# Решение автоматных уравнений с одной неизвестной

И. В. Лялин

Пусть имеется автоматная схема $S$, полученная из автоматов с помощью операций суперпозиции и обратной связи. Пусть в $S$ один автомат $x$ разрешается заменять на любой подходящий по входам и выходам автомат $x'$ так, чтобы полученная схема $S'$ реализовывала автомат, эквивалентный наперед заданному автомату $h$. В статье приводится алгоритм, устанавливающий возможность такой замены, а также описывается множество всех подходящих $x'$. Данная работа является обобщением [1] на случай схем с обратными связями.

## Введение

Пусть имеется схема из автоматов, в которой один автомат не фиксирован. То есть мы можем подставлять на его место любой автомат с тем же числом входов и выходов и с теми же алфавитами входов и выходов. Меняя нефиксированный автомат, мы можем влиять на поведение всей схемы. В данной статье рассматривается следующая задача: найти множество всех таких автоматов, которые при подстановке вместо нефиксированного автомата так влияют на схему, что она становится эквивалентной напередзаданному автомату $h$. Показано, что множество всех таких автоматов описывается недетерминированным автоматом, и существует алгоритм, который по произвольной схеме строит этот недетерминорованный автомат.

В [2] и [3] решается задача нахождения неизвестного компонента в автоматных схемах четырех видов (рис. 1, 2, 3, 4). Здесь $A$ — известный автомат, а $X$ — искомый. Отличие данной работы в том

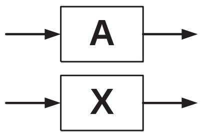


Рис. 1.

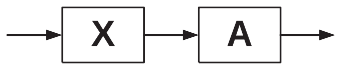


Рис. 2.

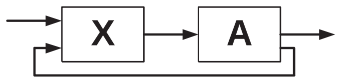


Рис. 3.

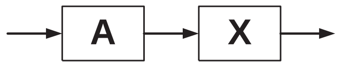


Рис. 4.

что задача решается для произвольной схемы, и находится не одно решение а все.

В работе [4] рассматривается задача о решении систем автоматных уравнений, представляющих собой обобщение систем канонических уравнений. Решается задача существования и нахождения решения, а также предлагается алгоритм для перечисления всех возможных решений. Отличие такой постановки задачи от рассматриваемой в данной статье в том, что ограничения задаются на внутреннюю структуру автомата, а не на его поведение. И как следствие возможна ситуация что из двух эквивалентных автоматов один удовлетворяет уравнению, а второй — нет. В постановке данной статьи такое невозможно. Более того, в данной статье не просто перечисляются все решения, а определяются все одновременно с помощью недетерминированного автомата. Уравнения из [4] легко сводятся к уравнениям в постановке данной статьи.

## 1. Основные понятия и результаты

*Абстрактным конечным инициальным автоматом* называется шестерка $V = (A, Q, B, \varphi, \psi, q^0)$, где $A, Q, B$ — конечные множества, $\varphi$ — функция, определенная на множестве $Q \times A$ и принимающая значения из $Q$, $\psi$ — функция, определенная на множестве $Q \times A$ и принимающая значения из $B$, $q^0 \in Q$. Множества $A, Q, B$ называются соответственно *входным алфавитом, алфавитом состояний* и *выходным алфавитом* автомата $V$. Функция $\varphi$ называется *функцией переходов*, а функция $\psi$ — *функцией выходов* автомата $V$. $q^0 \in Q$ называется *начальным состоянием.* Через $A^*$ обозначим множество всех конечных слов в алфавите $A$. Абстрактный конечный инициальный автомат определяет автоматную функцию $f : A^* \to B^*$, которая задается рекуррентно соотношениями

$$\begin{cases} q(1) = q^0, \\ q(t+1) = \varphi(q(t), a(t)), \\ f(t) = \psi(q(t), a(t)). \end{cases}$$

Множество автоматов с входным алфавитом $A$ и выходным $B$ обозначим $P(A, B)$.

Пусть $V = (A, Q, B, \varphi, \psi, q^0)$ и $z = (B, Q_z, C, \varphi_z, \psi_z, q_z^0)$. Скажем, что автомат $\pi(V, z) = (A, Q \times Q_z, C, \varphi_\pi, \psi_\pi, (q^0, q_z^0))$ получен из автоматов $V$ и $z$ с помощью *операции суперпозиции,* если $\varphi_\pi((q, q_z), a) = (\varphi(q, a), \varphi_z(q_z, \psi(q, a)))$ и $\psi_\pi((q, q_z), a) = \psi_z(q_z, \psi(q, a))$. Понятно, что $\pi(V, z) \in P(A, C)$.

Если $V = (A \times A', Q, B \times B', \varphi, \psi, q^0)$, то будем говорить что $V$ имеет два входа с алфавитами $A$ и $A'$ и два выхода с алфавитами $B$ и $B'$. Договоримся входы автомата $V$ обозначать $x_1, x_2$, а выходы $y_1, y_2$. Функции выхода на выходах $y_1, y_2$ обозначим соответственно $\psi_1$ и $\psi_2$.

Скажем, что автомат $o(V) \in P(A, B)$ получен из автомата $V = (A, Q, B, \varphi, \psi, q^0)$ с помощью *операции обратной связи (о.с.),* если он вычисляется алгоритмически следующим образом. Считаем, что о.с. корректна в состоянии $q \in Q$, если $\psi_2$ фиктивно зависит от $x_2$ при $q(t) = q$, то есть для всех $a \in A$, $b_1, b_2 \in B'$ выполняется $\psi_2(q, (a, b_1)) = \psi_2(q, (a, b_2))$. Обозначим $\psi_2(q, a) = \psi_2(q, (a, b_1))$. Вычисление функции выхода $\psi_o(t)$ автомата $o(V)$ осуществляется по схеме

$$\begin{cases} q(1) = q^0, \\ q(t+1) = \varphi(q(t), (a(t), \psi_2(q(t), a(t)))), \\ \psi_o(t) = \psi_1(q(t), (a(t), \psi_2(q(t), a(t)))). \end{cases}$$

Считаем, что о.с. корректна, если она корректна в начальном состоянии $q^0$, и из её корректности в состоянии $q(t)$ следует корректность в состоянии $q(t+1)$.

Пусть $S = (A \times B', Q, B \times A', \varphi, \psi, q^0)$ и $x = (A', Q_x, B', \varphi_x, \psi_x, q_x^0)$. Рассмотрим оператор $R_S(x)$, определенный на автматах $x \in P(A', B')$ и задаваемый соответственно $R_S(x) = o(\pi(S, x))$ (рис. 5). $P_S(A', B')$ обозначим множество всех $x \in P(A', B')$, для которых инициальная обратная связь в $R_S$ корректна. Понятно, что оператор $R_S$ отображает множество $P_S(A', B')$ во множество $P(A, B)$.

*Автоматным уравнением с одной неизвестной* называется пара автоматов $S \in P(A \times B', B \times A')$ и $h \in P(A, B)$. Записывается автоматное уравнение так: $S(x) = h$. *Решением* автоматного уравнения $S(x) = h$ является каждый такой автомат $z \in P_S(A', B')$, что $R_S(z) = h$.

Возникает задача решения автоматных уравнений, то есть нахождения всех решений произвольного уравнения $S(x) = h$ (рис. 5). Решению этой задачи посвящена данная статья. Ниже приводится алгоритм, позволяющий определить имеет ли произвольное автоматное уравнение решение или нет.

Будем обозначать через $h_0$ константный автомат с одним выходом, всегда на выходе выдающий 0.

**Утверждение 1.** *Для любого уравнения $S(x) = h$ существует такое уравнение $S'(x) = h_0$, что множества их решений совпадают.*

Утверждение 1 позволяет в дальнейшем рассматривать только уравнения вида $S(x) = h_0$, тем самым упрощая изложение.

Введем некоторые необходимые определения.

*Недетерминированным автоматом (НДА)* называется следующая шестерка: $(A, U, B, \varphi, \psi, u^0)$, где

$A$ — входной алфавит,

$U$ — множество состояний НДА,

$B$ — выходной алфавит,

$\psi : U \times A \to B$ — функция выхода,

$\varphi : U \times A \to 2^U$ — функция переходов,

$u^0 \subseteq U$ — множество начальных состояний, $u^0$ может быть пустым.

НДА, у которого множество состояний пусто, будем называть *пустым.*

*Детерминированным автоматом (ДА)* называется НДА $(A, U, B, \varphi, \psi, u^0)$, у которого:

1) $|u^0| = 1$

2) Для всех $u \in U$ и $a \in A$ выполняется $|\varphi(u, a)| = 1$

Будем говорить что ДА $z = (A, Q, B, \varphi_z, \psi_z, q^0)$ *вкладывается* в НДА $N = (A, U, B, \varphi, \psi, u^0)$, если существует такое отображение $\omega : Q \to 2^U$, что:

1) $\omega(q^0) \cap u^0 \neq \varnothing$,

2) Для всех $q \in Q, u \in \omega(q), a \in A$ выполняется $\psi_z(q, a) = \psi(u, a)$,

3) Для произвольных $q_1, q_2 \in Q, a \in A$ если $q_2 = \varphi_z(q_1, a)$, то для всех $u \in \omega(q_1)$ выполняется $\omega(q_2) \cap \varphi(u, a) \neq \varnothing$.

**Утверждение 2.** *Пусть автомат $z_1 = (A, Q_1, B, \varphi_1, \psi_1, q_1^0)$ отображением $w$ вложим в НДА $N = (A, U, B, \varphi, \psi, u^0)$ и автомат $z_2 = (A, Q_2, B, \varphi_2, \psi_2, q_2^0)$ эквивалентен автомату $z_1$. Тогда $z_2$ тоже вложим в $N$.*

Будем считать, что каждый недетерминированный автомат определяет некоторое множество детерминированных автоматов, а именно множество всех автоматов, которые в него вкладываются.

### Алгоритм нахождения решения автоматного уравнения

Алгоритм принимает на вход автоматное уравнение $S(x) = h_0$. На выходе выдает некий НДА, который обладает тем свойством что в него вложимы те и только те автоматы, которые являются решением входного уравнения. Пусть $S$ имеет 2 входа $x_1$ и $x_2$ с алфавитами $A$ и $B'$ соответственно, 2 выхода $y_1$ и $y_2$ с алфавитами $\{0, 1\}$ и $A'$, множество состояний $Q$, начальное состояние $q^0$, функцию переходов $\varphi$ и функции выходов $\psi_1$ и $\psi_2$. Пусть $F$ — множество функций $f : A' \to B'$. Пусть $F_c$ — множество константных функций $f : A' \to B'$.

1. Построим по $S$ ориентированный граф $G_1(S)$, каждая дуга которого будет иметь метку из множества $A \times A'$. Множество вершин

$Q_1$ есть множество $Q \times F$, за исключением таких вершин $(q, f)$, что $\psi_2(q)$ зависит существенно от входа $x_2$ и $f$ — не константная функция. Вершины вида $(q^0, f)$, где $f \in F$, назовем выделенными.

Для каждой пары $(q, f) \in Q_1$ и буквы $a \in A$ вычислим числа $a'$ и $b$ следующим образом:

а) Если $\psi_2(q)$ существенно зависит от входа $x_2$ и $f = b' \in F_c$, то $a' = \psi_2(q, (a, b'))$ и $b = \psi_1(q, (a, b'))$.

б) Если $\psi_2(q)$ не существенно зависит от входа $x_2$, то $a' = \psi_2(q, (a, b''))$, где $b''$ — любая буква из $B'$, и $b = \psi_1(q, (a, f(a')))$.

Пусть $q' = \varphi(q, (a, f(a')))$. Если $b = 0$, то проведем в графе $G_1(S)$ дуги с метками $(a, a')$ из вершины $(q, f)$ во все вершины вида $(q', f') \in Q_1$, где $f' \in F$.

2. Построим граф $G_2(S)$. Для этого проведём с $G_1(S)$ следующую процедуру. Вершину графа $G_1(S)$ назовём неправильной, если существует такое $a \in A$, что множество дуг, выходящих из данной вершины и помеченных метками вида $(a, a')$, пусто. Выкинем из $G_1'(S)$ все неправильные вершины. При выкидывании вершины выкидываются также все дуги выходящие из неё или входящие в неё. После этого какие-нибудь другие вершины могут стать неправильными. Выкидываем и их тоже. Продолжаем выкидывание до тех пор пока в графе не останется неправильных вершин. Полученный граф назовём $G_1'(S)$. Выкинем из графа $G_1'(S)$ все вершины, недостижимые из выделенных вершин, и получим граф $G_2(S)$. Множество вершин графа $G_2(S)$ обозначим $Q_2$.

3. Если множество $Q_2$ пусто, то НДА $G_3(S)$ считаем пустым. Иначе, строим НДА $G_3(S) = (A', U, B', \varphi, \psi, u^0)$ следующим образом.

$U$ есть множество всех таких $u = (\{q_1, \ldots, q_{n_u}\}, f) \in 2^Q \times F$, что для всех $i : 1 \leqslant i \leqslant n_u$ $(q_i, f) \in Q_2$.

Начальными являются все состояния вида $(\{q^0\}, f)$, где $f \in F$, и никакие больше.

$\psi(u, a') = \psi((\{q_1, \ldots, q_{n_u}\}, f), a') \stackrel{\text{def}}{=} f(a')$.

Пусть $(q, f) \in Q_2$ и $a' \in A'$. Обозначим $\chi^1((q, f), a')$ множество всех таких $q' \in Q$, для которых найдется такое $f' \in F$, что в графе $G_2(S)$ существует дуга из $(q, f)$ в $(q', f') \in Q_2$ с меткой вида $(*, a')$, где вместо $*$ может быть поставлена любая буква из $A$.

Пусть $u = (\{q_1, \ldots, q_{n_u}\}, f) \in U$ и $a' \in A'$. Положим по определению

$$\chi^2(u, a') \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n_u} \chi^1((q_i, f), a').$$

$\varphi(u, a')$ положим по определению как множество всех $u' \in U$ вида $u' = (\chi^2(u, a'), f)$, где $f \in F$.

**Теорема 1 (решение уравнения с одной неизвестной).** *Автомат $z$ является решением автоматного уравнения $S(x) = h_0$ тогда и только тогда, когда $z$ вложим в $G_3(S)$.*

## 2. Упрощение автоматного уравнения

**Доказательство утверждения 1.**

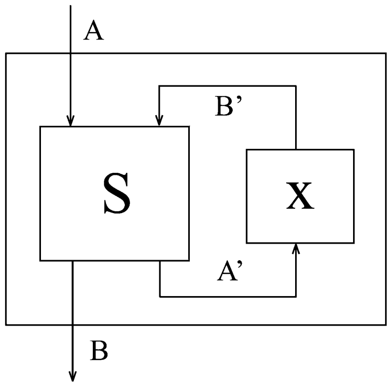


Рис. 5.

Пусть $d(a, b)$ — такой автомат, что для произвольного $t \geqslant 1$ если $a(t) = b(t)$, то $d(t) = 0$, иначе $d(t) = 1$.

Рассмотрим схему $S'$, которая получается из схем $S$ и $h$ следующим образом. Выход $y_1$ автомата $S$ и выход автомата $h$ соединяем со входами автомата $d$. вход $x_1$ и вход $h$ отождествляются. Получается схема, приведенная на рис. 6.

Нетрудно видеть, что уравнение $S(x) = h$ имеет то же множество решений, что и $S'(x) = h_0$. Утверждение доказано.

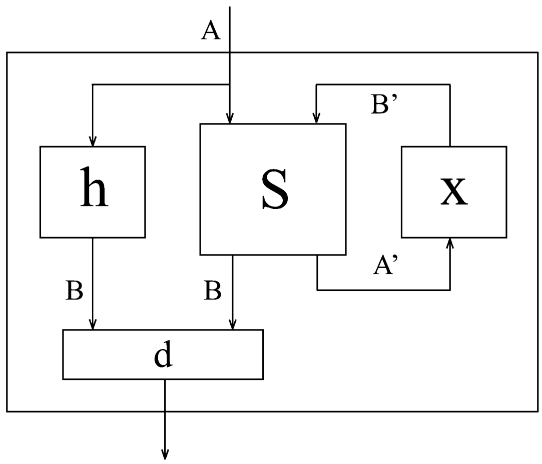


Рис. 6.

## 3. Корректность определения вложимости

**Доказательство утверждения 2.** Пусть $e : Q_2 \to 2^{Q_1}$ — такое отображение, которое каждому состоянию $q_2 \in Q_2$ ставит в соответствие множество эквивалентных ему состояний из $Q_1$. Докажем, что отображение $w'$, такое что для любого $q_2 \in Q_2$ выполнено $w'(q_2) = \bigcup_{q_1 \in e(q_2)} w(q_1)$, вкладывает $z_2$ в $N$.

1) $q_1^0 \in e(q_2^0)$. Значит $w(q_1^0) \subseteq w'(q_2^0)$. Поскольку $w$ — вложение $z_1$ в $N$, то $w(q_1^0) \cap u^0 \neq \varnothing$. Значит $w'(q_2^0) \cap u^0 \neq \varnothing$.

2) Возьмем произвольные $q_2 \in Q_2$, $u \in w'(q_2)$, $a \in A$. По определению $w'$ существует такое $q_1 \in e(q_2)$, что $u \in w(q_1)$. Состояния $q_1$ и $q_2$ эквивалентны, значит $\psi_2(q_2, a) = \psi_1(q_1, a)$. С другой стороны $w$ — вложение $z_1$ в $N$, значит $\psi_1(q_2, a) = \psi(u, a)$. Следовательно $\psi_2(q_2, a) = \psi(u, a)$.

3) Пусть $q_2, q_2' \in Q_2$, $a \in A$ такие, что $q_2' = \varphi_2(q_2, a)$. Возьмем произвольное $u_1 \in w'(q_2)$. По определению $w'$ существует такое $q_1 \in e(q_2)$, что $u_1 \in w(q_1)$. Поскольку состояния $q_1$ и $q_2$ эквивалентны, то в автомате $z_1$ существует некоторое состояние $q_1'$, которое эквивалентно состоянию $q_2'$ и $q_1' = \varphi_2(q_1, a)$. Значит $q_1' \in e(q_2')$. Значит $w(q_1') \subseteq w'(q_2')$. Поскольку $w$ есть вложение $z_1$ в $N$, то существует такое $u_2 \in$

$w(q_1') \subseteq w'(q_2')$, что $u_2 \in \varphi(u_1, a)$. Итак, для произвольного $u_1 \in w'(q_2)$ мы нашли такое $u_2 \in w'(q_2')$, что $u_2 \in \varphi(u_1, a)$. Утверждение доказано.

## 4. Корректность алгоритма

Скажем, что $(q, f) \in Q \times F$ есть *сопутствующее* состояние автомата $R_S(z)$ в какой-то момент времени, если $S$ в этот момент времени находится в состоянии $q$, а $f$ — выходная функция автомата $z$ в этот момент времени.

**Утверждение 3.** *Пусть $S(z) = h_0$. Тогда $S(z)$ в любой момент времени находится в сопутствующем состоянии, входящим в $Q_2$.*

**Доказательство.** Пусть $Q'$ — множество всех сопутствующих состояний, в которых может находиться автомат $S(z)$. Они являются вершинами графа $G_1(S)$, ведь в каждом из них должны быть корректными все обратные связи. Поскольку $z$ — решение, то для каждой вершины из $Q'$ и для каждого $a \in A$ найдется дуга, помеченная меткой $(a, 0, a')$ и ведущая в вершину из $Q'$. Следовательно, ни одна вершина из $Q'$ не будет выкинута и войдет в $G_1''(S)$. Пусть автомат $z$ в начальном состоянии реализует функцию выхода $f$. Тогда вершина $(q^0, f)$ входит в $Q'$ и все вершины $Q'$ достижимы из неё. Следовательно, все вершины $Q'$ являются вершинами $G_2(S)$, то есть $Q' \subseteq Q_2$. Утверждение доказано.

**Следствие 1.** *Если существует такой автомат $z$, что $S(z) = h_0$, то множество состояний $G_2(S)$ не пусто.*

**Доказательство теоремы 1.**

Пусть $z = (A', Q_z, B', \varphi_z, \psi_z, q_z^0)$.

Пусть $G_3(S) = (A', U, B', \varphi, \psi, u^0)$ — НДА.

**Докажем необходимость.** Автомат $z$ есть решение уравнения $S(z) = h_0$, докажем что он вкладывается в $G_3(S)$. Возьмем произвольное $q_z \in Q_z$. Обозначим через $\Omega(q_z)$ множество всех состояний, в которых может находиться автомат $S$ в те моменты времени, когда $z$ находится в состоянии $q_z$. По утверждению 3 если $q \in \Omega(q_z)$, то $(q, \psi_z(q_z))$ есть вершина графа $G_2(S)$. Следовательно,

$u = (\Omega(q_z), \psi_z(q_z))$ входит в множество $U$. Пусть $\omega(q_z)$ есть подмножество $U$, содержащее $u$ и все такие $u' = (r, \psi_z(q_z))$, что $r \subseteq \Omega(q_z)$. Аналогично $\omega$ определяется и для всех других $q_z \in Q_z$. Докажем, что $\omega$ есть вложение $z$ в $G_3(S)$.

1. В начальный момент времени $z$ находится в состоянии $q_z^0$, а $S$ в состоянии $q^0$. Значит $q^0 \in \Omega(q_z^0)$. В НДА $G_3(S)$ есть начальное состояние $u = (\{q^0\}, \psi_z(q_z^0))$. По определению $\omega$ имеем $u \in \omega(q_z^0)$. Значит $\omega(q^0) \cap u^0 \neq \varnothing$.

2. Пусть $q_z$ — произвольное состояние автомата $z$, а $u = (\{q_1, \ldots, q_n\}, \psi_z(q_z))$ — любое состояние из $\omega(q_z)$. Тогда для всех $a' \in A'$ имеем $\psi(u, a') = \psi_z(q_z, a')$.

3. Пусть $q_z, q'_z \in Q_z$, $a' \in A'$ — такие, что $q'_z = \varphi_z(q_z, a')$. Возьмем $u_1$ — любое состояние из $\omega(q_z)$. Необходимо доказать что найдется такое $u_2 \in \omega(q'_z)$, что $u_2 \in \varphi(u_1, a')$. Докажем, что $u_2 = (\chi^2(u_1, a'), \psi_z(q'_z))$ удовлетворяет этим условиям. Пусть $u_1 = (\{q_1, \ldots, q_n\}, \psi_z(q_z))$ и $u_2 = (\{r_1, \ldots, r_m\}, \psi_z(q'_z))$.

а) Докажем, что $\{r_1, \ldots, r_m\} \subseteq \Omega(q'_z)$. Раз $u_1 \in \omega(q_z)$, то для всех $i : 1 \leqslant i \leqslant n$ выполняется $q_i \in \Omega(q_z)$, значит $(q_i, \psi_z(q_z))$ есть вершина графа $G_2(S)$.

$$\{r_1, \ldots, r_m\} = \chi^2(u_1, a') = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} \chi^1(q_i, a').$$

По определению $\chi_1$ отсюда следует что для любого $r_j$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ найдется такое $q_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, что в графе $G_2(S)$ из $q_i$ в $r_j$ идет дуга с меткой $(a, a')$ при некоторым $a \in A$. Пусть $S$ находится в состоянии $q_i$, а $z$ находится в состоянии $q_z$ (это возможно по определению $\Omega(q_z)$). Пусть на вход $x_1$ подали $a$. Тогда $S$ перейдет в состояние $r_j$, на выходе $y_2$ будет $a'$ и $z$ перейдет в состояние $q'_z = \varphi_z(q_z, a')$ (по определению графа $G_1(S)$). Значит, для любого $1 \leqslant j \leqslant m$ $r_j \in \Omega(q'_z)$

б) Поскольку $\{r_1, \ldots, r_m\} \subseteq \Omega(q'_z)$, то для любого $1 \leqslant j \leqslant m$ $(r_j, \psi_z(q'_z))$ есть вершина графа $G_2(S)$. Значит, $u_2 \in U$.

в) Поскольку $\{r_1, \ldots, r_m\} \subseteq \Omega(q'_z)$ и $u_2 \in U$, то по определению $\omega$ имеем $u_2 \in \omega(q'_z)$.

г) Поскольку $u_2 \in U$ и $u_2 = (\chi^2(u_1, a'), \psi_z(q'_z))$, то по определению $\varphi$ имеем $u_2 \in \varphi(u_1, a')$.

Таким образом доказана вложимость $z$ в $G_3(S)$.

**Докажем достаточность.** Пусть $z$ вложим в $G_3(S)$ отображением $\omega$. Нужно доказать что $S(z) = h_0$. Введем отображение $\Omega : Q_z \to 2^Q$.

$$\forall q_z \in Q_z \quad \Omega(q_z) = \bigcup_{u=(\{q_1,\ldots,q_{n_u}\},\psi_z(q_z))\in\omega(q_z)} \{q_1, \ldots, q_{n_u}\}.$$

Докажем, что в любой момент времени если $z$ находится в состоянии $q_z$, то $S$ находится в каком-то состоянии $q$ из множества $\Omega(q_z)$. Сопутствующее состояние $(q, \psi_z(q_z))$ является вершиной графа $G_2(S)$ (по определению $G_3(S)$), в этом состоянии $S(z)$ выдает на выходе 0. Поэтому $S(z)$ будет равен $h_0$.

Доказывать будем индукцией по длине входного слова из алфавита $A$. В начальный момент времени (длина входного слова — ноль) $S$ находится в состоянии $q^0$. Из определения вложимости следует, что хотя бы одно начальное состояние $G_3(S)$ попадает в $\omega(q_z^0)$. А поскольку все они имеют вид $(\{q^0\}, f)$, то из них только $(\{q^0\}, \varphi_z(q_z^0))$ может входить в $\omega(q_z^0)$. Значит, оно и входит. А значит $q^0 \in \Omega(q_z^0)$. Базис индукции доказан.

Пусть утверждение доказано для всех слов длины $n$ ($n \geqslant 0$). Докажем его для всех слов длины $n+1$. Возьмем произвольное слово $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n a}$ длины $n+1$. Пусть после слова $\overline{a_1 \ldots a_n}$ $z$ оказался в состоянии $q_z$ а $S$ — в состоянии $q \in \Omega(q_z)$. Раз $q \in \Omega(q_z)$, то существует такое $u = (r, f) \in \omega(q_z)$, что $q \in r$.

Пусть после этого на вход $x_1$ подается $a$, а на выходе $y_2$ — $a' \in A'$.

В следующий момент времени $z$ перейдет в какое-то состояние $q_z' = \varphi(q_z, a')$, а $S$ перейдет в состояние $q'$. По определению $G_1(S)$ и $\chi^1$ имеем $q' \in \chi^1(q, a')$. По определению $\chi^2$ имеем $q' \in \chi^2(u, a')$. Поскольку $z$ вложим в $G_3(S)$ отображением $\omega$, то найдется такое $u' \in \omega(q_z')$, что $u' \in \psi(u, a')$. По построению $G_3(S)$ $u'$ может быть только вида $u' = (\chi^2(u, a'), f)$, где $f \in F$. Значит найдется такое $f \in F$, что $(\chi^2(u, a'), f) \in \omega(q_z')$. А поскольку $q' \in \chi^2(u, a')$, то по определению $\Omega$ имеем $q' \in \Omega(q_z')$. Шаг индукции и теорема в целом доказаны.

## Список литературы

[1] Лялин И. В. О решении автоматных уравнений // Дискретная Математика. Т. 16, вып. 2. 2004.

[2] Григорян А. К. Метод декомпозиции конечных автоматов // Автоматика и Телемеханика. № 5. 1968.

[3] Григорян А. К. Метод декомпозиции конечных автоматов с выделением выходного и входного автоматов // Автоматика и Телемеханика. № 10. 1968.

[4] Подколзин А. С., Ушчумлич Ш. М. О решении систем автоматных уравнений // Дискретная Математика. Т. 2, вып. 1. 1990.