеет место*

$$\rho_{l_{\vec{w},\sigma}}(\alpha) = \frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i w_i - \sigma\right|}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i^2}}.$$

Доказательство. Пусть $\beta = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ — точка на плоскости l, расстояние от которой до точки α минимально.

Задача нахождения точки β может быть записана так:

$$\begin{cases} \inf\limits_{\beta} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2 \right), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} b_i w_i - \sigma = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Для решения данной задачи составим функцию Лагранжа:

$$\mathfrak{L}(b_1, \ldots, b_n) = \lambda_0 \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2 + \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{n} b_i w_i - \sigma \right).$$

Необходимым условием экстремума в задаче 1 является равенство нулю частных производных функции Лагранжа по переменным $b_1, \ldots, b_n$, то есть

$$\mathfrak{L}_{b_i} = 0,\ i = 1 \ldots n.$$

Таким образом,

$$\begin{gathered} \mathfrak{L}_{b_1} = \lambda_0 (2b_1 - 2a_1) + \lambda_1 w_1 = 0; \\ \ldots \\ \mathfrak{L}_{b_n} = \lambda_0 (2b_n - 2a_n) + \lambda_1 w_n = 0. \end{gathered}$$

Рассмотрим следующие случаи:

1) пусть $\lambda_0 = 0$, в таком случае $\lambda_1 = 0$, следовательно, все множители Лагранжа равны нулю, поэтому данный случай невозможен;
2) пусть $\lambda_0 = 1$, тогда для всех i имеем $b_i = a_i - \frac{1}{2}\lambda_1 w_i$.
   Для нахождения λ_1 подставим полученные выражения для b_i в ограничение задачи 1 вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_i w_i - \frac{1}{2}\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} w_i^2 - \sigma = 0.$$

Следовательно,

$$\lambda_1 = \frac{2 \cdot \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_j w_j - \sigma \right)}{\sum\limits_{j=1}^{n} w_j^2}.$$

Таким образом, ближайшая к α точка плоскости l для всех i имеет следующие координаты

$$b_i = a_i - \frac{w_i \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_j w_j - \sigma \right)}{\sum\limits_{j=1}^{n} w_j^2}.$$

Квадрат минимального расстояния, соответственно, равен

$$\rho^2_{l_{\vec{w},\sigma}}(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{w_i \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_j w_j - \sigma \right)}{\sum\limits_{j=1}^{n} w_j^2} \right)^2 = \frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_j w_j - \sigma \right)^2}{\sum\limits_{j=1}^{n} w_j^2}.$$

Следовательно,

$$\rho_{l_{\vec{w},\sigma}}(\alpha) = \frac{\left| \sum\limits_{j=1}^{n} a_j w_j - \sigma \right|}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} w_j^2}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Если $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$, то найдутся $\vec{w}' \in \mathbb{Z}^n$ и $\sigma' \in \mathbb{Z}$ такие, что для угла γ между векторами $\vec{w}$ и $\vec{w}'$ и для расстояний $\rho_{l_{\vec{w},\sigma}}(\alpha)$, для всех $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in E_2^n$ будет выполнено $\left| \rho_{l_{\vec{w},\sigma}}(\alpha) - \rho_{l_{\vec{w}',\sigma'}}(\alpha) \right| < \varepsilon$ и $\alpha < \varepsilon$.*

Доказательство. Для доказательства достаточно построить такую последовательность линейных форм $l_{\vec{w}_1,\sigma_1}, l_{\vec{w}_2,\sigma_2}, \ldots, l_{\vec{w}_k,\sigma_k}, \ldots$ с целыми коэффициентами и порогом, что $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\rho_{l_{\vec{w},\sigma}}(\alpha) - \rho_{l_{\vec{w}_k,\sigma_k}}(\alpha)\right) = 0$ для всех α и $\lim\limits_{k\to\infty}\cos\gamma_k = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{\vec{w}\cdot\vec{w}_k}{|\vec{w}|\cdot|\vec{w}_k|} = 1$, где γ_k — угол между векторами $\vec{w}$ и $\vec{w}_k$.

Рассмотрим десятичное представление компонент w_i вектора $\vec{w}$ и порога σ

$$w_i = \langle w_{i0}, w_{i1}\ldots w_{ik}\ldots\rangle\,;$$
$$\sigma = \langle s_0, s_1 s_2 \ldots s_k \ldots\rangle\,.$$

Здесь $w_{10}, \ldots, w_{n0}, s_0$ — целые части компонент вектора $\vec{w}$ и порога σ.

Положим

$$\vec{w}_k = \left(\langle w_{10}\ldots w_{1k}\rangle, \langle w_{20}\ldots w_{2k}\rangle, \ldots, \langle w_{n0}\ldots w_{nk}\rangle\right)$$

и

$$\sigma_k = \langle s_0 \ldots s_k\rangle\,.$$

Из данного представления следует, что $\vec{w}_k \to 10^k\cdot\vec{w}$, $\sigma_k \to 10^k\cdot\sigma$ при $k\to\infty$, а, следовательно,

$$\lim_{k\to\infty}\left(\rho_{l_{\vec{w},\sigma}}(\alpha) - \rho_{l_{\vec{w}_k,\sigma_k}}(\alpha)\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\left|\sum\limits_{j=1}^{n} a_j w_j - \sigma\right|}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} w_j^2}} - \frac{\left|\sum\limits_{j=1}^{n} a_j w_{kj} - \sigma_k\right|}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} w_{kj}^2}}\right)$$
$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\left|\sum\limits_{j=1}^{n} a_j w_j - \sigma\right|}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} w_j^2}} - \frac{10^k\cdot\left|\sum\limits_{j=1}^{n} a_j w_j - \sigma\right|}{10^k\cdot\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} w_j^2}}\right) = 0$$

и

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\vec{w}\cdot\vec{w}_k}{|\vec{w}|\cdot|\vec{w}_k|} = \lim_{k\to\infty}\frac{10^k\cdot\vec{w}\cdot\vec{w}}{10^k\cdot|\vec{w}|\cdot|\vec{w}|} = 1.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Справедливо соотношение* $\mathbb{R}T \subseteq \mathbb{Z}T$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную $\mathbb{R}$-пороговую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, задаваемую линейной формой $l_{\vec{w},\sigma}$, где $w_i, \sigma \in R$, $i = 1 \ldots n$. Линейная форма $l_{\vec{w},\sigma}$ задает в пространстве $\mathbb{R}^n$ такую гиперплоскость, что по разные стороны от нее функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принимает различные значения.

Рассмотрим три случая:

1) Все точки булего куба E_2^n лежат по одну сторону от гиперплоскости, задаваемой линейной формой $l_{\vec{w},\sigma}$.
   В таком случае $f(x_1, \ldots, x_n)$ является константой 0 или 1. В обоих случаях видно, что $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}T$. Для этого достаточно рассмотреть линейные формы $l_{\vec{w},\sigma} = 1$ и $l_{\vec{w}',\sigma'} = -1$, соответственно.

2) Точки булего куба E_2^n расположены по обе стороны от гиперплоскости, задаваемой линейной формой $l_{\vec{w},\sigma}$, и ни одна из них не лежит на данной гиперплоскости.
   Рассмотрим величину
   $$\rho_* = \min_{\alpha \in E_2^n} \rho_{l_{\vec{w},\sigma}}(\alpha).$$
   Очевидно, что в окрестности $V\left(l_{\vec{w},\sigma}\right) = \left\{v \in \mathbb{R}^n : \rho_{l_{\vec{w},\sigma}}(v) < \rho_*\right\}$ нет ни одной точки булего куба. Пусть B — шар с центром в точке $\left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)$ и радиусом $\frac{\sqrt{n}}{2}$. В таком случае все точки булего куба лежат в пределах шара B. Из леммы 3 следует, что существует гиперплоскость, заданная линейной формой $l_{\vec{w}',\sigma'}$, где $w'_i, \sigma' \in \mathbb{Z}$, $i = 1 \ldots n$, такая, что в пределах B она лежит в окрестности $V\left(l_{\vec{w},\sigma}\right)$. Следовательно, соответствующее ей разбиение булего куба будет совпадать с разбиением, задаваемым линейной формой $l_{\vec{w},\sigma}$. Следовательно, нашлась такая линейная форма $l_{\vec{w}',\sigma'}$, где $w'_i, \sigma' \in \mathbb{Z}$, $i = 1 \ldots n$, что задаваемая ей пороговая функция совпадает с $f(x_1, \ldots, x_n)$.

3) Точки булего куба E_2^n расположены по обе стороны от гиперплоскости, задаваемой линейной формой $l_{\vec{w},\sigma}$, а также существуют точки булего куба, лежащие на данной гиперплоскости.
   Рассмотрим величину
   $$\rho_* = \min_{\substack{\alpha \in E_2^n, \\ l_{\vec{w},\sigma}(\alpha) \neq 0}} \rho_{l_{\vec{w},\sigma}}(\alpha).$$

Легко видеть, что линейная форма $l_{\vec{w},\sigma-\frac{\rho_*}{2}}$ задает такое же разбиение, как $l_{\vec{w},\sigma}$, при этом ни одна из точек булего куба не лежит на задаваемой ею гиперплоскости. Таким образом, данный случай сводится к предыдущему.

Лемма доказана.

Из леммы 4 следует утверждение теоремы 1.

Следствие. (О малых изменениях весов и порога). *Если линейная форма $l_{\vec{w},\sigma}$ задает пороговую функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$, и плоскость $l_{\vec{w},\sigma}$ не проходит ни через одну точку булего куба, то найдется такое $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, что для всех $i \in \{1,\ldots,n\}$ выполнено*

$$l_{(w_1,\ldots,w_{i-1},w_i+\varepsilon,w_{i+1},\ldots,w_n),\sigma} \to f(x_1,\ldots,x_n),$$

а также

$$l_{(w_1,\ldots,w_n),\sigma+\varepsilon} \to f(x_1,\ldots,x_n).$$

3. Доказательство теорем 2 и 3

Очевидно, что если $f(x_1,\ldots,x_n)$ — существенная пороговая функция, то ни один из коэффициентов линейной формы $l_{\vec{w},\sigma}$, задающей f, не может равняться нулю. Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 5. *Если $f(x_1,\ldots,x_n)$ — существенная пороговая функция и $l_{\vec{w},\sigma} \to f(x_1,\ldots,x_n)$, то функция f является монотонной точно тогда, когда $s\left(l_{\vec{w},\sigma}\right) = (1,\ldots,1)$.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Назовем набор $\alpha \in E_2^n$ нижней единицей монотонной функции $f(x_1,\ldots,x_n)$, если $f(\alpha) = 1$, а на любом наборе $\alpha' \in E_2^n$, $\alpha' < \alpha$, имеет место $f(\alpha') = 0$. Так как функция f монотонная, то она однозначно задается множеством своих нижних единиц $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$, где $\alpha_k \in E_2^n$; $k = 1\ldots m$. Рассмотрим сокращенную дизъюнктивную нормальную форму

$$B = A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_m$$

для функции f, где A_i — простая импликанта, соответствующая нижней единице α_i, $i = 1 \dots m$. Переменное x_j, $j = 1 \dots n$, входит в импликанту A_i точно тогда, когда на j-й позиции набор α_i принимает значение 1.

Так как f существенным образом зависит от всех своих переменных, то для всякого переменного x_i, $i = 1 \dots n$, найдется хотя бы одна импликанта A_j, $j \in \{1, \dots, m\}$, зависящая от x_i. Рассмотрим наборы

$$\begin{aligned} \alpha_j &= (a_1, \dots a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n)\,, \\ \alpha'_j &= (a_1, \dots a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n)\,. \end{aligned}$$

Пусть некоторая линейная форма $l_{\vec{w},\sigma}$ задает f. Так как α_j — нижняя единица f, то имеют место неравенства

$$\begin{aligned} w_1 a_1 + \ldots + w_{i-1} a_{i-1} + w_i \cdot 1 + w_{i+1} a_{i+1} + \ldots + w_n a_n - \sigma \geqslant 0, \\ w_1 a_1 + \ldots + w_{i-1} a_{i-1} + w_i \cdot 0 + w_{i+1} a_{i+1} + \ldots + w_n a_n - \sigma < 0, \end{aligned}$$

что возможно только в случае $w_i > 0$.

Так как соответствующие наборы α_j и α'_j найдутся для каждого переменного x_i, то $s\left(l_{\vec{w},\sigma}\right) = (1, \dots, 1)$. Лемма доказана.

Пусть $f_{\vec{w},\sigma}(x_1, \dots, x_n)$ — $\mathbb{Z}$-пороговая функция, заданная линейной формой $l_{\vec{w},\sigma}$. Рассмотрим произвольный вектор $\delta = (d_1, \dots, d_n) \in E_2^n$. Назовем δ-преобразованием $\mathbb{Z}$-пороговой функции оператор, определенный на множестве $\mathbb{Z}T$ и принимающий значения на нем же. Этот оператор записывается так

$$\delta\left[f_{\vec{w},\sigma}(x_1, \dots, x_n)\right] = f_{\vec{w}',\sigma'}(x_1, \dots, x_n),$$

где

$$\begin{aligned} w'_i &= w_i, \text{ если } d_i = 1, \\ w'_i &= -w_i, \text{ иначе}, \\ \sigma' &= \sigma + \sum_{i=1}^{n} (d_i - 1)\, w_i, \end{aligned}$$

при $i = 1 \dots n$.

Отметим важные свойства δ-преобразования $\mathbb{Z}$-пороговой функции.

Лемма 6. *Если* $f_{\vec{w},\sigma}(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}T$, $\delta = (d_1, \ldots, d_n) \in E_2^n$ *и* $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in E_2^n$, *то*

$$f_{\vec{w},\sigma}\left(a_1, \ldots, a_n\right) = \delta\left[f_{\vec{w},\sigma}\left(a_1^{d_1}, \ldots, a_n^{d_n}\right)\right].$$

Доказательство. Утверждение леммы вытекает из следующих соображений.

Значение функции $f_{\vec{w},\sigma}\left(a_1, \ldots, a_n\right)$ определяется знаком выражения

$$\sum_{i=1}^{n} a_i w_i - \sigma.$$

Значение функции $\delta\left[f_{\vec{w},\sigma}\left(a_1^{d_1}, \ldots, a_n^{d_n}\right)\right]$, в свою очередь, определяется знаком выражения

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{d_i+1} \cdot a_i w_i + \sum_{i=1}^{n} \left(1 - d_i\right) w_i - \sigma.$$

Легко видеть, что на всех наборах $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in E_2^n$ значения данных сумм равны. Лемма доказана.

Таким образом, δ-преобразование порождает симметричную функцию.

Обозначим через $\widetilde{\mathbb{Z}T}_s^n$ множество всех существенных $\mathbb{Z}$-пороговых функций от n переменных, имеющих сигнатуру s.

Следствие.

1) *Если* $s, \delta \in E_2^n$, $f, f' \in \widetilde{ZT}_s^n$, $f \neq f'$, *то* $\delta\left[f\right] \neq \delta\left[f'\right]$.
2) *Если* $\delta = s\left(f\right)$, *то* $\delta\left[f\right]$ *— монотонная пороговая функция.*

Лемма 7. *Если* $s, s' \in E_2^n$ *и* $s \neq s'$, *то* $\widetilde{ZT}_s^n \cap \widetilde{ZT}_{s'}^n = \varnothing$.

Доказательство. Пусть $f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ — существенная $\mathbb{Z}$-пороговая функция такая, что $f \in \widetilde{ZT}_s^n$, $f \in \widetilde{ZT}_{s'}^n$. Тогда существуют линейные формы $l_{\vec{w},\sigma}$ и $l_{\vec{w}',\sigma'}$, задающие f, такие, что $w_i > 0$, если $s_i = 1$, $w_i < 0$, если $s_i = 0$; а также $w_i' > 0$, если $s_i' = 1$, $w_i' < 0$, если $s_i' = 0$, соответственно.

Положим $\delta = s$ и выполним δ-преобразование функции f, заданной формами $l_{\vec{w},\sigma}$ и $l_{\vec{w}',\sigma'}$. По лемме 6 имеем

$$\delta\left[f_{\vec{w},\sigma}\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right] = \delta\left[f_{\vec{w}',\sigma'}\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right].$$

Так как вектор $\delta = s$, то из следствия леммы 6 в левой части этого выражения имеем монотонную функцию от n-переменных, а в правой части — функцию, не являющуюся монотонной, так как $s \neq s'$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Из Леммы 7 следует Теорема 2.

Доказательство теоремы 3. Из Леммы 7 следует, что

$$\widetilde{ZT}^n = \bigcup_{i=1}^{2^n} \widetilde{ZT}^n_{s_i},$$

где $s_1 = (0,\ldots,0)$; $s_2 = (0,\ldots,0,1)$; $\ldots$; $s_{2^n} = (1,\ldots,1)$; при этом, если $i \neq j$, то $\widetilde{ZT}^n_{s_i} \cap \widetilde{ZT}^n_{s_j} = \varnothing$.

Пусть $s \neq (1,\ldots,1)$, $\delta = s$. Рассмотрим множество $\delta\left[\widetilde{ZT}^n_s\right] = \left\{\delta\left[f\right] : f \in \widetilde{ZT}^n_s\right\}$. По следствию из леммы 6 данное множество будет состоять только из монотонных пороговых функций. Верно также и обратное: если $\delta' = \overline{(\delta)}$, то для любой монотонной пороговой функции f из $\widetilde{ZT}_{(1,\ldots,1)}$ верно, что $\delta'\left[f\right] \in \widetilde{ZT}^n_{(0,\ldots,0)}$. Следовательно, если $\delta = s$, то

$$\delta\left[\widetilde{ZT}^n_s\right] = \widetilde{ZT}^n_{(1,\ldots,1)}.$$

Следовательно, классы $\widetilde{ZT}^n_{s_i}$, $i \in \{1,\ldots,2^n\}$, взаимно симметричны и равномощны. Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 4

Рассмотрим следующую меру сложности линейной формы

$$L\left(l_{\vec{w},\sigma}\right) = \max\left(\left|w_1\right|,\ldots,\left|w_n\right|,\left|\sigma\right|\right).$$

Для пороговой функции f определим величину

$$L(f) = \min_{l_{\vec{w},\sigma} \to f} L\left(l_{\vec{w},\sigma}\right).$$

Здесь минимум берется по всем линейным формам с целыми коэффициентами, задающим функцию f.

Рассмотрим аналогичную характеристику для множества $\mathbb{Z}T^n$ вида

$$L(n) = \min_{f \in \mathbb{Z}T^n} L(f).$$

Очевидно, что $\rho(n) \leqslant (n+1) \cdot L(n)$. Чтобы оценить $\rho(n)$ достаточно рассмотреть функцию $f \in \mathbb{Z}T^n$, на которой достигается величина $L(n)$. Без ограничения общности можно считать, что f — монотонная. Следовательно, все коэффициенты линейной формы $l_{\vec{w},\sigma}$, задающей f, положительны. При этом, хотя бы один из них равен $L(n)$. Рассмотрим пороговую функцию $f' = \bar{f}$. По теореме «о сигнатурах» все коэффициенты линейной формы, задающей f', отрицательны. Следовательно, $\rho(f, f') \geqslant L(n)$.

Получаем

$$\log L(n) \leqslant \log \rho(n) \leqslant \log L(n) + \log(n+1). \tag{2}$$

Таким образом, для оценки логарифма $\rho(n)$ достаточно оценить логарифм $\log L(n)$.

Оценим $\log L(n)$ сверху.

Пороговая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ однозначно определяется своими значениями на наборах из E_2^n. Всего таких наборов имеется 2^n. Рассмотрим следующую систему из 2^n неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} \underset{\alpha_i \in N_f}{\&} \left(\alpha_i \cdot \vec{w} - \sigma \geqslant 0\right), \\ \underset{\alpha_i \in E_2^n \setminus N_f}{\&} \left(\alpha_i \cdot \vec{w} - \sigma < 0\right). \end{array} \right. \tag{3}$$

Здесь $\alpha_i = (a_1, \ldots, a_n) \in E_2^n$; $i = 1, \ldots, 2^n$; $N_f = \{\alpha \in E_2^n : f(\alpha) = 1\}$ — множество наборов, на которых функция f принимает значение 1.

Очевидно, что любой набор $(w_1, \ldots, w_n, \sigma)$, удовлетворяющий данной системе, будет определять линейную форму $l_{\vec{w},\sigma}$, задающую f.

Рассмотрим вектора $\alpha'_i, \alpha''_i \in E_2^{n+1}$, такие что

$$\begin{aligned}
&\alpha'_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}, 1) \text{ для всех } \alpha_i \in E_2^n,\\
&\alpha''_i = \alpha'_i, \text{ если } \alpha_i \in N_f \text{ и}\\
&\alpha''_i = -\alpha'_i, \text{ иначе.}
\end{aligned}$$

Рассмотрим следующую систему из 2^n неравенств

$$\mathop{\&}_{\alpha_i \in E_2^n} \left(\alpha''_i \cdot \vec{w} \geqslant 1\right), \tag{4}$$

где $\vec{w}' = \left(w'_1, \ldots, w'_{n+1}\right)$.

Легко видеть, что любое $\vec{w}'$, являющееся решением системы (4), задает также решение системы (3). Для этого достаточно положить $\vec{w} = (w'_1, \ldots, w'_n)$, а $\sigma = -w'_{n+1}$.

Очевидно, что множество всех решений системы (4) представляет собой выпуклый многогранник M в пространстве R^{n+1}. В экстремальных точках M некоторые $n+1$ неравенств обращаются в строгие равенства. Пусть $\vec{w}'$ — произвольная экстремальная точка многогранника M. В таком случае для $\vec{w}'$ при $A = \|a_{ij}\|_{(n+1)\times(n+1)}$, $a_{ij} \in E_2$ имеет место следующая система уравнений

$$A \cdot \vec{w}' = 1.$$

По правилу Крамера данная система имеет следующее решение

$$w'_i = \frac{\Delta_i}{\Delta};\ i = 1 \ldots n+1,$$

где Δ — определитель матрицы A, а Δ_i — определитель матрицы A_i, получаемой из A заменой i-го столбца на вектор правый частей.

Отметим, что в определителях Δ_i i-й столбец состоит только из единиц. Деля столбец на 2, и вычитая из всех остальных столбцов для всех $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ получаем

$$\Delta_i = 2 \cdot \Delta'_i,$$

где определители Δ'_i состоят только из элементов $\pm\frac{1}{2}$, поэтому по теореме Адамара [2] будет выполнено

$$\left|\Delta'_i\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot (n+1)^{\frac{n+1}{2}} = \left(\frac{n+1}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}};\ i = 1 \ldots n+1,$$

значит,

$$|\Delta_i| \leqslant 2\left(\frac{n+1}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}}.$$

Осталось заметить, что $\vec{w}'' = |\Delta| \cdot \vec{w}'$ также является решением системы (4), при этом значения w_i'' целые. Следовательно,

$$L(n) \leqslant 2 \cdot \left(\frac{n+1}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}},$$

$$\log L(n) \leqslant \frac{n+1}{2} \cdot \log(n+1) - n = \frac{1}{2} n \log n + o(n).$$

Для оценки $\log L(n)$ снизу приведем без доказательства следующий известный результат.

Теорема 6. *([1]) Если $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 3$, то существует пороговая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что*

$$L(f) \geqslant \frac{1}{2n} e^{-4n^{\log\left(\frac{3}{2}\right)}} 2^{\frac{1}{2} n \log n - n}.$$

В случае, если $n \neq 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, рассмотрим $n' = 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}$. Очевидно, что

$$\frac{1}{2} \cdot n < 2^{\log_2 n - 1} < n' = 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \leqslant n.$$

Здесь $\lfloor x \rfloor$ — наибольшее целое число, не привосходящее x («округление вниз»).

Так как n' — степень двойки, возьмем функцию $f'(x_1, \ldots, x_{n'})$ из теоремы 6.

Далее, дополним f' фиктивными переменными до функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Очевидно, что для $L(f)$ будет иметь место следующая оценка:

$$L(f) > \frac{1}{n} e^{-2n^{\log(3/2)}} 2^{\frac{1}{4} n \log n - \frac{3}{4} n}.$$

Таким образом, для произвольного n имеем:

$$\log L(n) \geqslant \frac{1}{4} n \log n + o(n).$$

Объединив верхнюю и нижнюю оценки для $\log L(n)$, получаем

$$\frac{1}{4} n \log n + o(n) \leqslant \log L(n) \leqslant \frac{1}{2} n \log n + o(n),$$

чем устанавливаем теорему 4.

5. Доказательство теоремы 5

Две существенные линейные формы $l_{\vec{w},\sigma}$ и $l_{\vec{w}',\sigma'}$ будем называть *эквивалентными* и обозначать $l_{\vec{w},\sigma} \sim l_{\vec{w}',\sigma'}$, если задаваемые ими пороговые функции равны, то есть $f_{\vec{w},\sigma} = f_{\vec{w}',\sigma'}$.

Как уже отмечалось ранее, множество $U(f)$ замкнуто относительно операции сложения линейных форм. Складывая эквивалентные формы сами с собой, получаем, что в нашем распоряжении есть также операция умножения линейной формы на натуральную константу.

Пусть L — множество линейных форм, обозначим через $[L]$ — замыкание множества L относительно операций сложения и умножения на натуральную константу, то есть множество всех линейных форм, которые можно получить из L при помощи данных операций.

Лемма 8. *Если f — существенная $\mathbb{Z}$-пороговая функция, то множество $U(f)$ является точно счетно-порожденным относительно операций сложения и умножения на константу из $\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Предположим противное. Без ограничения общности будем полагать, что f — монотонная функция. Пусть найдется конечное множество линейных форм $L = \{l_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, l_k(x_1, \ldots, x_n)\}$ такое, что $[L] = U(f)$.

Если найдется такая форма $l_i \in L$, которая представляется в виде линейной комбинации остальных форм из L, тогда, очевидно, $[L \backslash l_i] = [L]$. Поэтому естественно полагать, что множество L несократимо, то есть из него нельзя выбросить ни одной линейной формы, не сузив замыкание. Иными словами, можно считать, что множество L состоит только из линейно-независимых элементов.

Пусть $l_{\vec{w},\sigma} \in U(f)$ и ни одна из точек булего куба не лежит на плоскости, задаваемой $l_{\vec{w},\sigma}$.

Если $[L] = U(f)$, то $l_{\vec{w},\sigma}$ представима в виде линейной комбинации элементов из L, то есть

$$l_{\vec{w},\sigma} = \sum_{j=1}^{k} a_j l_j,\ a_j \in \mathbb{N}_0, l_j \in L,\ j \in \{1, \ldots, k\}.$$

В таком случае, если $c \in \mathbb{N}$, то

$$\sum_{j=1}^{k} a_j l_j \sim c \cdot \left(\sum_{j=1}^{k} a_j l_j \right).$$

Рассмотрим линейную форму

$$l' = c \cdot \left(\sum_{j=1}^{k} a_j l_j \right) + p x_i,\ i \in \{1, \ldots, n\},$$

где $p \in \mathbb{N}$. Возможно два случая: $l_{\vec{w},\sigma} \sim l'$ и $l_{\vec{w},\sigma} \nsim l'$.

Покажем, что для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ найдется такой множитель $c \in \mathbb{N}$, что $l_{\vec{w},\sigma} \sim l'$.

Из следствия леммы 4 получаем, что для произвольной линейной формы с целыми коэффициентами выполнено $l_{\vec{w},\sigma} = w_1 x_1 + \ldots + w_n x_n - \sigma$, которая не проходит ни через одну точку булего куба, существует линейная форма

$$l_\varepsilon = w_1 x_1 + \ldots + w_{i-1} x_{i-1} + (w_i + \varepsilon) x_i + w_{i+1} x_{i+1} + \ldots + w_n x_n - \sigma,$$

где $\varepsilon = \frac{1}{q}$, $q \in \mathbb{N}$, такая, что $l_{\vec{w},\sigma} \sim l_\varepsilon$. При этом форма l_ε существует для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Пусть $c = p \cdot q$, тогда

$$l_{\vec{w},\sigma} \sim c \cdot l_\varepsilon = \sum_{j=1}^{i-1} p \cdot q \cdot w_j x_j + p \cdot q \cdot \left(w_i + \frac{1}{q} \right) x_i + \sum_{j=i+1}^{n} p \cdot q \cdot w_j x_j - \sigma =$$

$$= p \cdot q \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} w_j x_j - \sigma \right) + p \cdot x_i = l'.$$

Таким образом, всегда возможно подобрать такой натуральный множитель c, что $l_{\vec{w},\sigma} \sim l'$.

Следовательно, $l' \in U(f)$ и, значит, l' представима в виде линейной комбинации элементов из L, то есть

$$l' = \sum_{j=1}^{k} a'_j l_j = \sum_{j=1}^{k} a_j l_j + p x_i.$$

Пусть $\tilde{l} = x_i$. Возможны два случая: $\tilde{l} \in L$ и $\tilde{l} \notin L$. Покажем, что второй случай невозможен. Предположим противное. Линейную форму $l_{\vec{w},\sigma}$ будем называть положительно-определенной, если все ее весовые коэффициенты и порог положительны. Концентрацией переменного x_i в положительно-определенной линейной форме $l_{\vec{w},\sigma} = \sum\limits_{j=1}^{n} w_j x_j - \sigma$ назовем отношение

$$v(x_i, l_{\vec{w},\sigma}) = \frac{w_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} w_j}.$$

Очевидны следующие свойства концентрации:

1) $0 \leqslant v(x_i, l_{\vec{w},\sigma}) \leqslant 1$;
2) если $\lambda \in \mathbb{N}$, то $v(x_i, l_{\vec{w},\sigma}) = v(x_i, l_{\lambda\vec{w},\lambda\sigma})$;
3) если заданы линейные формы $l_{\vec{w},\sigma}, l_{\vec{w}',\sigma'}$ и $\lambda, \lambda' \in \mathbb{N}$, то $v(x_i, \lambda l_{\vec{w},\sigma} + \lambda' l_{\vec{w}',\sigma'}) \leqslant \max(v(x_i, l_{\vec{w},\sigma}), v(x_i, l_{\vec{w}',\sigma'}))$.

Так как множитель p выбирается произвольно, можно утверждать, что найдется такой множитель c, что $v(x_i, l') > \max(v(x_i, l_1), \ldots, v(x_i, l_k))$, что невозможно. Следовательно, $\tilde{l} \in L$. В связи с тем, что переменное x_i выбиралось произвольно, получаем, что все формы вида x_i содержатся в L. Если в качестве l' рассмотреть форму

$$l' = c \cdot (a_1 l_1 + \ldots + a_k l_k) + p, \text{ где } p \in \mathbb{N},$$

получаем, что $1 \in L$.

Полученного набора линейных форм достаточно для получения произвольной положительно-определенной линейной формы. Получаем, что все положительно-определенные линейные формы содержатся в $[L]$ и, соответственно, в $U(f)$, что неверно. Лемма доказана.

Пусть L и B — множества линейных форм. Будем говорить, что B *полно в* L относительно операций сложения и умножения на натуральную константу, если $[B \backslash l] \neq L$. Назовем B *базисом* L относительно данных операций, если B полно в L и для всякой линейной формы $l \in B$ выполнено $[B \backslash l] \neq L$.

Из леммы 8 следует, что $U(f)$ не может обладать конечным базисом. Остается вопрос о существовании в $U(f)$ бесконечных, а точнее, счетных базисов. Приведем примеры пороговых функций, для которых множество $U(f)$ содержит счетный базис.

Лемма 9. *Существует такая функция $f \in \widetilde{\mathbb{Z}T}^1$, что множество $U(f)$ обладает счетным базисом относительно операции сложения двух линейных форм.*

Доказательство. Рассмотрим пороговую функцию $f(x) = x$. Так как f — монотонная, то по «теореме о сигнатурах» множество $U(f)$ состоит только из положительно-определенных линейных форм. Следовательно, любая линейная форма $l \in U(f)$ имеет вид

$$l(x) = wx - \sigma,$$

где $w > 0$ и $\sigma > 0$. Таким образом, выполнено

$$U(f) = \{w \cdot x - \sigma : w \geqslant \sigma;\, w, \sigma \in \mathbb{N}\}.$$

Множество $U(f)$ изображено на рис. 1.

Рассмотрим множество линейных форм $B = \{(1{,}1), (2{,}1), (3{,}1), \ldots\}$. Здесь первая компонента соответствует значению w, а вторая — σ. Данная система является полной относительно операции сложения, так как любая линейная форма $l_{w,\sigma}(x) = wx - \sigma$ из множества $U(f)$ может быть представлена в виде

$$l_{w,\sigma}(x) = l_{(w-\sigma+1),1}(x) + (\sigma - 1) \cdot l_{1,1}(x).$$

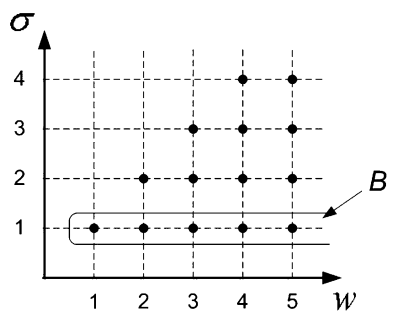

Рис. 1. Множество $U\,(f)$ при $f(x) = x$.

При этом, если из B выбросить произвольный элемент $l_{w,1}\,(x)$, то его невозможно будет представить в виде линейной комбинации остальных, так как при сумме любых двух элементов значение порога σ будет не менее двух. Поэтому B — базис множества $U\,(x)$.

Лемма 10. *Существует такая $f \in \widetilde{\mathbb{Z}T}^2$, что множество $U\,(f)$ обладает счетным базисом относительно операции сложения линейных форм.*

Доказательство. Рассмотрим пороговую функцию $f\,(x_1, x_2) = x_1 \& x_2$. Так как f монотонная, то по «теореме о сигнатурах» множество $U\,(f)$ состоит только из положительно-определенных линейных форм. Следовательно, любая линейная форма $l \in U\,(f)$ имеет вид

$$l\,(x_1, x_2) = w_1 x_1 + w_2 x_2 - \sigma,$$

где $w_1, w_2, \sigma > 0$. Таким образом,

$$U\,(f) = \{w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 - \sigma : w_1 + w_2 \geqslant \sigma; \\ w_1 < \sigma;\ w_2 < \sigma;\ w_1, w_2, \sigma \in \mathbb{N}\}\,.$$

Множество $U\,(f)$ можно представить в виде

$$U\,(f) = \bigcup_{i=2}^{\infty} U_{\sigma=i}\,(f),\ \text{где}$$
$$U_i\,(f) = \left\{ l_{\vec{w},\sigma} \in \widetilde{ZL}^n : l_{\vec{w},\sigma} \to f;\ \sigma = i \right\}.$$

На рис. 2 изображены первые шесть членов данного разложения множества $U\left(x_1 \& x_2\right)$. Обозначим

$$B_i = \left\{ l_{\vec{w},\sigma} \in U_i\left(f\right) : \left(w_1 = i-1\right) \vee \left(w_2 = i-1\right) \right\},\ i = 2, 3, \ldots$$

Рассмотрим множество линейных форм $B = B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup \ldots$. Покажем, что B является базисом $U\left(x_1 \& x_2\right)$.

Полнота B следует из того, что для любого $i \geqslant 4$ элементы множества $U_i\left(x_1 \& x_2\right) \backslash B_i$ (на рис. 2 данные множества обозначены серым цветом) могут быть представлены в виде $l_{(1,1,2)} + l'$, где $l_{(1,1,2)} = x_1 + x_2 - 2$, а l' — соответствующий элемент множества $U_{i-2}\left(x_1 \& x_2\right)$.

Покажем, что ни один из элементов множества B не может быть выражен через остальные при помощи операций суммы и умножения на константу. Отметим, что для элементов множества $U_i\left(f\right)$ выполнено

$$w_1 < i,\ w_2 < i.$$

Таким образом, для любой линейной комбинации с положительными коэффициентами элементов из B, состоящей из более, чем одного элемента, выполнено

$$w_1 \leqslant \sigma - 2,\ w_2 \leqslant \sigma - 2.$$

В то же время для элементов множества B имеет место

$$w_1 = \sigma - 1,\ w_2 = \sigma - 1.$$

Следовательно, B является базисом $U\left(x_1 \& x_2\right)$. Лемма доказана.

Обобщая утверждения 9 и 10, докажем теорему 5.

Доказательство теоремы 5. Без ограничения общности будем считать, что f — произвольная монотонная пороговая функция от n переменных. Для остальных пороговых функций утверждение будет следовать из «теоремы о сигнатурах». Так как f монотонная, следовательно, множество $U\left(f\right)$ целиком содержится в множестве $\mathbb{N}^{n+1}$. Рассмотрим следующее разбиение множества $\mathbb{N}^{n+1}$:

$$\mathbb{N}^{n+1} = K_1 \cup \left(K_2 \backslash K_1\right) \cup \left(K_3 \backslash K_2\right) \cup \ldots,$$

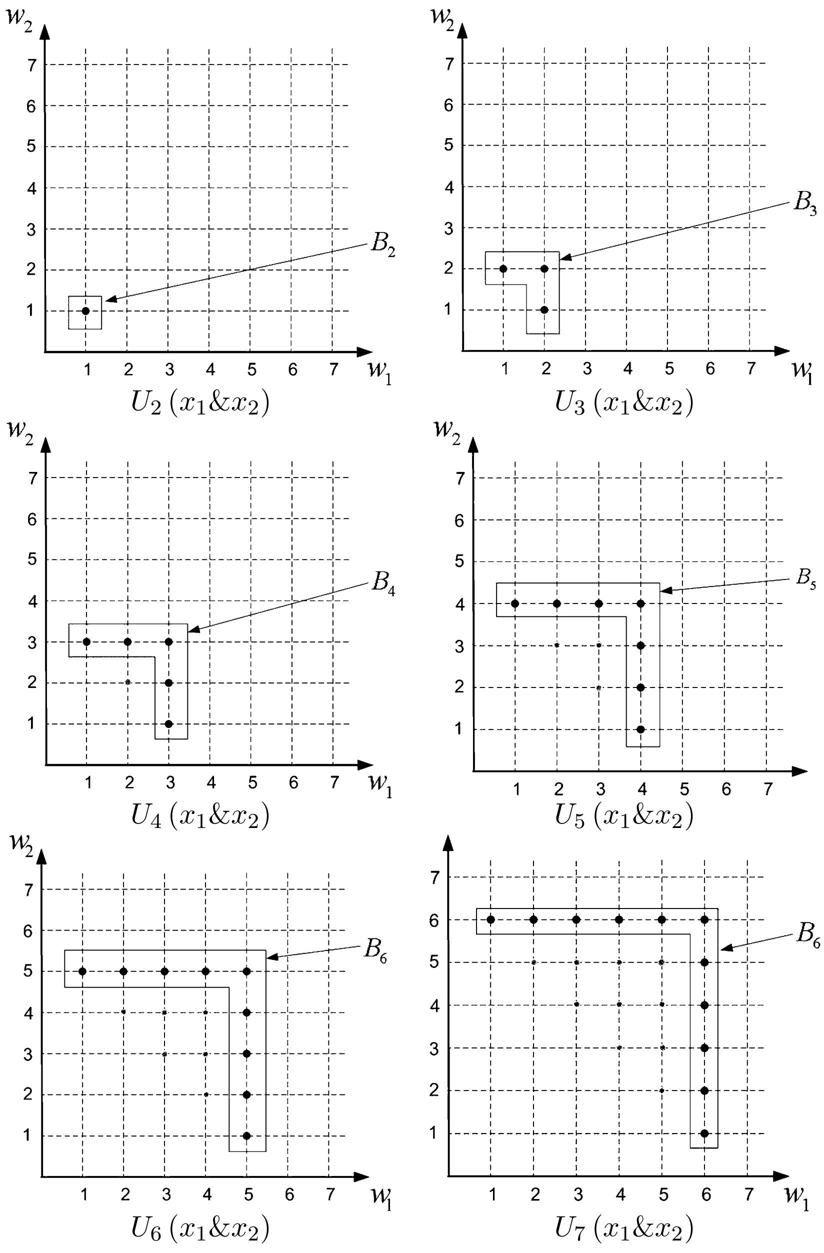

Рис. 2. Множество $U\,(x_1\&x_2)$.

где $K_i = \{(a_1, \ldots, a_{n+1}) : a_j \in \mathbb{N},\, a_j \leqslant i,\, j = 1 \ldots n+1\}$, $i = 1 \ldots \infty$. K_i — куб в пространстве $\mathbb{N}^{n+1}$ со стороной i.

Пусть B множество линейных форм, которое задается следующим образом:

1) На множестве K_1 ищем пересечение $K_1 \cap U(f)$. Так как в любом множестве K_i содержится $i^{(n+1)}$ элементов, то задача нахождения $K_1 \cap U(f)$ является алгоритмически разрешимой. Множество $K_1 \cap U(f)$ целиком заносим в B.
2) Переходим к рассмотрению множества $(K_2 \backslash K_1)$. Аналогично предыдущему шагу, находим множество $(K_2 \backslash K_1) \cap U(f)$. Из данного множества отбрасываем те элементы, которые могут быть получены из множества $K_1 \cap U(f)$ при помощи операций сложения и умножения на константу — обозначим данное множество L_2. Задача нахождения множества L_2 также является алгоритмически разрешимой, так как всевозможных линейных комбинаций элементов из $K_1 \cap U(f)$, координаты которых не превосходят 2, конечное число. Множество $[(K_2 \backslash K_1) \cap U(f)] \backslash L_2$ целиком заносим в B.
3) Переходим к рассмотрению множества $(K_3 \backslash K_2)$. Аналогично находим множество $[(K_3 \backslash K_2) \cap U(f)] \backslash L_3$. Здесь L_3 — множество всех элементов $(K_3 \backslash K_2) \cap U(f)$, которые могут быть получены при помощи операций сложения и умножения из множества $K_2 \cap U(f)$.
4) и т. д.
5) Переходим к рассмотрению множества $(K_{i+1} \backslash K_i)$.
Находим множество $[(K_{i+1} \backslash K_i) \cap U(f)] \backslash L_{i+1}$, где L_{i+1} — множество всех элементов $(K_{i+1} \backslash K_i) \cap U(f)$, которые могут быть получены при помощи операций сложения и умножения из множества $K_i \cap U(f)$.
6) и т. д.

Полученное множество B имеет вид:

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} [(K_i \backslash K_{i-1}) \cap U(f)] \backslash L_i,$$

где L_i — те элементы множества $(K_i \backslash K_{i-1}) \cap U(f)$, которые могут быть получены при помощи операций сложения и умножения из множества $K_{i-1} \cap U(f)$. Полагаем $L_1 = \varnothing$.

Покажем, что B — базис множества $U(f)$. Полнота B следует из построения — любой элемент $U(f)$ либо находится в B, либо линейно выражется через его элементы. При этом из B нельзя отбросить ни один элемент. Это следует из того, что элементы множества $[(K_i \backslash K_{i-1}) \cap U(f)] \backslash L_i$ не могут быть линейно выражены через элементы множества $[(K_j \backslash K_{j-1}) \cap U(f)] \backslash L_j$, если $j > i$, так как в таком случае любая линейная комбинация элементов из $[(K_j \backslash K_{j-1}) \cap U(f)] \backslash L_j$ имеет координаты больше, чем i. Поэтому B — базис. Единственность B следует из того, что ни один из элементнов множества $[(K_i \backslash K_{i-1}) \cap U(f)] \backslash L_i$, $i = 1, 2, \ldots$, не может быть выражен через остальные. Теорема доказана.

Благодарности

Автор благодарит Валерия Борисовича Кудрявцева за постановку задач и ценные консультации, а также за поддержку интереса к математике и пороговой логике в частности.

Список литературы

[1] Hastad J. On the size of weights for threshold gates // SIAM J. Discr. Math. 1994.

[2] Виноградов И. М. Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1985.