Алгоритмические проблемы в свободных ассоциативных алгебрах и алгебрах Ли*

А. А. Золотых

Комбинаторная алгебра (комбинаторная теория групп, полугрупп, колец и др.) представляет собой активно развиваемое направление алгебры с широким спектром приложений. Отметим лишь фундаментальные результаты Д. Нильсена, О. Шрайера, В. Магнуса, А. Г. Куроша, А. И. Мальцева, Р. Линдона, Ф. Холла, М. Холла, А. А. Маркова, П. С. Новикова, С. И. Адяна, А. И. Кострикина, А. Л. Шмелькина, А. Ю. Ольшанского, Ю. А. Бахтурина, М. Шутценберже, А. И. Ширшова, Е. Витта, Л. А. Бокутя, В. Н. Латышева, В. Н. Ремесленникова, О. Г. Харлампович. Интенсивно развивалась алгоритмическая теория: раздел комбинаторной теории, исследующий существование алгоритмов для решения основных алгоритмических проблем (проблемы равенства, вхождения, изоморфизма, рекурсивного базиса и т. д.) Основы алгоритмической теории свободных алгебр были заложены А. Г. Курошем и А. И. Мальцевым. А. И. Ширшовым были получены фундаментальные результаты комбинаторной и алгоритмической теории алгебр Ли. Одной из важных целей комбинаторной алгебры является построение эффективных алгоритмов, решающих определенный класс задач в конкретных областях.

Успешное применение компьютеров в последние 20–30 лет укрепило интерес к эффективным алгебраическим конструкциям. Были пересмотрены конструктивные результаты, полученные в прошлом, что привело к формированию новой самостоятельной области — компьютерной алгебры, выросшей из математики, вычислительной ма-

*При финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99–01–00233.

тематики и программирования. Разработка новых алгоритмических решений и создание их компьютерных реализаций позволяет применять новые разработки совместно со всем предыдущим наработанным материалом для создания высокотехнологичной среды научных исследований с использованием символьных преобразований. В основе современных систем компьютерной алгебры лежат эффективные алгоритмы, позволяющие производить символьные вычисления. Основные преимущества систем компьютерной алгебры основаны на возможности производить большие алгебраические вычисления. Появились и специализированные системы для символьных вычислений.

При исследованиях в компьютерной алгебре одним из основных моментов является построение алгоритмов, допускающих компьютерную реализацию. Наиболее разработанным в настоящее время является случай коммутативных колец. Однако в последнее время значительно возрос интерес к некоммутативной компьютерной алгебре. Это вызвано как внутренними потребностями вычислений в некоммутативных алгебраических системах, так и широким спектром реальных задач в теории дифференциальных уравнений и в физике (отметим нелинейные задачи, суперуравнения Кортевега-де-Фриза, уравнения турбулентности, вычисления в супер- и псевдомеханических системах, эволюционные уравнения, теории супергравитации и суперструн, пуассоновы структуры). Ряд пакетов программ позволяет работать с некоммутативными ассоциативными алгебрами.

Изучение свободных алгебр Ли было начато М. Холлом (в 1950-м году он построил базис свободной алгебры Ли — базис Холла). Базисы Линдона – Ширшова были построены в 1958 году Р. Линдоном и А. И. Ширшовым. Канонические базисы идеалов свободных алгебр Ли были введены А. И. Ширшовым в 1962 г. Он доказал теорему о композиции, которая явилась основой для решения серии алгоритмических проблем теории алгебр Ли.

Свободное дифференциальное исчисление для свободных групп было введено Р. Фоксом. Дж. Бирман получила матричный критерий распознавания автоморфизмов свободных групп. У. У. Умирбаев доказал аналог этого результата для свободных алгебр Ли (К. Ройтенауэр и В. Шпильрайн также получили этот критерий; более общая ситуация была рассмотрена В. Шпильрайном и У. У. Умирбаевым). Проблема о якобиане для колец многочленов хорошо известна и пока не решена даже для случая двух переменных. Общая проблема о якобиане для многообразий алгебр была рассмотрена А. В. Ягжевым, он исследовал случай многообразий всех алгебр и всех (анти)коммутативных алгебр. Для свободных ассоциативных алгебр над полем эта проблема была решена для двух переменных У. Диксом и Ж. Левиным, и для многих переменных А. Шеффилдом (А. А. Золотых и А. А. Михалев решили эту проблему для свободных ассоциативных алгебр над коммутативным кольцом). Автоморфизмы и их матрицы Якоби в многообразиях ассоциативных алгебр были рассмотрены Р. Брайентом и В. Дренски. О. Г. Харлампович использовала свободное дифференциальное исчисление в связи с изучением условия Линдона для алгебр Ли. Универсальные дифференцирования ассоциативных алгебр изучались Дж. Бергманом и У. Диксом.

У. У. Умирбаев получил критерий для того, чтобы система элементов свободной группы имела данный ранг. В. Шпильрайн определил понятие ранга элемента свободной алгебры Ли и получил описание ранга однородного по длине элемента свободной алгебры Ли в терминах размерности линейного подпространства смешанных частных производных этого элемента. Г. П. Кукин получил критерий примитивности элемента свободной алгебры Ли в терминах совместности некоторой системы алгебраических уравнений.

Подробное изучение градуировок алгебр Ли ведется уже около 50 лет. При этом проблемы, связанные с градуировками алгебр Ли, постепенно возникают во все новых и новых разделах алгебры, таких как теория деформаций алгебр Ли, а также в некоторых разделах физики. Очень важным этапом стал результат у В. Г. Каца 1969 года, где была дана классификация всех градуировок простых алгебр Ли циклическими группами над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики.

В данной работе собраны наиболее интересные результаты автора последних лет, в том числе еще не опубликованные.

Первая часть работы посвящена результатам, связанным с дифференциальным исчислением в свободных ассоциативных алгебрах и свободных алгебрах Ли. На самом деле, все эти результаты верны также для свободных супералгебр Ли и свободных цветных супералгебр Ли. Однако, чтобы не загромождать работу излишними достаточно сложными определениями, автору показалось разумным ограничиться обычными свободными алгебрами Ли, рассмотрев для полноты картины также свободные p-алгебры Ли в случае конечной характеристики p.

Разработанное дифференциальное исчисление на свободных алгебрах дает возможность построить множество эффективных алгоритмов, таких как определение ранга элемента и системы элементов, определение примитивности элемента и системы элементов, дополнение примитивной системы элементов до множества свободных образующих свободной алгебры, распознавание автоморфизмов среди эндоморфизмов свободной алгебры, и многих других. Большинство результатов, связанных с дифференциальным исчислением, приведено в монографии [1], написанной автором совместно с А. А. Михалевым. К этой же монографии прилагается пакет программ автора для работы со свободными алгебрами.

Вторая часть работы посвящена градуированным простым алгебрам Ли. Результаты, дающие описание коммутационных факторов и конечномерных проективных представлений конечных абелевых групп, напрямую не связаны с алгебрами Ли, однако оказываются необходимыми для завершения классификации внутренних градуировок специальных линейных алгебр $\mathfrak{sl}_n(K)$. Результаты этой части также дают возможность построить множество алгоритмов, таких как алгоритм для описания всех внутренних градуировок специальных линейных алгебр, алгоритм для описания всех конечных абелевых подгрупп группы внутренних автоморфизмов $\mathfrak{sl}_n(K)$, алгоритм для определения эквивалентности градуировок, и некоторых других.

1. Свободные алгебры

Здесь и далее, если не оговорено противного, K будет обозначать произвольное коммутативное ассоциативное кольцо, то есть абелеву группу по сложению, на которой определена дополнительно коммутативная ассоциативная операция умножения, причем сложение и умножение связаны законом дистрибутивности.

Примером такого кольца является произвольное поле (например, поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, поле действительных чисел $\mathbb{R}$, поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, поле вычетов $\mathbb{Z}_p$ по модулю произвольного простого числа p). В большинстве приведенных ниже результатов в качестве K будет рассматриваться именно поле.

Мы будем говорить, что кольцо K имеет единицу, если существует такой элемент $1 \in K$, что $1 \cdot a = a$ для всех $a \in K$. Все рассматриваемые в данной работе кольца имеют единицу.

Мы говорим, что поле K имеет конечную характеристику p, $\operatorname{char} K = p$, где p — простое число, если $p\,a = 0$ для всех $a \in K$. В противном случае мы говорим, что характеристика поля K равна нулю, $\operatorname{char} K = 0$. В этом случае для любого натурального числа n и любого ненулевого элемента $a \in K$ элемент $n\,a$ отличен от нуля. Поле называется алгебраически замкнутым, если над этим полем любой многочлен ненулевой степени имеет корень.

Другими широко распространенными примерами коммутативного ассоциативного кольца являются кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$, кольцо вычетов $\mathbb{Z}_n$ по модулю непростого натурального числа $n > 1$, и кольцо многочленов $F[t_1, \ldots, t_n]$ над произвольным полем F от переменных $t_1, \ldots, t_n$. Мы будем говорить, что кольцо K имеет конечную характеристику p, где p — простое число, если $p\,a = 0$ для всех $a \in K$.

Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — произвольный конечный алфавит. Через $S(X)$ мы будем обозначать множество всех слов в алфавите X. На множестве $S(X)$ естественным образом определена операция умножения, которая заключается в приписывании одного слова к другому. В этом смысле любое слово $a \in S(X)$ является произведением некоторого числа элементов алфавита X (букв), то есть $a = x_{i_1} \cdots x_{i_s}$, $s \geqslant 0$.

Пусть S — произвольное множество. *Свободным K-модулем с множеством свободных образующих S* мы будем называть множество, состоящее из всех конечных формальных сумм элементов $\beta\,a$, где $\beta \in K$ и $a \in S$. Мы естественным образом можем складывать эти формальные суммы, приводя подобные члены (складывая коэффициенты при одинаковых элементах S и выбрасывая элементы с нулевыми коэффициентами, если они при этом появляются). Пустая формальная сумма при этом играет роль нулевого элемента. Заметим, что если K — поле, свободный K-модуль с множеством свободных образующих S является обычным K-линейным пространством с базисом S.

Для любого элемента $\beta \in K$ и любого элемента

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, a_i$$

свободного K-модуля, где $\alpha_i \in K$, $a_i \in S$, естественным образом определено произведение

$$\beta \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, a_i \right) = \sum_{i=1}^{k} \beta\, \alpha_i\, a_i.$$

Рассмотрим свободный K-модуль $A(X)$ с множеством свободных образующих $S(X)$. Определим на $A(X)$ операцию умножения, полагая

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j\, b_j \right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i\, \beta_j\, a_i\, b_j$$

для всех $\alpha_i, \beta_j \in K$, $a_i, b_j \in S(X)$. Эта операция умножения ассоциативна и является дистрибутивной по отношению к операции сложения.

Определенная таким образом алгебра $A(X)$ называется *свободной ассоциативной алгеброй* алфавита X над кольцом K.

Введем на алгебре $A(X)$ новую операцию умножения $[\ ,\ ]$, полагая

$$[a, b] = ab - ba$$

для всех $a, b \in A(X)$.

Обозначим через $L(X)$ минимальное подмножество $A(X)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $X \subseteq L(X)$;
2) если $\alpha, \beta \in K$ и $a, b \in L(X)$, то $\alpha\, a + \beta\, b \in L(X)$;
3) если $a, b \in L(X)$, то $[a, b] \in L(X)$.

Алгебра $L(X)$ называется *свободной алгеброй Ли* алфавита X над кольцом K. Непосредственной проверкой легко убедиться, что в свободной алгебре Ли для всех $\alpha \in K$ и $a, b \in L(X)$ выполняются следующие соотношения, обычно используемые в качестве определения алгебр Ли:

$$[\alpha\, a, b] = [a, \alpha\, b] = \alpha\, [a, b] \qquad \text{(линейность);} \qquad (1)$$

$$[a, b] = -[b, a] \qquad \text{(кососимметричность);} \qquad (2)$$

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0 \quad \text{(тождество Якоби).} \qquad (3)$$

В случае, если кольцо K имеет характеристику p, где p — простое число, мы определим свободную p-алгебру Ли $L^p(X) \subseteq A(X)$ следующим образом:

1) $X \subseteq L^p(X)$;
2) если $\alpha, \beta \in K$ и $a, b \in L^p(X)$, то $\alpha\, a + \beta\, b \in L^p(X)$;
3) если $a, b \in L^p(X)$, то $[a, b] \in L^p(X)$;
4) если $a \in L^p(X)$, то $a^p \in L^p(X)$.

2. Свободное дифференциальное исчисление

Целью данного параграфа является определение частных производных элементов свободной ассоциативной алгебры $A(X)$, свободной алгебры Ли $L(X)$ и свободной p-алгебры Ли $L^p(X)$ по переменным алфавита X. Примером для подражания в данном случае являются частные производные $\dfrac{\partial}{\partial\, t_j}$, естественным образом определенные на кольце обычных коммутативных многочленов $F[t_1, \ldots, t_n]$.

Оператор дифференцирования $\dfrac{\partial}{\partial\, x_j}$ на свободной алгебре Ли $L(X)$ по произвольной переменной $x_j \in X$ принимает значения в свободной ассоциативной алгебре $A(X)$, то есть $\dfrac{\partial}{\partial\, x_j} \colon L(X) \to A(X)$. Этот оператор дифференцирования может быть определен следующим образом:

1) $\dfrac{\partial\, x_i}{\partial\, x_j} = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера;
2) $\dfrac{\partial\, (\alpha\, a + \beta\, b)}{\partial\, x_j} = \alpha\, \dfrac{\partial\, a}{\partial\, x_j} + \beta\, \dfrac{\partial\, b}{\partial\, x_j}$ для всех $\alpha, \beta \in K$ и всех $a, b \in L(X)$;
3) $\dfrac{\partial\, [a, b]}{\partial\, x_j} = \dfrac{\partial\, a}{\partial\, x_j}\, b - \dfrac{\partial\, b}{\partial\, x_j}\, a$ для всех $a, b \in L(X)$.

В частности, легко видеть, что если элемент $a \in L(X)$ не зависит от переменной $x_j \in X$, то $\dfrac{\partial\, a}{\partial\, x_j} = 0$.

Аналогичным образом определяется оператор дифференцирования $\dfrac{\partial}{\partial\, x_j}\colon L^p(X) \to A(X)$ свободной p-алгебры Ли $L^p(X)$ в случае, если K имеет характеристику p. Этот оператор определяется следующим образом:

1) $\dfrac{\partial\, x_i}{\partial\, x_j} = \delta_{ij}$;

2) $\dfrac{\partial\,(\alpha\, a+\beta\, b)}{\partial\, x_j} = \alpha\,\dfrac{\partial\, a}{\partial\, x_j} + \beta\,\dfrac{\partial\, b}{\partial\, x_j}$ для всех $\alpha, \beta \in K$ и всех $a, b \in L^p(X)$;

3) $\dfrac{\partial\,[a,b]}{\partial\, x_j} = \dfrac{\partial\, a}{\partial\, x_j}\, b - \dfrac{\partial\, b}{\partial\, x_j}\, a$ для всех $a, b \in L^p(X)$;

4) $\dfrac{\partial\,(a^p)}{\partial\, x_j} = \dfrac{\partial\, a}{\partial\, x_j}\, a^{p-1}$ для всех $a \in L^p(X)$.

Данные частные производные на свободной алгебре Ли $L(X)$ и свободной p-алгебре Ли $L^p(X)$ называются *(левыми) производными Фокса* в честь Р. Фокса, который ввел аналогичные частные производные на свободных группах.

Можно дать и другое (эквивалентное) определение левых производных Фокса. Пусть $a \in L(X)$ (соответственно $a \in L^p(X)$) — произвольный элемент. Поскольку $L(X) \subseteq A(X)$ (соответственно $L^p(X) \subseteq A(X)$) и элемент a не имеет свободного члена, он может быть единственным образом записан в виде

$$a = \sum_{j=1}^{n} x_j\, b_j,$$

где $b_1, \ldots, b_n \in A(X)$. Оказывается, что $b_j = \dfrac{\partial\, a}{\partial\, x_j}$ для всех $x_j \in X$, то есть

$$a = \sum_{j=1}^{n} x_j\, \frac{\partial\, a}{\partial\, x_j}. \tag{4}$$

Введенные операторы дифференцирования имеет смысл применять только к элементам алгебр $L(X)$ и $L^p(X)$. Хотя формально, используя соотношение (4), производные Фокса можно считать определенными и для всех элементов a свободной ассоциативной алгебры, все хорошие свойства частных производных в этом случае теряются. Например, для элемента $a = x_1\, x_2$ мы получаем $\dfrac{\partial\, a}{\partial\, x_2} = 0$, в то время как a зависит от x_2.

Мы видим, что частные производные на элементах свободной ассоциативной алгебры $A(X)$ надо определять особым образом.

Рассмотрим множество $A^{\otimes}(X) = A(X) \otimes_K A(X)$, то есть свободный K-модуль с множеством свободных образующих $a \otimes b$, где $a, b \in S(X)$. Определим на K-модуле $A^{\otimes}(X)$ операцию умножения, полагая

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\,(a_i \otimes b_i)\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j\,(c_j \otimes d_j)\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i\,\beta_j\,(c_j\,a_i \otimes b_i\,d_j)$$

для всех $\alpha_i, \beta_j \in K$ и $a_i, b_i, c_j, d_j \in S(X)$. Кроме того, мы можем определить произведение элемента $A(X)$ и элемента $A^{\otimes}(X)$, результатом которого будет элемент $A(X)$, считая

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\,a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j\,(b_j \otimes c_j)\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i\,\beta_j\,b_j\,a_i\,c_j$$

для всех $\alpha_i, \beta_j \in K$ и $a_i, b_j, c_j \in S(X)$.

Теперь мы имеем все необходимое, чтобы определить частные производные $\dfrac{\partial}{\partial\, x_j}$ элементов свободной ассоциативной алгебры $A(X)$. Мы здесь допускаем некоторую вольность, используя одно и то же обозначение $\dfrac{\partial}{\partial\, x_j}$ для частных производных как элементов свободной алгебры Ли $L(X)$, так и элементов свободной ассоциативной алгебры $A(X)$. Хотя $L(X) \subseteq A(X)$, обычно из контекста будет ясно, о каких частных производных идет речь.

Итак, для любого $x_j \in X$ оператор дифференцирования $\dfrac{\partial}{\partial\, x_j}$ свободной ассоциативной алгебры $A(X)$ принимает значения в алгебре

$A^{\otimes}(X)$, то есть $\dfrac{\partial}{\partial\, x_j}\colon A(X) \to A^{\otimes}(X)$. Этот оператор дифференцирования может быть определен следующим образом:

1) $\dfrac{\partial\,(1)}{\partial\, x_j} = 0$;

2) $\dfrac{\partial\, x_i}{\partial\, x_j} = \delta_{ij} \cdot (1 \otimes 1)$;

3) $\dfrac{\partial\,(\alpha\, a + \beta\, b)}{\partial\, x_j} = \alpha\, \dfrac{\partial\, a}{\partial\, x_j} + \beta\, \dfrac{\partial\, b}{\partial\, x_j}$ для всех $\alpha, \beta \in K$ и всех $a, b \in A(X)$;

4) $\dfrac{\partial\,(a\, b)}{\partial\, x_j} = \dfrac{\partial\, a}{\partial\, x_j} \cdot (1 \otimes b) + \dfrac{\partial\, b}{\partial\, x_j} \cdot (a \otimes 1)$ для всех $a, b \in A(X)$.

3. Автоморфизмы и гипотеза о якобиане

Рассмотрим кольцо многочленов $K = F[t_1, \ldots, t_n]$ над произвольным полем F нулевой характеристики. F-линейное отображение $\varphi\colon K \to K$ называется *эндоморфизмом* кольца многочленов K, если $\varphi(a\, b) = \varphi(a)\, \varphi(b)$ для всех $a, b \in K$. Эндоморфизм φ называется *автоморфизмом*, если φ является биективным отображением.

Для произвольного эндоморфизма φ кольца многочленов $F[t_1, \ldots, t_n]$ через $J(\varphi)$ мы обозначим $(n \times n)$-матрицу

$$J(\varphi) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\, \varphi(t_1)}{\partial\, t_1} & \cdots & \dfrac{\partial\, \varphi(t_n)}{\partial\, t_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial\, \varphi(t_1)}{\partial\, t_n} & \cdots & \dfrac{\partial\, \varphi(t_n)}{\partial\, t_n} \end{pmatrix},$$

называемую *якобианом* эндоморфизма φ. Нетрудно проверить, что если φ является автоморфизмом, то матрица $J(\varphi)$ обратима.

Гипотеза. *Если якобиан $J(\varphi)$ эндоморфизма φ кольца многочленов $F[t_1, \ldots, t_n]$ обратим, то φ является автоморфизмом.*

Данная классическая гипотеза о якобиане была сформирована очень давно. До сих пор ответ о справедливости этой гипотезы не найден даже в случае $n = 2$.

Аналогичную гипотезу можно сформулировать также для свободной алгебры Ли $L(X)$, свободной p-алгебры Ли $L^p(X)$ и свободной ассоциативной алгебры $A(X)$.

Отображение $\varphi\colon L(X) \to L(X)$ называется *эндоморфизмом* свободной алгебры Ли $L(X)$, если:

1) $\varphi(\alpha\, a + \beta\, b) = \alpha\,\varphi(a) + \beta\,\varphi(b)$ для всех $\alpha, \beta \in K$ и $a, b \in L(X)$;
2) $\varphi([a,b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$ для всех $a, b \in L(X)$.

Эндоморфизм φ свободной алгебры Ли $L(X)$ называется *автоморфизмом*, если он является биективным отображением.

Аналогично, отображение $\varphi\colon L^p(X) \to L^p(X)$ называется *эндоморфизмом* свободной p-алгебры Ли $L^p(X)$, если:

1) $\varphi(\alpha\, a + \beta\, b) = \alpha\,\varphi(a) + \beta\,\varphi(b)$ для всех $\alpha, \beta \in K$ и $a, b \in L^p(X)$;
2) $\varphi([a,b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$ для всех $a, b \in L^p(X)$;
3) $\varphi(a^p) = \varphi(a)^p$ для всех $a \in L^p(X)$.

Эндоморфизм φ свободной p-алгебры Ли $L^p(X)$ называется *автоморфизмом*, если он является биективным отображением.

Наконец, отображение $\varphi\colon A(X) \to A(X)$ называется *эндоморфизмом* свободной ассоциативной алгебры $A(X)$, если:

1) $\varphi(\alpha\, a + \beta\, b) = \alpha\,\varphi(a) + \beta\,\varphi(b)$ для всех $\alpha, \beta \in K$ и $a, b \in A(X)$;
2) $\varphi(a\, b) = \varphi(a)\,\varphi(b)$ для всех $a, b \in A(X)$.

Эндоморфизм φ свободной ассоциативной алгебры $A(X)$ называется *автоморфизмом*, если он является биективным отображением.

Для произвольного подмножества $H = \{h_1, \ldots, h_m\}$ элементов свободной алгебры Ли $L(X)$, свободной p-алгебры Ли $L^p(X)$ или свободной ассоциативной алгебры $A(X)$ через $J(H)$ обозначим матрицу

$$J(H) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\, h_1}{\partial\, x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\, h_m}{\partial\, x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial\, h_1}{\partial\, x_n} & \cdots & \dfrac{\partial\, h_m}{\partial\, x_n} \end{pmatrix}.$$

Для произвольного элемента a одной из свободных алгебр $L(X)$, $L^p(X)$ или $A(X)$ обозначим через $\partial(a)$ столбец

$$\partial(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\, a}{\partial\, x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial\, a}{\partial\, x_n} \end{pmatrix},$$

то есть $\partial(a) = J(\{a\})$.

Наконец, для эндоморфизма φ свободной алгебры Ли, свободной p-алгебры Ли или свободной ассоциативной алгебры через $J(\varphi)$ мы обозначим $(n \times n)$-матрицу

$$J(\varphi) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\, \varphi(x_1)}{\partial\, x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\, \varphi(x_n)}{\partial\, x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial\, \varphi(x_1)}{\partial\, x_n} & \cdots & \dfrac{\partial\, \varphi(x_n)}{\partial\, x_n} \end{pmatrix},$$

которая называется *матрицей Якоби* эндоморфизма φ. При этом $J(\varphi) = J(\{\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)\})$.

Положительное решение гипотезы о якобиане для свободных алгебр Ли над полем было дано независимо У. У. Умирбаевым, В. Э. Шпильрайном и Х. Ройтенауером. Для свободных p-алгебр Ли аналогичный результат был получен А. А. Михалевым. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть L — свободная алгебра Ли или свободная p-алгебра Ли алфавита $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ над полем. Эндоморфизм φ алгебры L является автоморфизмом тогда и только тогда, когда матрица Якоби $J(\varphi)$ обратима над $A(X)$.*

Для свободных алгебр Ли эта гипотеза оказывается верна также над произвольным коммутативным ассоциативным кольцом с единицей.

Теорема 2 (А. А. Золотых, А. А. Михалев, [9]). *Эндоморфизм φ свободной алгебры Ли $L(X)$ над произвольным коммутативным* *ассоциативным кольцом с единицей является автоморфизмом тогда и только тогда, когда матрица Якоби $J(\varphi)$ обратима над $A(X)$.*

Рассмотрим теперь свободную ассоциативную алгебру $A(X)$. Гипотезу о якобиане для свободных ассоциативных алгебр над полем доказали В. Дикс, Дж. Левин (в случае $n = 2$) и А. Х. Шофилд (в общем случае).

Теорема 3. *Эндоморфизм φ свободной ассоциативной алгебры $A(X)$ над полем является автоморфизмом тогда и только тогда, когда матрица Якоби $J(\varphi)$ обратима над $A^{\otimes}(X)$.*

Автором совместно с А. А. Михалевым удалось доказать гипотезу о якобиане для свободных ассоциативных алгебр над произвольным коммутативным ассоциативным кольцом с единицей.

Теорема 4 (А. А. Золотых, А. А. Михалев, [8]). *Эндоморфизм φ свободной ассоциативной алгебры $A(X)$ над произвольным коммутативным ассоциативным кольцом с единицей является автоморфизмом тогда и только тогда, когда матрица Якоби $J(\varphi)$ обратима над $A^{\otimes}(X)$.*

Приведенные выше теоремы дают возможность построить алгоритмы, позволяющие определять, являются ли рассматриваемые эндоморфизмы автоморфизмами.

4. Теоремы о ранге

Везде в этом и следующем параграфах K — поле, $\operatorname{char} K \neq 2$. Обозначим через $L_X = L(X)$ в случае, если поле K имеет нулевую характеристику, и $L_X = L^p(X)$, если K имеет характеристику p.

Линейное подпространство I свободной ассоциативной алгебры $A(X)$ над полем называется *левым идеалом* этой алгебры, если $A(X) \cdot I \subseteq I$. Левым идеалом алгебры $A(X)$, *порожденным конечным множеством элементов* $a_1, \ldots, a_m \in A(X)$ называется левый идеал

$$A(X)\, a_1 + \cdots + A(X)\, a_m,$$

то есть множество всех элементов вида $b_1\, a_1 + \cdots + b_m\, a_m$, где $b_1, \ldots, b_m$ пробегают все элементы $A(X)$. Мы говорим, что левый идеал I алгебры $A(X)$ является *конечно порожденным*, если существует конечное множество $a_1, \ldots, a_m$, порождающее этот левый идеал. Хорошо известно, что для любого конечно порожденного левого идеала $I \subseteq A(X)$ найдутся такие элементы $a_1, \ldots, a_m$, порождающие этот левый идеал, что равенство

$$b_1\, a_1 + \cdots + b_m\, a_m = 0$$

выполняется только в случае $b_1 = \cdots = b_m = 0$. Такие элементы $a_1, \ldots, a_m$ называются *свободными порождающими* левого идеала I. Хотя множество свободных порождающих конечно порожденного левого идеала может быть выбрано различными способами, число элементов в этом множестве неизменно. Это число называется *рангом* конечно порожденного левого идеала I.

Мы будем говорить, что элемент $h \in L(X)$ (соответственно $h \in L^p(X)$) имеет ранг k, если k — наименьшее число образующих из X, от которых зависит элемент $\varphi(h)$, где φ пробегает множество всех автоморфизмов алгебры Ли $L(X)$ (соответственно, p-алгебры $L^p(X)$). Ранг элемента h мы будем обозначать через $\operatorname{rank}(h)$.

Теорема 5 (А. А. Золотых, А. А. Михалев, [3, 5, 7]). *Пусть h — произвольный элемент алгебры L_X. Тогда ранг элемента h равен рангу левого идеала алгебры $A(X)$, порожденного элементами* $\dfrac{\partial h}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial h}{\partial x_n}$.

Рассмотрим линейное пространство $A(X)^k = A(X)e_1 + \cdots + A(X)e_k$, являющееся прямой суммой k линейных пространств, изоморфных $A(X)$. Естественным образом определено умножение элементов линейного пространства $A(X)^k$ слева на элементы $A(X)$,

$$a \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} b_i\, e_i \right) = \sum_{i=1}^{k} a\, b_i\, e_i,$$

где $a, b_1, \ldots, b_k \in A(X)$. Линейное пространство $A(X)^k$ называется свободным k-порожденным левым $A(X)$-модулем.

Линейное подпространство V свободного модуля $A(X)^k$ называется *подмодулем*, если $A(X)\cdot V \subseteq V$. Подмодулем модуля $A(X)^k$, *порожденным конечным множеством элементов* $a_1,\dots,a_m \in A(X)^k$ называется подмодуль вида

$$A(X)\,a_1 + \cdots + A(X)\,a_m,$$

то есть множество всех элементов вида $b_1\,a_1+\cdots+b_m\,a_m$, где $b_1,\dots,b_m$ пробегают все элементы $A(X)$. Все такие подмодули называются *конечно порожденными.* Хорошо известно, что для любого конечно порожденного подмодуля $V \subseteq A(X)^k$ найдутся *свободные порождающие* этого подмодуля, то есть такие порождающие элементы $a_1,\dots,a_m$ этого подмодуля, что равенство

$$b_1\,a_1 + \cdots + b_m\,a_m = 0$$

выполняется только в случае $b_1 = \cdots = b_m = 0$. Число свободных порождающих конечно порожденного подмодуля является инвариантом этого подмодуля, и называется *рангом* этого подмодуля.

Мы будем говорить, что произвольное множество элементов $\{h_1,\dots,h_s\}$ свободной алгебры Ли $L(X)$ (свободной p-алгебры Ли $L^p(X)$ соответственно) имеет ранг k, и будем писать $\mathrm{rank}(\{h_1,\dots,h_s\}) = k$, если k — наименьшее число образующих из X, от которых зависит множество элементов $\{\varphi(h_1),\dots,\varphi(h_s)\}$, где φ пробегает множество всех автоморфизмов свободной алгебры Ли $L(X)$ (свободной p-алгебры Ли $L^p(X)$ соответственно).

Теорема 6 (А. А. Золотых, А. А. Михалев, [3, 5, 7]). *Пусть $h_1,\dots,h_k$ — произвольные элементы алгебры L_X. Тогда ранг системы элементов $\{h_1,\dots,h_k\}$ равен рангу свободного левого $A(X)$-подмодуля свободного $A(X)$-модуля $A(X)^k$, порожденного элементами*

$$\left\{\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\,h_i}{\partial\,x_j}\,e_i\;\middle|\;x_j\in X\right\}.$$

Другими словами, ранг системы элементов $H = \{h_1,\dots,h_k\}$ равен рангу системы строк матрицы $J(H)$, рассматриваемых как элементы левого $A(X)$-модуля.

На основе данных теорем легко построить алгоритмы, позволяющие определить ранги элементов и систем элементов свободных алгебр Ли и свободных p-алгебр Ли.

5. Автоморфизмы и примитивные элементы

Мы будем говорить, что элемент $h \in L(X)$ (элемент $h \in L^p(X)$ соответственно) является примитивным, если он может быть включен в некоторое множество свободных образующих алгебры $L(X)$ ($L^p(X)$ соответственно), то есть если существует автоморфизм φ этой алгебры, такой что $\varphi(x_1) = h$.

Система элементов $\{h_1, \ldots, h_m\}$ свободной алгебры Ли $L(X)$ (свободной p-алгебры Ли $L^p(X)$ соответственно) называется примитивной, если она является подмножеством некоторого множества свободных образующих алгебры $L(X)$ (алгебры $L^p(X)$ соответственно), то есть если существует автоморфизм φ этой алгебры, такой что $\varphi(x_i) = h_i$ для всех $i = 1, \ldots, m$.

Автору совместно с А. А. Михалевым удалось получить легко проверяемые критерии примитивности элементов и систем элементов. На основе этих критериев легко могут быть построены соответствующие алгоритмы.

Теорема 7 (А. А. Золотых, А. А. Михалев, [3, 5, 7]). *Пусть h — произвольный элемент алгебры L_X. Тогда эквивалентны следующие условия:*

a) элемент h примитивен;

b) существуют такие элементы $a_1, \ldots, a_n \in A(X)$, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial h}{\partial x_i} = 1,$$

то есть столбец $\partial(h)$ обратим как матрица слева над $A(X)$.

Заметим, что утверждение данной теоремы не имеет места для свободной алгебры Ли $L(X)$ в случае, когда $\operatorname{char} K = p > 2$.

Теорема 8 (А. А. Золотых, А. А. Михалев, У. У. Умирбаев, [4, 10]**).** *Пусть K — поле, $\operatorname{char} K = p > 2$, $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, и $L(X)$ — свободная алгебра Ли алфавита X над полем K. Рассмотрим элемент*

$h = x_1 + [x_2, x_3] + (\mathrm{ad}\, x_1)^p(x_3) \in L(X)$, *где* $\mathrm{ad}\, x_1$ *означает оператор умножения слева на элемент* x_1. *Тогда:*

a) h *не является примитивным элементом алгебры* $L(X)$*;*

b) существуют элементы $a_1, a_2, a_3 \in A(X)$*, такие что*

$$a_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial h}{\partial x_3} = 1.$$

Данный пример позволил дать отрицательный ответ на вопрос о свободе произвольной алгебры Ли когомологической размерности 1.

Теорема 9 (А. А. Золотых, А. А. Михалев, [3, 5, 7]). *Пусть* $h_1, \ldots, h_k$ *— произвольные элементы алгебры* L_X. *Тогда эквивалентны следующие условия:*

a) система $\{h_1, \ldots, h_k\}$ *примитивна;*

b) существуют такие элементы $a_{ij} \in A(X)$*, где* $i = 1, \ldots, k$ *и* $j = 1, \ldots, n$*, что для всех* $r, s = 1, \ldots, k$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ri} \frac{\partial h_s}{\partial x_i} = \delta_{rs},$$

то есть $(n \times k)$*-матрица* $J(\{h_1, \ldots, h_k\})$ *обратима слева над* $A(X)$.

Подмножество, состоящее из примитивных элементов, может не быть примитивной системой элементов. Действительно, пусть g — такой элемент алгебры L_X, что g не зависит от x_1, $h_1 = x_1$ и $h_2 = x_1 + g$. Так как $\dfrac{\partial h_1}{\partial x_1} = \dfrac{\partial h_2}{\partial x_1} = 1$, мы видим что h_1, h_2 — примитивные элементы. При этом ранг системы $\{h_1, h_2\}$ равен $\mathrm{rank}(g) + 1$, то есть в случае $\mathrm{rank}(g) > 1$ эта система не примитивна.

Приведем еще одну теорему, позволяющую определять, является ли рассматриваемый эндоморфизм автоморфизмом.

Теорема 10 (А. А. Золотых, А. А. Михалев, [2, 6]). *Пусть* $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *и* φ *— такой эндоморфизм алгебры* L_X*, что для любого примитивного элемента* $u \in L_X$ *элемент* $\varphi(u)$ *также примитивен. Тогда* φ *— автоморфизм алгебры* L_X.

Условия данной теоремы нельзя ослабить, рассматривая только линейные комбинации элементов свободного порождающего множества.

Теорема 11 (А. А. Золотых, А. А. Михалев, [6]). *Пусть $n \geqslant 3$, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, поле K не является алгебраически замкнутым, и L — это свободная алгебра Ли $L(X)$ или свободная p-алгебра Ли $L^p(X)$. Тогда существует такой эндоморфизм φ алгебры L, что φ не является автоморфизмом, однако для любой ненулевой линейной комбинации a элементов из X образ $\varphi(a)$ является примитивным элементом.*

6. Коммутационные факторы

Пусть G — конечная абелева группа, K — поле, K^* — множество обратимых элементов K (то есть всех ненулевых элементов). Отображение $\varepsilon\colon G \times G \to K^*$ называется *коммутационным фактором*, если

$$\varepsilon(f,g)\,\varepsilon(g,f) = 1, \qquad \varepsilon(g,g) = \pm 1,$$
$$\varepsilon(f\,g,h) = \varepsilon(f,h)\,\varepsilon(g,h), \qquad \varepsilon(f,g\,h) = \varepsilon(f,g)\,\varepsilon(f,h)$$

для всех $f, g, h \in G$. Коммутационный фактор ε мы будем называть *положительно определенным*, если $\varepsilon(g,g) = 1$ для всех $g \in G$.

Мы будем говорить, что коммутационный фактор ε' на группе G' *эквивалентен* коммутационному фактору ε'' на группе G'', и будем писать $\varepsilon' \sim \varepsilon''$, если существует изоморфизм $\varphi\colon G' \to G''$ групп G' и G'', такой что $\varepsilon'(g,h) = \varepsilon''(\varphi(g), \varphi(h))$ для всех $g, h \in G'$.

Ядром коммутационного фактора ε называется множество G_ε, состоящее из всех таких элементов $g \in G$, что $\varepsilon(g,h) = 1$ для всех $h \in G$. Очевидно, что ядро коммутационного фактора образует подгруппу группы G. Коммутационный фактор ε называется *невырожденным*, если его ядро G_ε тривиально.

Мы будем говорить, что подгруппы G_1, G_2 группы G *ортогональны относительно коммутационного фактора* ε, если $\varepsilon(G_1, G_2) = 1$. В частности, ядро коммутационного фактора — это максимальная подгруппа G, ортогональная всей группе G относительно этого коммутационного фактора. Коммутационный фактор ε на группе G называется *разложимым*, если группа G может быть представлена в виде прямого произведения двух нетривиальных ортогональных относительно ε подгрупп G_1, G_2. В этом случае, обозначая через $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

ограничения коммутационного фактора ε на подгруппы G_1, G_2, мы будем говорить, что коммутационный фактор ε *разлагается в прямое произведение коммутационных факторов* ε_1 и ε_2, и будем записывать это как $\varepsilon = \varepsilon_1 \times \varepsilon_2$.

Здесь и далее $\langle a \rangle_n$ — циклическая группа порядка n с образующим элементом a, и $\boldsymbol{\xi}_n$ — первообразный корень степени n из единицы.

Для произвольного $n = p^k$, где p — простое число, $\operatorname{char} K \neq p$, $k \geqslant 1$, определим коммутационный фактор $\boldsymbol{\epsilon}_n$ на группе $G = \langle a \rangle_n \times \langle b \rangle_n$, полагая $\boldsymbol{\epsilon}_n(a, a) = 1$, $\boldsymbol{\epsilon}_n(a, b) = \boldsymbol{\xi}_n$, $\boldsymbol{\epsilon}_n(b, b) = 1$.

В случае $\operatorname{char} K \neq 2$ для произвольного $n = 2^k$, где $k \geqslant 1$, определим коммутационный фактор $\boldsymbol{\epsilon}'_n$ на группе $G = \langle a \rangle_n \times \langle b \rangle_n$, полагая $\boldsymbol{\epsilon}'_n(a, a) = 1$, $\boldsymbol{\epsilon}'_n(a, b) = \boldsymbol{\xi}_n$, $\boldsymbol{\epsilon}'_n(b, b) = -1$.

В случае $\operatorname{char} K \neq 2$ определим коммутационный фактор $\boldsymbol{\epsilon}''_2$ на группе $G = \langle a \rangle_2$, полагая $\boldsymbol{\epsilon}''_2(a, a) = -1$.

Следующие две теоремы дают классификацию невырожденных коммутационных факторов на конечных группах. Заметим, что любой коммутационный фактор распадается в прямое произведение коммутационных факторов, определенных на максимальных p-подгруппах. Поэтому мы будем рассматривать только случай, когда порядок группы G является степенью простого числа.

Теорема 12 (А. А. Золотых, [11]). *Пусть G — конечная ненулевая абелева p-группа, и ε — невырожденный неразложимый коммутационный фактор на G. Тогда выполнено одно из следующих условий:*

$\varepsilon \sim \boldsymbol{\epsilon}_{p^k}$, где p — простое число, $k \geqslant 1$, и $\operatorname{char} K \neq p$;
$\varepsilon \sim \boldsymbol{\epsilon}'_{2^k}$, где $k \geqslant 2$, и $\operatorname{char} K \neq 2$;
$\varepsilon \sim \boldsymbol{\epsilon}''_2$, и $\operatorname{char} K \neq 2$.

Теорема 13 (А. А. Золотых, [11]). *Пусть G — конечная ненулевая абелева p-группа, и ε — невырожденный коммутационный фактор на G. Тогда ε эквивалентен одному из следующих коммутационных факторов:*

$\boldsymbol{\epsilon}_{p^{k_1}} \times \ldots \times \boldsymbol{\epsilon}_{p^{k_r}}$, где $r \geqslant 1$, $k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_r > 0$, и $\operatorname{char} K \neq p$;
$\boldsymbol{\epsilon}''_2 \times \boldsymbol{\epsilon}_{2^{k_1}} \times \ldots \times \boldsymbol{\epsilon}_{2^{k_r}}$, где $r \geqslant 0$, $k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_r > 0$, и $\operatorname{char} K \neq 2$;
$\boldsymbol{\epsilon}''_2 \times \boldsymbol{\epsilon}''_2 \times \boldsymbol{\epsilon}_{2^{k_1}} \times \ldots \times \boldsymbol{\epsilon}_{2^{k_r}}$, где $r \geqslant 0$, $k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_r > 0$, и $\operatorname{char} K \neq 2$;
$\boldsymbol{\epsilon}'_{2^l} \times \boldsymbol{\epsilon}_{2^{k_1}} \times \ldots \times \boldsymbol{\epsilon}_{2^{k_r}}$, где $r \geqslant 0$, $k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_r > 0$, и $\operatorname{char} K \neq 2$.

Все указанные коммутационные факторы попарно неэквивалентны.

7. Проективные представления

Пусть G — конечная группа, K — алгебраически замкнутое поле, характеристика которого не делит порядок группы G, K^* — мультипликативная группа поля K, и V — конечномерное линейное пространство. Отображение $\varphi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ группы G в группу невырожденных операторов линейного пространства V называется *проективным представлением* группы G в пространстве V, если существует отображение $\pi\colon G \times G \to K^*$, такое что

$$\varphi(x)\,\varphi(y) = \pi(x,y)\,\varphi(xy)$$

для всех $x, y \in G$. Функция π называется *системой факторов* проективного представления φ. Легко проверяется, что если π — система факторов некоторого проективного представления группы G, то для любых $x, y, z \in G$ выполняется равенство

$$\pi(x,y)\,\pi(xy,z) = \pi(y,z)\,\pi(x,yz). \tag{5}$$

Верно и обратное утверждение: любое отображение $\pi\colon G \times G \to K^*$, удовлетворяющее условию (5), является системой факторов некоторого проективного представления.

Обозначим через $\mathrm{PGL}(V)$ фактор-группу группы $\mathrm{GL}(V)$ по нормальной подгруппе скалярных операторов, то есть $\mathrm{PGL}(V) = \mathrm{GL}(V)/K \cdot \mathbf{1}$. Тогда для любого отображения $\varphi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ мы можем естественным образом построить отображение $\overline{\varphi}\colon G \to \mathrm{PGL}(V)$, полагая $\overline{\varphi}(x) = K\,\varphi(x)$ для всех $x \in G$. Хорошо известно, что отображение $\varphi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ является проективным представлением в том и только том случае, если соответствующее отображение $\overline{\varphi}$ является гомоморфизмом группы G в проективную линейную группу $\mathrm{PGL}(V)$.

Подпространство $V_0 \subseteq V$ называется *инвариантным подпространством* проективного представления $\varphi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$, если $\varphi(G)\,V_0 \subseteq V_0$. Проективное представление называется *приводимым*, если оно имеет собственное инвариантное подпространство. Для любого собственного инвариантного подпространства V_0 проективного представления φ группы G в пространстве V мы можем рассмотреть проективное представление, получающееся ограничением операторов $\varphi(x)$ на подпространство V_0. Если линейное пространство

V разлагается в прямую сумму собственных инвариантных подпространств, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$, то мы будем говорить, что проективное представление φ разлагается в прямую сумму проективных представлений φ_i, получающихся ограничением φ на инвариантные подпространства V_i. Для проективных представлений хорошо известно утверждение о полной приводимости, согласно которому любое конечномерное проективное представление конечной группы разлагается в прямую сумму неприводимых проективных представлений.

Проективные представления $\varphi_1\colon G \to \mathrm{GL}(V_1)$ и $\varphi_2\colon G \to \mathrm{GL}(V_2)$ группы G называются *эквивалентными*, если существует изоморфизм γ линейных пространств V_1 и V_2 и функция $\alpha\colon G \to K^*$, такие что

$$\varphi_1(x) = \alpha(x)\,\gamma\,\varphi_2(x)\,\gamma^{-1}$$

для всех $x \in G$.

Везде далее мы будем рассматривать проективные представления конечных абелевых групп.

Для системы факторов π произвольного проективного представления φ конечной абелевой группы G определим отображение $\varepsilon_\pi\colon G \times G \to K^*$, полагая

$$\varepsilon_\pi(x, y) = \pi(x, y)\,\pi(y, x)^{-1}$$

для всех $x, y \in G$. Тогда для любых $x, y \in G$ выполняется соотношение

$$\varphi(x)\,\varphi(y) = \varepsilon_\pi(x, y)\,\varphi(y)\,\varphi(x).$$

Э. М. Жмудь в 70-х годах доказал, что для системы факторов π произвольного проективного представления конечной абелевой группы отображение ε_π является положительно определенным коммутационным фактором.

Проективное представление φ, у которого коммутирование операторов $\varphi(x)$ определяется коммутационным фактором ε, мы будем называть *проективным ε-представлением.*

Нетрудно проверить, что если проективное ε_1-представление φ_1 и проективное ε_2-представление φ_2 конечной абелевой группы эквивалентны, то $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

Таким образом, мы видим, что коммутационные факторы должны играть существенную роль в описании проективных представлений.

8. Классификация проективных представлений

Ядром проективного представления φ конечной абелевой группы G называется множество всех элементов $x \in G$, таких что $\varphi(x)$ является скалярным оператором. Проективное представление называется *точным*, если его ядро тривиально.

Э. М. Жмудем было показано, что ядро произвольного неприводимого проективного ε-представления конечной абелевой группы G совпадает с ядром G_ε коммутационного фактора ε.

Таким образом, мы видим, что конечная абелева группа G может иметь точное неприводимое проективное представление только в том случае, если на G можно определить невырожденный коммутационный фактор.

Для каждого коммутационного фактора ε на конечной абелевой группе G мы построим некоторое неприводимое проективное представление $\varphi_\varepsilon\colon G \to \mathrm{GL}(V_\varepsilon)$. Вообще говоря, построение представления φ_ε неоднозначно. Мы выбираем и фиксируем любое из возможных представлений.

Если группа G тривиальна, то мы рассматриваем одномерное линейное пространство V_ε и полагаем $\varphi_\varepsilon(1) = \mathbf{1}$.

В случае, если $\varepsilon = \boldsymbol{\epsilon}_n$, где $n = p^k$, мы обозначим через V_ε линейное пространство размерности n с базисом $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$, и определим отображение φ_ε, полагая

$$\varphi_\varepsilon(x^a\, y^b)\, e_c = \boldsymbol{\xi}_n^{ac}\, e_{b+c\,(\mathrm{mod}\, n)}$$

для всех $a, b, c = 0, 1, \ldots, n-1$.

Пусть теперь группа G представляется в виде прямого произведения собственных подгрупп G_1, G_2, ортогональных относительно невырожденного коммутационного фактора ε на группе G, и невырожденные коммутационные факторы ε_1, ε_2 получаются ограничением ε на G_1, G_2 соответственно. Для любого проективного ε_1-представления $\varphi_1\colon G_1 \to \mathrm{GL}(V_1)$ и любого проективного ε_2-представления $\varphi_2\colon G_2 \to \mathrm{GL}(V_2)$ мы можем построить проективное ε-представление $\varphi = \varphi_1 \otimes \varphi_2$ группы G в линейном пространстве $V = V_1 \otimes_K V_2$, называемое *тензорным произведением* проективных представлений φ_1 и φ_2, полагая

$$\varphi(x_1\, x_2)\,(v_1 \otimes v_2) = (\varphi_1(x_1)\, v_1) \otimes (\varphi_2(x_2)\, v_2)$$

для всех $x_1 \in G_1$, $x_2 \in G_2$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$.

По Теореме 13 любой невырожденный положительно определенный коммутационный фактор ε на нетривиальной конечной абелевой группе G эквивалентен коммутационному фактору $\boldsymbol{\epsilon}_{n_1} \times \cdots \times \boldsymbol{\epsilon}_{n_k}$, где $k > 0$ и $n_1, \ldots, n_k$ — степени простых чисел. Поэтому группа G представима в виде прямого произведения $G = G_1 \times \cdots \times G_k$ попарно ортогональных относительно ε подгрупп, и для любого $t = 1, \ldots, k$ ограничение ε_t коммутационного фактора ε на подгруппу G_t эквивалентно коммутационному фактору $\boldsymbol{\epsilon}_{n_t}$. Поэтому проективные представления $\varphi_{\varepsilon_1}, \ldots, \varphi_{\varepsilon_k}$ мы можем считать уже определенными. Полагая $V_\varepsilon = V_{\varepsilon_1} \otimes_K \cdots \otimes_K V_{\varepsilon_k}$, мы определим проективное ε-представление $\varphi_\varepsilon \colon G \to \mathrm{GL}(V_\varepsilon)$ как тензорное произведение проективных представлений $\varphi_{\varepsilon_1}, \ldots, \varphi_{\varepsilon_k}$.

Наконец, для произвольного положительно определенного коммутационного фактора ε мы можем рассмотреть ядро G_ε этого коммутационного фактора и фактор-группу $\overline{G} = G/G_\varepsilon$. На этой фактор-группе естественным образом задается коммутационный фактор $\overline{\varepsilon}$, такой что $\overline{\varepsilon}(xG_\varepsilon, yG_\varepsilon) = \varepsilon(x, y)$ для всех $x, y \in G$. Этот коммутационный фактор всегда невырожден, и поэтому можно считать уже определенным проективное представление $\varphi_{\overline{\varepsilon}}$. Мы задаем проективное представление φ_ε, полагая $V_\varepsilon = V_{\overline{\varepsilon}}$ и $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi_{\overline{\varepsilon}}(xG_\varepsilon)$ для всех $x \in G$.

Теперь мы имеем все необходимое, чтобы дать классификацию неприводимых проективных представлений конечных абелевых групп.

Теорема 14 (А. А. Золотых, [12]). *Пусть ε — произвольный положительно определенный коммутационный фактор на конечной абелевой группе G. Тогда проективное представление φ_ε группы G является неприводимым проективным ε-представлением, и любое неприводимое проективное ε-представление эквивалентно φ_ε.*

Дальнейшая наша цель — дать полную классификацию конечномерных проективных представлений конечных абелевых групп с точностью до эквивалентности. Заметим, что хотя любое конечномерное проективное представление конечной группы вполне приводимо, классификация всех проективных представлений не следует напрямую из теоремы 14, так как не любая прямая сумма проективных представлений является проективным представлением.

Для завершения полной классификации проективных представлений конечных абелевых групп нам потребуются обычные линейные представления групп. Напомним, что *линейным представлением* группы G в пространстве V называется произвольный гомоморфизм групп $\psi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$. Два линейных представления $\psi_1\colon G \to \mathrm{GL}(V_1)$ и $\psi_2\colon G \to \mathrm{GL}(V_2)$ называются *эквивалентными*, если существует изоморфизм линейных пространств $\gamma\colon V_1 \to V_2$, такой что

$$\gamma\,\psi_1(x)\,\gamma^{-1} = \psi_2(x)$$

для всех $x \in G$.

Пусть $\psi\colon G \to \mathrm{GL}(U)$ — произвольное линейное представление конечной абелевой группы G в линейном пространстве U. Для любого положительно определенного коммутационного фактора ε на группе G и любого проективного ε-представления $\varphi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ мы можем построить проективное ε-представление φ^{ψ} группы G в линейном пространстве $U \otimes_K V$, полагая

$$\varphi^{\psi}(x)\,(u \otimes v) = (\psi(x)\,u) \otimes (\varphi(x)\,v)$$

для всех $x \in G$, $u \in U$, $v \in V$.

Пусть $\psi\colon G \to \mathrm{GL}(U)$ — произвольное линейное представление конечной абелевой группы G, и χ — некоторый характер этой группы. Обозначим через $\psi^{\chi}\colon G \to \mathrm{GL}(U)$ линейное представление группы G, такое что

$$\psi^{\chi}(x)\,u = \chi(x)\,\psi(x)\,u$$

для всех $x \in G$, $u \in U$.

Теорема 15 (А. А. Золотых, [12]). *Пусть ε — произвольный положительно определенный коммутационный фактор на конечной абелевой группе G. Любое проективное ε-представление эквивалентно проективному ε-представлению $\varphi_{\varepsilon}^{\psi}$, где ψ — некоторое линейное представление группы G. Проективные ε-представления $\varphi_{\varepsilon}^{\psi_1}$ и $\varphi_{\varepsilon}^{\psi_2}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существует характер χ группы G, такой что ограничения линейных представлений ψ_1^{χ} и ψ_2*

на подгруппу G_ε эквивалентны как линейные представления этой группы.

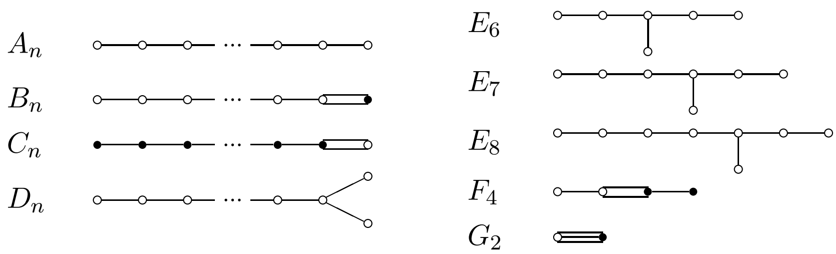
9. Простые алгебры Ли

Здесь и далее мы предполагаем, что K — это алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики, например, поле комплексных чисел $\mathbf{C}$.

Напомним, что *конечномерной алгеброй Ли* L над полем K называется конечномерное K-линейное пространство, на котором определена операция умножения $[\ ,\ ]\colon L \times L \to L$, удовлетворяющая условиям (1), (2) и (3).

Линейное подпространство I алгебры Ли L называется *идеалом* этой алгебры, если имеет место соотношение $[I, L] \subseteq I$. Алгебра Ли L называется простой, если она не содержит никаких собственных идеалов.

Все конечномерные простые алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики давно классифицированы. Список простых конечномерных алгебр Ли состоит из четырех бесконечных серий классических простых алгебр Ли A_n $(n \geqslant 1)$, B_n $(n \geqslant 2)$, C_n $(n \geqslant 3)$ и D_n $(n \geqslant 4)$, а также пяти исключительных простых алгебр Ли E_6, E_7, E_8, F_4 и G_2. Каждой из простых алгебр Ли соответствует своя так называемая *схема Дынкина*. Изображение всех схем Дынкина простых алгебр Ли дано на следующем рисунке.



Классические простые алгебры Ли имеют естественные реализации.

Линейное пространство всех матриц размера $n \times n$ со следом ноль замкнуто относительно операции коммутирования $[a, b] = a\,b - b\,a$.

Это линейное пространство в случае $n \geqslant 2$ является простой алгеброй Ли, называемой обычно *специальной линейной алгеброй Ли* $\mathfrak{sl}_n(K)$. Эта алгебра Ли имеет тип A_{n-1}.

Рассмотрим линейное пространство, состоящее из всех ортогональных матриц размера $n\times n$, то есть таких матриц R, что $R^\top = -R$, где $^\top$ — оператор транспонирования матриц. Это пространство замкнуто относительно операции коммутирования, и в случае $n = 3$ или $n \geqslant 5$ является простой алгеброй Ли, называемой *ортогональной алгеброй Ли* $\mathfrak{so}_n(K)$. Эта алгебра Ли имеет тип A_1 в случае $n = 3$, A_3 в случае $n = 6$, $\mathrm{B}_{(n-1)/2}$ в случае нечетного $n \geqslant 5$, и $\mathrm{D}_{n/2}$ в случае четного $n \geqslant 8$.

Пусть теперь n — четное натуральное число. Рассмотрим линейное пространство, состоящее из всех симплектических матриц размера $n \times n$, то есть таких матриц R, что $R^s = -R$, где ^{s} — это симплектическая инволюция, определенная равенством

$$\begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} -R_1^\top & R_2^\top \\ R_3^\top & -R_4^\top \end{pmatrix},$$

где R_1, R_2, R_3, R_4 — это матрицы размера $(n/2) \times (n/2)$. Указанное пространство замкнуто относительно операции коммутирования, и при любом четном n является простой алгеброй Ли, называемой *симплектической алгеброй Ли* $\mathfrak{sp}_n(K)$. Эта простая алгебра Ли имеет тип A_1 в случае $n = 2$, B_2 в случае $n = 4$, и $C_{n/2}$ в случае четного $n \geqslant 6$.

10. Градуировки простых алгебр

Множество всех характеров группы G, то есть всех гомоморфизмов из группы G в мультипликативную группу K^*, мы будем обозначать через G^*. На множестве G^* естественным образом вводится структура абелевой группы. При этом группы G и G^* изоморфны.

Для удобства записи характеров мы будем использовать билинейную форму

$$\langle\ ,\ \rangle : G^* \times G \to K^*,$$

полагая $\langle \chi, g\rangle = \chi(g)$ для всех $\chi \in G^*$, $g \in G$. При помощи этой формы естественно определяется канонический изоморфизм групп G и G^{**}. В дальнейшем мы будем отождествлять эти группы.

Для любого подмножества U группы G *аннулятором* $\mathrm{Ann}(G^*, U)$ *этого множества* мы будем называть множество всех характеров $\chi \in G^*$, таких что $\langle \chi, U \rangle = 1$. Легко видеть, что если G_0 — подгруппа группы G, порожденная множеством U, то $\mathrm{Ann}(G^*, U) = \mathrm{Ann}(G^*, G_0)$. Поскольку мы отождествляем G и G^{**}, для любого подмножества U группы G^* естественно определяется аннулятор $\mathrm{Ann}(G, U)$.

Пусть L — произвольная *конечномерная G-градуированная алгебра Ли* над полем K, то есть

$$L = \bigoplus_{g \in G} L_g,$$

где L_g — K-линейные подпространства в L, такие что $[L_g, L_h] \subseteq L_{g\,h}$ для всех $g, h \in G$.

Носителем градуировки мы будем называть подмножество группы G, состоящее из всех таких элементов $g \in G$, что $L_g \neq 0$.

Для любого характера χ группы G определим отображение

$$\theta_\chi \colon L \to L,$$

полагая

$$\theta_\chi(a) = \langle \chi, g \rangle\, a$$

для любого $g \in G$ и любого $a \in L_g$, и продолжая это отображение по K-линейности.

Для любого характера $\chi \in G^*$ отображение θ_χ является автоморфизмом алгебры Ли L. Отображение δ, ставящее в соответствие любому характеру $\chi \in G^*$ автоморфизм θ_χ алгебры Ли L, является гомоморфизмом группы характеров G^* в группу $\mathrm{Aut}(L)$ автоморфизмов алгебры Ли L.

В дальнейшем гомоморфизм $\delta \colon G^* \to \mathrm{Aut}(L)$, такой что $\delta(\chi) = \theta_\chi$ для всех $\chi \in G^*$, мы будем называть *гомоморфизмом групп, заданным градуировкой алгебры Ли L.*

Рассмотрим две G-градуировки алгебры Ли L

$$L = \bigoplus_{g \in G} L_g = \bigoplus_{g \in G} L'_g.$$

Мы будем говорить, что эти две G-градуировки *эквивалентны*, если существует автоморфизм θ алгебры Ли L, такой что $\theta(L_g) = L'_g$ для всех $g \in G$.

Мы будем говорить, что два гомоморфизма групп

$$\delta_1\colon G^* \to \mathrm{Aut}(L), \qquad \delta_2\colon G^* \to \mathrm{Aut}(L)$$

эквивалентны, если существует автоморфизм θ алгебры Ли L, такой что $\theta\,\delta_1(\chi)\,\theta^{-1} = \delta_2(\chi)$ для всех $\chi \in G^*$.

Теорема 16 (А. А. Золотых, [13]). *Пусть G — конечная абелева группа, L — конечномерная алгебра Ли над полем K. Любая G-градуировка алгебры Ли L однозначно задает некоторый гомоморфизм групп G^* и $\mathrm{Aut}(L)$. Для любого гомоморфизма групп G^* и $\mathrm{Aut}(L)$ существует G-градуировка алгебры Ли L, задающая этот гомоморфизм. Две G-градуировки алгебры Ли L эквивалентны в том и только том случае, если эквивалентны задаваемые ими гомоморфизмы групп.*

Таким образом, для классификации градуировок алгебры Ли L конечными абелевыми группами с точностью до эквивалентности достаточно найти классификацию гомоморфизмов конечных абелевых групп в группу автоморфизмов алгебры Ли L.

Автоморфизмы специальных линейных алгебр Ли $\mathfrak{sl}_n(K)$ хорошо известны.

Для любой невырожденной матрицы A размера $n\times n$ отображение $\theta_A\colon \mathfrak{sl}_n(K) \to \mathfrak{sl}_n(K)$, такое что

$$\theta_A(a) = A^{-1}\,a\,A$$

для всех $a \in \mathfrak{sl}_n(K)$, является автоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(K)$. Эти автоморфизмы называются *внутренними автоморфизмами* специальной линейной алгебры Ли $L = \mathfrak{sl}_n(K)$.

В случае $n = 2$ алгебра Ли $\mathfrak{sl}_n(K)$ не имеет других автоморфизмов. В случае же $n > 2$ подгруппа внутренних автоморфизмов группы всех автоморфизмов $\mathfrak{sl}_n(K)$ имеет индекс 2. Все автоморфизмы, не являющиеся внутренними, называются *внешними автоморфизмами* алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(K)$. Любой внешний автоморфизм имеет вид θ^*_A, где A — некоторая невырожденная матрица размера $n \times n$, и

$$\theta_A^*(a) = A^{-1}\, a^\top A$$

для всех $a \in \mathfrak{sl}_n(K)$.

Мы будем говорить, что градуировка специальной линейной алгебры Ли $L = \mathfrak{sl}_n(K)$ является *внутренней градуировкой*, если для гомоморфизма $\delta\colon G^* \to \mathrm{Aut}(L)$, заданного этой градуировкой, и любого характера $\chi \in G^*$, автоморфизм $\delta(\chi)$ является внутренним автоморфизмом.

Далее будет дана классификация всех внутренних градуировок специальной линейной алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(K)$ с точностью до эквивалентности. Заметим, что данная классификация является конструктивной, то есть на ее основе легко могут быть построены алгоритмы, позволяющие как найти все возможные градуировки, так и проверить эквивалентность двух заданных градуировок.

Пусть $\delta\colon G^* \to \mathrm{Aut}(L)$ — гомоморфизм групп, заданный произвольной внутренней G-градуировкой. Тогда все автоморфизмы $\delta(\chi)$, $\chi \in G^*$, являются внутренними автоморфизмами. Таким образом, для любого характера $\chi \in G^*$ существует матрица A_χ размера $n \times n$, такая что $\delta(\chi) = \theta_{A_\chi}$. Мы видим, что исходя из градуировки можно построить отображение φ из группы G^* в множество невырожденных матриц $\mathrm{GL}_n(K)$, полагая $\varphi(\chi) = A_\chi$ для всех $\chi \in G^*$. Оказывается, что построенное отображение $\varphi\colon G^* \to \mathrm{GL}_n(K)$ является проективным представлением группы G^* в n-мерном линейном пространстве.

В дальнейшем проективное представление, построенное описанным выше способом, мы будем называть *проективным представлением, индуцированным внутренней градуировкой* алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(K)$. Для любого проективного представления $\varphi\colon G^* \to \mathrm{GL}_n(K)$ существует внутренняя G-градуировка алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(K)$, индуцирующая это проективное представление.

Пусть $\varphi\colon G^* \to \mathrm{GL}_n(K)$ — произвольное проективное представление группы G^*. Рассмотрим отображение $\varphi^*\colon G^* \to \mathrm{GL}_n(K)$, полагая

$$\varphi^*(\chi) = (\varphi(\chi)^\top)^{-1}$$

для всех $\chi \in G^*$. Это отображение также оказывается проективным представлением. Проективные представления φ и φ^* мы будем называть *дуальными проективными представлениями*. Проективные представления φ_1 и φ_2 мы будем называть *дуально эквивалентными*, если проективные представления φ_1 и φ_2^* эквивалентны.

Для любого коммутационного фактора ε на абелевой группе обозначим через ε^* коммутационный фактор на той же группе, такой что

$$\varepsilon^*(g,h) = \varepsilon(g,h)^{-1} = \varepsilon(h,g)$$

для всех элементов g, h этой группы. Коммутационный фактор ε^* мы будем называть *дуальным* к коммутационному фактору ε. Нетрудно проверить, что для любого проективного ε-представления φ проективное представление φ^* является проективным ε^*-представлением.

Кроме того, для любого положительно определенного коммутационного фактора ε проективные представления φ_ε и φ_{ε^*} дуально эквивалентны, и для любого положительно определенного коммутационного фактора ε на группе G и любого линейного представления ψ группы G проективные представления φ_ε^ψ и $\varphi_{\varepsilon^*}^{\psi^{-1}}$ дуально эквивалентны.

Классификация всех внутренних градуировок специальных линейных алгебр Ли $\mathfrak{sl}_n(K)$ дается следующей теоремой.

Теорема 17 (А. А. Золотых, [13]). *Пусть G — произвольная конечная абелева группа, и $L = \mathfrak{sl}_n(K)$ — специальная линейная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики. Каждой внутренней G-градуировке алгебры Ли L соответствует некоторое проективное представление φ_ε^ψ группы $H = G^*$, где ε — положительно определенный коммутационный фактор на группе H и ψ — линейное представление группы H размерности $n/\sqrt{|H|/|H_\varepsilon|}$. Каждому такому проективному представлению соответствует некоторая внутренняя G-градуировка алгебры Ли L. Две внутренних градуировки алгебры Ли L эквивалентны в том и только том случае, если соответствующие им проективные представления $\varphi_{\varepsilon_1}^{\psi_1}$ и $\varphi_{\varepsilon_2}^{\psi_2}$ эквивалентны или дуально эквивалентны, то есть если выполняется одно из следующих двух условий:*

а) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ и существует характер χ группы H, такой что

$$\psi_1(g) = \chi(g)\,\psi_2(g)$$

для всех $g \in H_\varepsilon$;

b) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2^*$ *и существует характер* χ *группы* H*, такой что*

$$\psi_1(g) = \chi(g)\,\psi_2^{-1}(g)$$

для всех $g \in H_\varepsilon$.

Тем самым, если мы хотим перечислить все попарно неэквивалентные внутренние G-градуировки алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(K)$, мы должны сделать следующее.

Прежде всего, мы должны перечислить все положительно определенные коммутационные факторы ε на группе $H = G^*$. Для этого достаточно произвольным образом выбрать образующие $g_1, \ldots, g_k$ группы H, и задать коммутационный фактор ε на парах образующих произвольным набором ненулевых элементов поля $\{\alpha_{ij} = \varepsilon(g_i, g_j) \in K^* \mid i, j = 1, \ldots, k\}$, удовлетворяющим соотношениям $\alpha_{ij}\,\alpha_{ji} = 1$ и $\alpha_{ij}^{d_{ij}} = 1$, $i, j = 1, \ldots, k$, где d_{ij} — это наибольший общий делитель порядков элементов g_i и g_j. Чтобы коммутационный фактор ε был положительно определен, мы должны также наложить условие $\alpha_{ii} = 1$ для всех $i = 1, \ldots, k$.

Для любого коммутационного фактора ε на группе H мы должны найти ядро H_ε этого коммутационного фактора и рассмотреть все линейные представления ψ этого ядра в линейном пространстве размерности $n/\sqrt{|H|/|H_\varepsilon|}$ (этого достаточно, так как любое линейное представление может быть продолжено с подгруппы на всю группу). Пары (ε_1, ψ_1) и (ε_2, ψ_2) соответствуют эквивалентным градуировкам, если существует характер χ группы H_ε, такой что или $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\psi_1 = \psi_2^\chi$, или $\varepsilon_1 = \varepsilon_2^*$, $\psi_1^{-1} = \psi_2^\chi$.

Список литературы

[1] Mikhalev A. A., Zolotykh A. A. Combinatorial Aspects of Lie Superalgebras. New York: CRC Press, Boca Raton, 1995.

[2] Золотых А. А., Михалев А. А. Эндоморфизм свободной алгебры Ли, сохраняющей свойство примитивности элементов, является автоморфизмом // Успехи мат. наук. 1993. № 6. 149–150.

[3] Золотых А. А., Михалев А. А. Ранг элемента свободной p-супералгебры Ли // Доклады Акад. Наук. 1994. Т. 334. № 6. 690–693.

[4] Золотых А. А., Михалев А. А., Умирбаев У. У. Пример несвободной алгебры Ли когомологической размерности 1 // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49. № 1. 203–204.

[5] Mikhalev A. A., Zolotykh A. A. Applications of Fox differential calculus to free Lie superalgebras // Non-Associative Algebra and its Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1994. 285–290.

[6] Mikhalev A. A., Zolotykh A. A. Automorphisms and primitive elements of free Lie superalgebras // Commun. Algebra. **22** (1994). 5889–5901.

[7] Mikhalev A. A., Zolotykh A. A. Rank and primitivity of elements of free color Lie p-superalgebras // Internat. J. Algebra and Comput. **4** (1994). 617–656.

[8] Золотых А. А., Михалев А. А. Эндоморфизмы свободных ассоциативных алгебр над коммутативными кольцами и их якобианы // Фундамент. и прикл. матем. 1995. Т. 1. № 1. 177–189.

[9] Mikhalev A. A., Zolotykh A. A. An inverse function theorem for free Lie algebras over commutative rings // Algebra Colloq. **2:3** (1995). 213–220.

[10] Mikhalev A. A., Zolotykh A. A., Umirbaev U. U. A Lie algebra with cohomological dimension one over a field of prime characteristic is not necessary free // Proc. of the Tainan–Moscow Algebra Workshop. Berlin: Walter de Gruyter, 1996. 257–264.

[11] Золотых А. А. Коммутационные факторы и многообразия ассоциативных алгебр // Фундаментальная и прикладная математика. **3** (1997). № 2. 453–468.

[12] Золотых А. А. Классификация проективных представлений конечных абелевых групп // Вестник МГУ. Сер. I: мат., мех., в печати.

[13] Золотых А. А. Внутренние градуировки специальных линейных алгебр Ли. Готовится к печати.