

# О проблеме полноты в классе автоматов без обратной связи

Д. Н. Жук, Ю. Н. Присмотров

В работе рассматривается проблема полноты для автоматов без обратной связи, имеющих в качестве входного и выходного алфавитов множество  $E_2 = \{0, 1\}$ . Исследуются системы автоматных функций вида  $P_2 \cup \nu$ . Доказывается, что в этом случае проблема полноты алгоритмически разрешима, и для каждого конечного  $\nu$  строится критериальная система.

## Введение

Задача о полноте (относительно различных операторов замыкания) для систем автоматов имеет важное прикладное значение. На практике, прежде чем приступить к проектированию конкретной схемы, необходимо убедиться, что набор элементов, из которых будет вестись синтез, является достаточным. При этом условия, в которых предстоит работать синтезируемому устройству, могут накладывать различного рода ограничения на сложность реализации, надежность и т. д. Эти условия, по существу, и определяют тот оператор замыкания, относительно которого необходимо решать задачу полноты.

В работе [2] установлена алгоритмическая неразрешимость задачи о полноте относительно операций суперпозиции и обратной связи для конечных систем автоматных функций. Вместе с тем, для систем автоматов, содержащих все булевы функции, указанная задача алгоритмически разрешима [3]. В.А.Бувевич показал, что в классе автоматов без обратной связи задача о полноте алгоритмически неразрешима.

В данной работе исследуется задача о полноте относительно операции суперпозиции для систем автоматов без обратной связи вида  $P_2 \cup \nu$ ; найдены два конечных и три счетных семейства предполных классов. Построен алгоритм проверки на полноту таких систем автоматов. Для каждого конечного  $\nu$  он заключается в проверке непринадлежности  $\nu$  конечному числу предполных классов. Авторы выражают благодарность своему научному руководителю Кудрявцеву В. Б. за оказанную помощь и поддержку в исследовании задачи и написании данной работы.

## 1. Основные понятия и результаты

$P_2$  — множество всех булевых функций. Рассмотрим конечные автоматы, имеющие ровно один выход и получающиеся при помощи операции суперпозиции из элементов, являющихся функциями из  $P_2$  или единичной задержкой с начальным состоянием 0 или 1. Автоматы такого вида не содержат циклов, то есть операция обратной связи в них не реализуется.

Будем использовать обозначения из [1]. Пусть  $E_2 = \{0, 1\}$ ,  $E_2^l$  — множество слов длины  $l$ ,  $E$  — множество всех сверхслов в алфавите  $E_2$ . Множество  $E^n$  состоит из элементов  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , где  $\alpha_i \in E$ . Будем говорить, что слово  $\gamma \in E_2^d$  имеет период  $e$ , если  $e$  делит  $d$  и  $\gamma(i+1) = \gamma(i \pmod{e} + 1)$  для  $i = 0, 1, \dots, d-1$ . Пусть  $\alpha \in E_2^l$ , то есть  $\alpha = \alpha(1)\alpha(2) \dots \alpha(l)$  и  $|\alpha| = l$ . Обозначим  $\circ_r \alpha = \alpha(r+1) \dots \alpha(|\alpha|)\alpha(1) \dots \alpha(r)$ ,  $inv(\alpha) = \alpha(|\alpha|)\alpha(|\alpha|-1) \dots \alpha(2)\alpha(1)$ ,  $[_k \alpha = \alpha(|\alpha|-k+1) \dots \alpha(|\alpha|-1)\alpha(|\alpha|)$ . Аналогично для  $\alpha \in E$  сверхслово  $\alpha = \alpha(1)\alpha(2)\alpha(3) \dots$  и  $|\alpha| = \infty$ . Для слова или сверхслова  $\alpha$ , а также для  $k \leq |\alpha|$  обозначим  $]_k \alpha = \alpha(1)\alpha(2) \dots \alpha(k)$ . Для конечного слова  $\alpha$  слово  $\alpha^s = \underbrace{\alpha \alpha \dots \alpha}_s$ , а сверхслово  $\alpha^\infty = \alpha \alpha \alpha \dots$ .

Элемент множества  $E^n$  мы будем представлять двумя способами. С одной стороны, это  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , где  $\alpha_j \in E$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , с другой — это бесконечная последовательность  $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots)$ , где  $\vec{a}_i \in E_2^n$ . Аналогично, элемент множества  $(E_2^n)^p$  — это с одной стороны  $p$  векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p \in E_2^n$ ; с другой стороны — это  $n$  слов длины  $p$ .

Автомат без обратной связи можно интерпретировать как функ-

цию  $T : E^n \longrightarrow E$ , переводящую входную последовательность  $(\vec{x}(1), \vec{x}(2), \dots) \in E^n$  в выходную последовательность  $(y(1), y(2), \dots) \in E$  следующим образом:

$$\begin{aligned} y(1) &= f_1(\vec{x}(1)), \\ y(2) &= f_2(\vec{x}(1), \vec{x}(2)), \\ &\dots \\ y(h) &= f_h(\vec{x}(1), \vec{x}(2), \dots, \vec{x}(h)), \\ y(h+1) &= f_h(\vec{x}(2), \vec{x}(3), \dots, \vec{x}(h+1)), \\ &\dots \\ y(h+i) &= f_h(\vec{x}(1+i), \vec{x}(2+i), \dots, \vec{x}(h+i)), \\ &\dots \end{aligned}$$

где  $f_j : (E_2^n)^j \longrightarrow E_2$  для  $j = 1, 2, \dots, h$ , причём, если  $h \geq 2$ , то существует набор векторов

$$\vec{a}(1), \vec{a}(2), \dots, \vec{a}(h) \in E_2^n,$$

такой, что

$$f_h(\vec{a}(1), \vec{a}(2), \dots, \vec{a}(h)) \neq f_{h-1}(\vec{a}(2), \dots, \vec{a}(h)).$$

Тогда  $T$  будем называть автоматом без обратной связи высоты  $h$ . Функции  $f_j$  для  $j = 1, \dots, h-1$  определяют выход автомата в моменты времени от 1 до  $h-1$ , а функция  $f_h$  определяет выход автомата, начиная с момента времени  $h$ . Множество всех автоматов без обратной связи обозначим  $\mathcal{P}_a$ , а множество всех автоматов без обратной связи высоты не более  $h$  обозначим  $\mathcal{P}_a^h$ . Для  $p > h$  определим

$$f_p(\vec{x}(1), \vec{x}(2), \dots, \vec{x}(p)) = f_h(\vec{x}(p-h+1), \vec{x}(p-h+2), \dots, \vec{x}(p)).$$

Таким образом, для любого  $s$  функция  $f_s$  определяет выход автомата в момент времени  $s$ .

Пусть  $M \subset \mathcal{P}_a$ , обозначим через  $[M]$  множество всех автоматов без обратной связи, получающихся из  $M$  с помощью операции суперпозиции. Множество  $M$  называется полным, если  $[M] = \mathcal{P}_a$ .

Выход автомата в моменты времени  $t \geq h$  зависит только от функции  $f_h$  и не зависит от функций  $f_1, f_2, \dots, f_{h-1}$ , поэтому для изучения свойств автомата при  $t \geq h$  введем искусственное отображение. Для произвольного автомата  $T$  высоты  $h$  с  $n$  входами определим отображение  $G_T : E^n \rightarrow E$ . Для  $\vec{a}(1), \vec{a}(2), \vec{a}(3), \dots \in E_2^n$

$$G_T(\vec{a}(1), \vec{a}(2), \vec{a}(3), \dots) = \beta, \text{ где}$$

$$\beta(i) = f_h(\vec{a}(i+h-1), \vec{a}(i+h-2), \dots, \vec{a}(i+1), \vec{a}(i)) \text{ для любого } i.$$

В этом случае автомат преобразует сверхслова не сначала, а как бы с конца.

Так как  $G_T$  имитирует поведение автомата  $T$  только в обратную сторону, то  $G$  сохраняет суперпозицию, то есть для любых автоматов  $T(x_1, \dots, x_n)$ ,  $T_1(x_1, \dots, x_{m_1})$ ,  $T_2(x_1, \dots, x_{m_2})$ ,  $\dots$ ,  $T_n(x_1, \dots, x_{m_n}) \in \mathcal{P}_a$ , автомата

$$\begin{aligned} T_0(x_{1,1}, \dots, x_{1,m_1}, \dots, x_{n,1}, \dots, x_{n,m_n}) &= \\ &= T(T_1(x_{1,1}, \dots, x_{1,m_1}), \dots, T_n(x_{n,1}, \dots, x_{n,m_n})), \end{aligned}$$

а также для любых  $\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,m_1}, \dots, \alpha_{n,1}, \dots, \alpha_{n,m_n} \in E$  выполняется равенство

$$\begin{aligned} G_{T_0}(\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,m_1}, \dots, \alpha_{n,1}, \dots, \alpha_{n,m_n}) &= \\ &= G_T(G_{T_1}(\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,m_1}), \dots, G_{T_n}(\alpha_{n,1}, \dots, \alpha_{n,m_n})). \end{aligned}$$

Каждую булевскую функцию можно считать автоматом высоты 1. Пусть  $P_2 \subset M \subset \mathcal{P}_a$ ,  $M \setminus P_2$  — конечное множество. В работе рассматривается проблема полноты для систем  $M$  указанного вида.

Теперь опишем 5 семейств классов автоматов в  $\mathcal{P}_a$ . Обозначим через  $h(T)$  высоту автомата  $T$ , а через  $n(T)$  число входов автомата  $T$ .

**Семейство  $\mathfrak{A}$ .** Это семейство состоит из классов  $M_{pq}$ , где  $1 \leq p < q$ .

$M_{pq}$  — множество автоматов  $T$  таких, что из равенства  $\vec{x}(p) = \vec{x}(q)$  следует равенство  $y(p) = y(q)$ .

**Семейство В.** Это семейство состоит из одного класса  $M_{1\infty}$ .  $M_{1\infty}$  — множество автоматов  $T$  таких, что для любого  $\vec{a} \in E_2^{n(T)}$

$$f_{h(T)}(\vec{a}, \vec{a}, \dots, \vec{a}) = f_1(\vec{a}).$$

**Семейство С.** Это семейство состоит из классов  $S_p, p \geq 2$ .  $S_p$  — множество автоматов  $T$  таких, что для любых  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p, \vec{b} \in E_2^{n(T)}$

$$f_p(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{p-2}, \vec{a}_{p-1}, \vec{a}_p) = f_p(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{p-2}, \vec{b}, \vec{a}_p).$$

Другими словами, выход автоматов из  $S_p$  в момент времени  $p$  не зависит от входа в момент времени  $p - 1$ .

**Семейство Д.** Это семейство состоит из 4 классов  $L_1, L_2, L_3, L_4$ .  $L_1$  — множество автоматов  $T$  таких, что для любых  $\vec{a}, \vec{b} \in E_2^{n(T)}$

$$f_{h(T)}(\vec{a}, \vec{a}, \dots, \vec{a}, \vec{a}, \vec{a}, \vec{a}) = f_{h(T)}(\vec{a}, \vec{a}, \dots, \vec{a}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}).$$

$L_2$  — множество автоматов  $T$  таких, что для любых  $\vec{a}, \vec{b} \in E_2^{n(T)}$

$$f_{h(T)}(\vec{a}, \vec{a}, \dots, \vec{a}, \vec{a}, \vec{a}, \vec{b}) = f_{h(T)}(\vec{a}, \vec{a}, \dots, \vec{a}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{b}).$$

$L_3$  — множество автоматов  $T$  таких, что для любых  $\vec{a}, \vec{b} \in E_2^{n(T)}$

$$f_{h(T)}(\dots, \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}, \vec{b}) = f_{h(T)}(\dots, \vec{b}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{b}).$$

$L_4$  — множество автоматов  $T$  таких, что для любых  $\vec{a}, \vec{b} \in E_2^{n(T)}$

$$f_{h(T)}(\vec{a}, \vec{a}, \dots, \vec{a}, \vec{a}, \vec{b}) = f_{h(T)}(\vec{b}, \vec{b}, \dots, \vec{b}, \vec{b}, \vec{b}).$$

**Семейство Е.** Пусть  $d \geq 3$ ,  $C \subset E_2^d$  и для любых  $\gamma, \delta \in C$  слова  $\bar{\gamma}, \gamma \vee \delta, \gamma \wedge \delta$  принадлежат  $C$  (где все операции выполняются поэлементно). Пусть также для какого-то  $e$  в  $C$  есть слово с наименьшим периодом  $e$ , но  $C$  содержит не все слова периода  $e$ ;  $C$  содержит слова  $0^d$  и  $1^d$ . Тогда пара  $(d, C)$  определяет класс  $R_d^C$ : автомат  $T$  с  $n$  входами принадлежит  $R_d^C$  тогда и только тогда, когда для любых  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in C$  выполняется  $G_T(\alpha_1^\infty, \alpha_2^\infty, \dots, \alpha_n^\infty) = \delta^\infty$ , где  $\delta \in C$ . Семейство  $\mathfrak{E}$  состоит из всех таких классов  $R_d^C$ .

**Теорема 1.** Верны следующие утверждения:

- 1)  $M_{pq}$  — предполный класс в  $\mathcal{P}_a$  для любых натуральных  $p$  и  $q$  таких, что  $p < q$ .
- 2)  $M_{1\infty}$  — предполный класс в  $\mathcal{P}_a$ .
- 3)  $S_p$  — предполный класс в  $\mathcal{P}_a$  для любого натурального  $p \geq 2$ .
- 4)  $L_1, L_2, L_3, L_4$  — предполные классы в  $\mathcal{P}_a$ .
- 5)  $R_d^C$  — замкнутый класс в  $\mathcal{P}_a$ , не совпадающий с  $\mathcal{P}_a$ . Пусть к тому же выполнены следующие условия:
  - а) если  $\alpha \in C$  имеет наименьший период  $d$  и  $(\circ_r \alpha) \in C$ , тогда для любого  $\beta \in C$   $(\circ_r \beta) \in C$ .
  - б) если  $C$  содержит слово с наименьшим периодом  $e$ ,  $1 < e < d$ , то  $C$  содержит все слова периода  $e$ .
 Тогда  $R_d^C$  — предполный класс в  $\mathcal{P}_a$ .
- 6) Если  $R_d^C$  — не предполный класс, то существует  $d'$ , делящее  $d$ , и  $C' \subset E_2^{d'}$  такое, что  $R_d^C \subset R_{d'}^{C'}$  и  $R_{d'}^{C'}$  — предполный класс.

**Теорема 2.** Пусть  $B$  — система автоматов из  $\mathcal{P}_a^h$ ,  $P_2 \subset B$ . Система  $B$  полна тогда и только тогда, когда  $B$  не является подмножеством  $M_{pq}$  для  $1 \leq p < q \leq 2h$ ,  $M_{1\infty}$ ,  $S_p$  для  $2 \leq p \leq h$ ,  $L_1, L_2, L_3, L_4$ ,  $R_d^C$  для  $d < (2h^2)^{4h}$ .

## 2. Доказательства утверждений

Следующие определения нужны для доказательства теорем.

**Определение 1.** Автомат с  $n$  входами  $T \in \mathcal{P}_a$  сохраняет  $A \subset E_2^k$ , если для любых  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in A$  выполняется  $T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in A$ . Класс всех автоматов из  $\mathcal{P}_a$ , сохраняющих  $A$ , обозначим  $\mathcal{U}(A)$ .

**Определение 2.** Автомат с  $n$  входами  $T \in \mathcal{P}_a$  сохраняет  $A \subset E$ , если для любых  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in A$  выполняется  $T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in A$ . Класс всех автоматов из  $\mathcal{P}_a$ , сохраняющих  $A$ , обозначим  $\mathcal{U}(A)$ .

**Определение 3.** Автомат с  $n$  входами  $T \in \mathcal{P}_a$   $G$ -сохраняет  $A \subset E_2^k$ , если для любых  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in A$  выполняется

$G_T(\alpha_1^\infty, \alpha_2^\infty, \dots, \alpha_n^\infty) = \beta^\infty$  для какого-то  $\beta \in A$ . Класс всех автоматов из  $\mathcal{P}_a$ ,  $G$ -сохраняющих  $A$ , обозначим  $\mathcal{U}_G(A)$ .

**Определение 4.** Автомат с  $n$  входами  $T \in \mathcal{P}_a$   $G$ -сохраняет  $A \subset E$ , если для любых  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in A$  выполняется  $G_T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in A$ . Класс всех автоматов из  $\mathcal{P}_a$ ,  $G$ -сохраняющих  $A$ , обозначим  $\mathcal{U}_G(A)$ .

Легко проверить, что верна следующая лемма.

**Лемма 1.** Для произвольных  $A \subset E_2^k$ ,  $B \subset E$ , классы сохранения  $\mathcal{U}(A)$ ,  $\mathcal{U}_G(A)$ ,  $\mathcal{U}(B)$ ,  $\mathcal{U}_G(B)$  замкнуты.

Автомат с одним входом такой, что в любой момент времени  $y(t) = x(t)$ , будем называть тождественным автоматом. Перейдём к доказательству теоремы 1. Она состоит из следующих утверждений.

**Утверждение 1.**  $M_{pq}$  — предполный класс в  $\mathcal{P}_a$  для любых натуральных  $p$  и  $q$  таких, что  $p < q$ .

**Доказательство утверждения 1.** Рассмотрим множество  $D$  слов  $\alpha \in E_2^q$  таких, что  $\alpha(p) = \alpha(q)$ . Легко проверить, что  $M_{pq}$  совпадает с  $\mathcal{U}(D)$ , следовательно,  $M_{pq}$  — замкнутый класс. При этом очевидно, что он не полный, так как единичная задержка не сохраняет  $D$ .

Теперь пусть есть автомат с  $n$  входами  $T \notin M_{pq}$ , докажем, что  $[M_{pq} \cup \{T\}] = \mathcal{P}_a$ . Так как  $T \notin M_{pq}$ , то для каких-то слов  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in D$  выполняется  $T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \notin D$ . Для каждого  $\alpha_i$  рассмотрим автомат без входов  $R_i$  высоты  $\leq q+1$ , возвращающий выходную последовательность  $\alpha_i 0^\infty$ . Очевидно, что все они принадлежат  $\mathcal{P}_a$  и  $M_{pq}$ . Тогда автомат  $T_0 = T(R_1, R_2, \dots, R_n)$  — автомат без входов, возвращающий в моменты времени  $p$  и  $q$  различные значения. Теперь определим автомат  $Q$  с двумя входами высоты  $\leq q+1$ . Во все моменты времени кроме  $q$  он работает как единичная задержка того, что подаётся на первый вход. Определим функцию  $f_q(\gamma_1, \gamma_2)$  этого автомата. Если  $\gamma_1, \gamma_2 \in D$ , то  $f_q(\gamma_1, \gamma_2) = f_p(\lfloor_p \gamma_1, \lfloor_p \gamma_2)$ , иначе  $f_q(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_1(q-1)$ . Тогда нетрудно убедиться, что  $Q \in M_{pq}$ , а также  $Q(x, T_0)$  во все моменты времени работает как единичная задержка. Но  $P_2 \subset M_{pq}$ , значит,  $[M_{pq} \cup \{T\}] = \mathcal{P}_a$  и утверждение доказано.

**Утверждение 2.**  $M_{1\infty}$  — предполный класс в  $\mathcal{P}_a$ .

**Доказательство утверждения 2.** Очевидно, что  $P_2 \subset M_{1\infty}$ . Рассмотрим множество  $D$  сверхслов, представимых в виде  $a\gamma a^\infty$  для какого-то  $a \in E_2$  и какого-то слова  $\gamma$ . Легко проверить, что  $M_{1\infty}$  совпадает с  $\mathcal{U}(D)$ , следовательно,  $M_{1\infty}$  — замкнутый класс. При этом очевидно, что он не полный, так как единичная задержка не сохраняет  $D$ .

Докажем, что он предполный. Пусть есть автомат с  $n$  входами  $T \notin M_{1\infty}$ , докажем, что  $[M_{1\infty} \cup \{T\}] = \mathcal{P}_a$ . Так как  $T \notin M_{1\infty}$ , то существуют  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in E_2$  и слово  $\gamma$  такие, что  $T(a_1^\infty, a_2^\infty, \dots, a_n^\infty) = b\gamma c^\infty$ , причём  $b \neq c$ . Пусть автомат  $T$  имеет высоту  $h$ , тогда слово  $\gamma$  имеет длину не больше  $h$ .

Для  $i = 1, 2, \dots, n$  обозначим  $T_i \in M_{1\infty}$  — автомат без входов, возвращающий во все моменты времени константу  $a_i$ . Тогда автомат  $T_0 = T(T_1, T_2, \dots, T_n)$  — автомат без входов такой, что  $T_0() = b\gamma c^\infty$ . Так как  $b \neq c$  и в  $M_{1\infty}$  есть отрицание, то можно считать, что  $b = 0$ ,  $c = 1$ . Также в  $M_{1\infty}$ , очевидно, есть автомат  $R$  без входов такой, что  $R() = 01^h 0^\infty$ . Теперь рассмотрим автомат  $Q \in M_{1\infty}$  с одним входом и высотой 2, который во все моменты времени кроме первого работает как единичная задержка, а в первый момент времени как тождественный автомат. Нетрудно убедиться, что автомат  $Q(x) \wedge (R \vee T_0)$  является единичной задержкой. Таким образом,  $[M_{1\infty} \cup \{T\}] = \mathcal{P}_a$  и утверждение доказано.

**Утверждение 3.**  $S_p$  — предполный класс в  $\mathcal{P}_a$  для любого натурального  $p \geq 2$ .

**Доказательство.** Покажем, что класс  $S_p$  замкнут. Пусть у нас есть автоматы  $T_1, T_2, \dots, T_n \in S_p$ , а также автомат с  $n$  входами  $T \in S_p$ . Обозначим  $T_0 = T(T_1, T_2, \dots, T_n)$ . Пусть  $T_0$  имеет  $n_0$  входов. Рассмотрим произвольные слова  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_0} \in E_2^p$  и  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n_0} \in E_2^p$  такие, что для любого  $i$  слово  $\alpha_i$  может отличаться от слова  $\beta_i$  только по  $(p-1)$ -ому элементу. Подадим на входы во все автоматы  $T_j$  сначала  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_0}$ , а потом  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n_0}$ . На выходе получим слова  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in E_2^p$  и  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \in E_2^p$  соответственно. Для любого  $j$  автомат  $T_j \in S_p$ , поэтому слово  $\gamma_j$  может отличаться от  $\delta_j$  только по  $(p-1)$ -ому элементу. Теперь подадим на вход в  $T$  сначала слова  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , а потом  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ . Получим слова  $\alpha$  и  $\beta$  соот-



ветственно, которые опять же могут отличаться только по  $(p-1)$ -ому элементу. А отсюда и следует, что  $T_0 \in S_p$ . То есть  $S_p$  — замкнутый класс. При этом очевидно, что он не полный, так как не содержит единичную задержку.

Докажем, что  $S_p$  — предполный класс. Очевидно  $P_2 \subset S_p$ . Пусть есть автомат  $T \notin S_p$  с  $n$  входами, докажем, что  $[S_p \cup \{T\}] = \mathcal{P}_a$ . Так как  $T \notin S_p$ , то существуют  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in E_2^p$  и  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in E_2^p$  такие, что  $\alpha_i$  может отличаться от  $\beta_i$  только по  $(p-1)$ -ому элементу, а слова  $T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  и  $T(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  отличаются по  $p$ -ому элементу. Для каждого  $\alpha_i$  рассмотрим автомат  $R_i \in S_p$  без входов высоты  $\leq p+1$ , возвращающий выходную последовательность  $\alpha_i 0^\infty$ . Пусть  $I$  — тождественный автомат, а  $T_{p-1} \in S_p$  — автомат без входов, возвращающий выходную последовательность  $0^{p-2}10^\infty$ . Для  $i = 1, 2, \dots, n$  обозначим автомат с одним входом  $Q_i(x) = R_i \oplus (I(x) \wedge T_{p-1}) \in S_p$ , если  $\alpha_i \neq \beta_i$ , и  $Q_i = R_i$  иначе (где  $\oplus$  — сложение по модулю 2). Тогда автомат  $T_0(x) = T(Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_n(x))$  в момент времени  $p$  на выходе даёт  $x(p-1)$  или  $\overline{x(p-1)}$ . Так как в  $S_p$  есть отрицание, то можно считать, что на выходе мы имеем  $x(p-1)$ . То есть в момент времени  $p$  этот автомат работает как единичная задержка.

Теперь рассмотрим автомат  $Q \in S_p$  с двумя входами высоты  $\leq p+1$ . Во все моменты кроме  $p$  он работает как единичная задержка того, что подаётся на первый вход, а в момент времени  $p$  он выдаёт то, что подавалось на второй вход в момент времени  $p$ . Тогда нетрудно убедиться, что  $Q(x, T_0(x))$  во все моменты времени работает как единичная задержка. Следовательно,  $[S_p \cup \{T\}] = \mathcal{P}_a$  и утверждение доказано.

**Утверждение 4.**  $L_1, L_2, L_3, L_4$  — предполные классы в  $\mathcal{P}_a$ .

**Доказательство утверждения 4.** Сначала докажем для  $L_1, L_2$  и  $L_3$ .

Рассмотрим  $D_1, D_2, D_3 \subset E$ .  $D_1$  — множество сверхслов вида  $aba^\infty$ ,  $D_2$  — множество сверхслов вида  $bba^\infty$ ,  $D_3$  — множество сверхслов вида  $b(ba)^\infty$ .

Нетрудно убедиться, что  $L_i$  — класс  $G$ -сохранения  $D_i$  для  $i = 1, 2, 3$ . Значит,  $L_1, L_2$  и  $L_3$  — замкнутые классы. При этом они не совпадают с  $\mathcal{P}_a$ , так как единичная задержка не  $G$ -сохраняет  $D_i$ .

Докажем, что  $L_1, L_2$  и  $L_3$  — предполные классы. Пусть автомат  $T$  с  $n$  входами не принадлежит  $L_i$ . Докажем, что  $[L_i \cup \{T\}] = \mathcal{P}_a$ . Пусть высота автомата  $T$  равна  $h$ , а  $F$  — множество слов  $\gamma$  длины  $h+2$  таких, что для какого-то  $\delta \in E$  сверхслово  $inv(\gamma)\delta \in D_i$ . Так как  $T$  не  $G$ -сохраняет  $D_i$ , то существуют  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in D_i$  такие, что  $G_T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \beta \notin D_i$ . Для  $j = 1, 2, \dots, n$  рассмотрим автоматы высоты 1 с одним входом  $R_j$ . Если  $\alpha_j(2) = 0, \alpha_j(3) = 0$ , то  $R_j$  выдаёт константу 0 в любой момент времени, если  $\alpha_j(2) = 1, \alpha_j(3) = 1$ , то  $R_j$  выдаёт константу 1 в любой момент времени, если  $\alpha_j(2) = 0, \alpha_j(3) = 1$ , то  $R_j$  тождественный автомат, если  $\alpha_j(2) = 1, \alpha_j(3) = 0$ , то  $R_j$  отрицание тождественного автомата. Тогда нетрудно убедиться, что  $T_0(x) = T(R_1(x), R_2(x), \dots, R_n(x)) \notin L_i$ . Рассмотрим автомат  $Q \in L_i$  с 3 входами высоты  $\leq h+2$ . В моменты времени с 1 по  $h+1$  автомат работает как единичная задержка того, что подаётся на первый вход. Определим функцию  $f_{h+2}$  этого автомата.  $f_{h+2}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  равно  $\gamma_1(h)$ , если  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in F$ , и равно  $\gamma_1(h+1)$  иначе. Нетрудно убедиться, что  $Q \in L_i$ . Покажем, что автомат  $Q_0(x) = Q(x, T_0(x), T_0(\bar{x}))$  является единичной задержкой.

Рассмотрим произвольное слово  $\gamma$  длины  $t \geq h+2$  и докажем, что слово  $\epsilon = Q_0(\gamma)$  заканчивается на  $\gamma(t-1)$ . Пусть  $\alpha_1 = [_{h+2}\gamma, \alpha_2 = [_{h+2}T_0(\gamma)$ , и  $\alpha_3 = [_{h+2}T_0(\bar{\gamma})$ . Если  $\alpha_1 \notin F, \alpha_2 \notin F$  или  $\alpha_3 \notin F$ , то утверждение очевидно. Предположим, что это не так. Если  $\alpha_1$  равно  $0^{h+2}$  или  $1^{h+2}$ , то  $\epsilon(t) = \alpha_1(h) = \alpha_1(h+1) = \gamma(t-1)$ . Пусть  $\alpha_1 \in F, \alpha_1 \neq 0^{h+2}, \alpha_1 \neq 1^{h+2}$ . Так как  $T_0 \notin L_i$ , то  $\alpha_2$  или  $\alpha_3$  не принадлежит  $F$ , а мы предположили, что это не так. Значит, в  $[L_i \cup \{T\}]$  есть единичная задержка и  $[L_i \cup \{T\}] = \mathcal{P}_a$ .

Теперь докажем, что  $L_4$  замкнут. Рассмотрим автоматы  $T_1, T_2, \dots, T_n \in L_4$ , а также автомат с  $n$  входами  $T \in L_4$ . Обозначим  $T_0 = T(T_1, T_2, \dots, T_n)$ . Докажем, что  $T_0 \in L_4$ . Для простоты изложения будем считать, что автоматы  $T_1, T_2, \dots, T_n$  — автоматы с одним входом. Пусть  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n \in E_2$ , тогда для любого  $i$  найдутся такие  $c_i, d_i \in E_2$ , что  $G_{T_i}(b_i a_i^\infty) = c_i d_i^\infty, G_{T_i}(b_i^\infty) = c_i^\infty$ . Так как  $T \in L_4$ , то найдутся такие  $e, f \in E_2$ , что  $G_T(c_1 d_1^\infty, c_2 d_2^\infty, \dots, c_n d_n^\infty) = e f^\infty, G_T(c_1^\infty, c_2^\infty, \dots, c_n^\infty) = e^\infty$ . То есть мы доказали, что для произвольных  $a_i, b_i$  сверхслово  $G_{T_0}(a_1 b_1^\infty, a_2 b_2^\infty, \dots, a_n b_n^\infty) = e f^\infty$ , а

сверхслово  $G_{T_0}(a_1^\infty, a_2^\infty, \dots, a_n^\infty) = e^\infty$ . Значит,  $T_0 \in L_4$  и класс  $L_4$  замкнутый. При этом очевидно, что он не полный, так как не содержит единичную задержку.

Докажем, что  $L_4$  — предполный класс. Пусть автомат  $T$  с  $n$  входами не принадлежит  $L_4$ . Докажем, что  $[L_4 \cup \{T\}] = \mathcal{P}_a$ . Пусть высота автомата  $T$  равна  $h$ . Так как  $T \notin L_4$ , то существуют такие  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n \in E_2$ , что  $G_T(b_1 a_1^\infty, b_2 a_2^\infty, \dots, b_n a_n^\infty) = cd^\infty$ ,  $G_T(b_1^\infty, b_2^\infty, \dots, b_n^\infty) = e^\infty$ , причём  $c \neq e$ . Для  $j = 1, 2, \dots, n$  рассмотрим автоматы высоты 1 с одним входом  $R_j$ . Если  $a_j = 0, b_j = 0$ , то  $R_j$  выдаёт константу 0 в любой момент времени, если  $a_j = 1, b_j = 1$ , то  $R_j$  выдаёт константу 1 в любой момент времени, если  $a_j = 0, b_j = 1$ , то  $R_j$  тождественный автомат, если  $a_j = 1, b_j = 0$ , то  $R_j$  отрицание тождественного автомата. Тогда нетрудно убедиться, что автомат  $T_0(x) = T(R_1(x), R_2(x), \dots, R_n(x)) \notin L_4$ . Пусть  $T_0(01^\infty) = c_1 d_1^\infty$ , а  $T_0(10^\infty) = c_2 d_2^\infty$ . Так как  $T_0 \notin L_4$ , то  $c_1 \neq d_2$  или  $c_2 \neq d_1$ . Поэтому найдётся булева функция  $f(x_1, x_2, x_3)$  такая, что  $f(0, c_1, c_2) = 1$ ,  $f(1, d_1, d_2) = 1$ ,  $f(1, c_2, c_1) = 0$ ,  $f(0, d_2, d_1) = 0$ . Рассмотрим автомат  $S(x) = f(x, T_0(x), T_0(\bar{x}))$ . Нетрудно убедиться, что  $G_S(01^\infty) = 1^\infty$ , а  $G_S(10^\infty) = 0^\infty$ . Заметим, что высота автомата  $S$  меньше либо равна высоте автомата  $T$ , то есть меньше либо равна  $h$ .

Пусть  $F$  — множество слов  $\gamma$  длины  $h + 1$  вида  $a^h b$ , где  $a, b \in E_2$ . Рассмотрим автомат  $Q \in L_4$  с 2 входами высоты  $\leq h + 1$ . В моменты времени с 1 по  $h$  автомат работает как единичная задержка того, что подаётся на первый вход. Определим функцию  $f_{h+1}$  этого автомата.  $f_{h+1}(\gamma_1, \gamma_2)$  равно  $\gamma_2(h+1)$ , если  $\gamma_1 \in F$ , и равно  $\gamma_1(h)$  иначе. Нетрудно убедиться, что  $Q \in L_4$ . Покажем, что автомат  $Q_0(x) = Q(x, S(x))$  является единичной задержкой. Рассмотрим произвольное слово  $\gamma$  длины  $t \geq h + 1$  и докажем, что слово  $\epsilon = Q_0(\gamma)$  заканчивается на  $\gamma(t-1)$ . Если  $[_{h+1}\gamma \notin F$ , то это очевидно. Если  $[_{h+1}\gamma = a^h b \in F$ , то  $S(\gamma)$  заканчивается на  $a = \gamma(t-1)$ , значит, автомат  $Q_0$  во все моменты времени работает как единичная задержка. То есть в  $[L_4 \cup \{T\}]$  есть единичная задержка и  $[L_4 \cup \{T\}] = \mathcal{P}_a$ . Утверждение доказано.

**Утверждение 5.**  $R_d^C$  — замкнутый класс в  $\mathcal{P}_a$ , не совпадающий с  $\mathcal{P}_a$ . Пусть к тому же выполнены следующие условия:

- 1) если  $\alpha \in C$  имеет наименьший период  $d$  и  $(\circ_r \alpha) \in C$ , тогда для любого  $\beta \in C$   $(\circ_r \beta) \in C$ .
- 2) если  $C$  содержит слово с наименьшим периодом  $e$ ,  $1 < e < d$ , то  $C$  содержит все слова периода  $e$ .

Тогда  $R_d^C$  — предполный класс в  $\mathcal{P}_a$ .

**Доказательство утверждения 5.** Класс  $R_d^C$  совпадает с  $\mathcal{U}_G(C)$ , а значит, из леммы 1 следует, что  $R_d^C$  замкнутый класс. Также очевидно, что  $P_2 \subset R_d^C$ . Покажем, что он не совпадает с  $\mathcal{P}_a$ . По определению существует  $\alpha \in C$  с наименьшим периодом  $e$  и слово  $\beta \notin C$  с периодом  $e$ . Построим автомат  $T \notin R_d^C$  с одним входом высоты  $\leq d$ . Определим функцию  $f_d$  соответствующую автомату  $T$ .  $f_d(a(1), a(2), \dots, a(d)) = 1$ , тогда и только тогда, когда  $a(d)a(d-1) \dots a(1) = \circ_{r-1} \alpha$  и  $\beta(r) = 1$  для какого-то  $1 \leq r \leq d$ . Тогда очевидно, что  $G_T(\alpha^\infty) = \beta^\infty$ , а значит,  $T \notin R_d^C$  и  $R_d^C \neq \mathcal{P}_a$ .

Теперь докажем вторую часть утверждения. Будем считать, что если  $\alpha \in C$  имеет наименьший период  $d$  и  $(\circ_r \alpha) \in C$ , тогда для любого  $\beta \in C$   $(\circ_r \beta) \in C$ . А также если  $C$  содержит слово с наименьшим периодом  $e$ ,  $1 < e < d$ , то  $C$  содержит все слова периода  $e$ . Докажем, что  $R_d^C$  — предполный класс в  $\mathcal{P}_a$ . По определению найдется такое  $e$ , что в  $C$  есть слово  $\alpha$  с наименьшим периодом  $e$ , но  $C$  содержит не все слова периода  $e$ . Отсюда, а также из условия 2 очевидно следует, что  $e = d$ , то есть в  $C$  есть слово с наименьшим периодом  $d$ .

Докажем, что для любого слова  $\alpha \in C$  с наименьшим периодом  $d$  и любого слова  $\beta \in C$  существует автомат  $T_{\alpha\beta} \in R_d^C$  с одним входом высоты  $\leq d$  такой, что  $G_{T_{\alpha\beta}}(\alpha^\infty) = \beta^\infty$ . Определим функцию  $f_d$ , соответствующую автомату  $T_{\alpha\beta}$ .  $f_d(a(1), a(2), \dots, a(d)) = 1$  тогда и только тогда, когда  $a(d)a(d-1) \dots a(1) = \circ_{r-1} \alpha$  и  $\beta(r) = 1$  для какого-то  $1 \leq r \leq d$ . Покажем, что автомат  $T_{\alpha\beta}$   $G$ -сохраняет  $C$ . Пусть  $\delta \in C$ ,  $\delta \neq \circ_r \alpha$  для любого  $0 \leq r \leq d-1$ . Нетрудно убедиться, что  $G_{T_{\alpha\beta}}(\delta^\infty) = 0^\infty$ . Если же  $\delta \in C$ ,  $\delta = \circ_r \alpha$ , то  $G_{T_{\alpha\beta}}(\delta^\infty) = (\circ_r \beta)^\infty$ , а  $(\circ_r \beta) \in C$ . То есть автомат  $T_{\alpha\beta} \in R_d^C$  построен.

Пусть автомат  $T$  с  $n$  входами высоты  $h$  не принадлежит  $R_d^C$ . Тогда существуют такие  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in C$ , что  $G_T(\alpha_1^\infty, \alpha_2^\infty, \dots, \alpha_n^\infty) = \delta^\infty$ ,  $\delta \notin C$ . Для любого  $\alpha \in C$  с наименьшим периодом  $d$  построим автомат  $Q_\alpha(x) = T(T_{\alpha\alpha_1}(x), T_{\alpha\alpha_2}(x), \dots, T_{\alpha\alpha_n}(x))$ . Нетрудно убедиться,

что  $G_{Q_\alpha}((\alpha)^\infty) = \delta^\infty$ . Для  $\alpha \notin C$  и  $\alpha$  с наименьшим периодом меньше  $d$  будем считать, что автомат  $Q_\alpha$  — тождественная константа 0.

Пусть  $F_r$  — множество слов  $\gamma$  длины  $h+2d$  таких, что для каких-то  $\delta \in E$ ,  $\zeta \in C$  сверхслово  $(inv(\gamma))\delta = (\circlearrowleft_r \zeta)^\infty$ . Другими словами, если слово  $\gamma$  перевернуть, то оно является куском какого-то сверхслова  $\zeta^\infty$ , причём  $\zeta \in C$ , а сдвиг равен  $r$ . Если в определении  $F_r$  потребовать, чтобы наименьший период  $\zeta$  был равен  $d$ , то мы определим множество  $F'_r$ .

Определим автомат  $R \in R_d^C$  с  $2^d + 1$  входом высоты  $\leq h + 2d$ . В моменты времени с 1 по  $h + 2d - 1$  автомат работает как единичная задержка того, что подаётся на вход номер  $2^d + 1$ . Определим функцию  $f_{h+2d}$  этого автомата на произвольных словах  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2^d+1} \in E_2^{h+2d}$ .  $f_{h+2d}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2^d+1})$  равно 0, если существует такое  $0 \leq r \leq d - 1$ , что для любого  $1 \leq j \leq 2^d$  слово  $\alpha_j \in F_r$ , а  $\alpha_{2^d+1} \in F'_r$ , и равно  $\alpha_{2^d+1}(h + 2d - 1)$  иначе. Нетрудно убедиться, что  $R \in R_d^C$ .

Пронумеруем элементы  $E_2^d$  числами от 1 до  $2^d$ . Построим автомат  $W$  с помощью операции суперпозиции из вышеперечисленных автоматов. На  $i$ -ый вход автомата  $R$  подадим выход из автомата  $Q_\alpha$ , где  $\alpha$  соответствует числу  $i$ . На вход в каждый автомат  $Q_\alpha$ , а также на  $2^d + 1$  вход автомата  $R$  будем подавать выход с тождественного автомата.

Покажем, что  $W$  работает как единичная задержка. Рассмотрим произвольное слово  $\gamma$  длины  $t \geq h+2d$  и подадим его на вход автомата  $W$ . Пусть на  $i$ -ый вход автомата  $R$  поступает в этом случае слово  $\alpha_i$ . Докажем, что слово  $W(\gamma)$  заканчивается на  $\gamma(t - 1)$ .

Это очевидно, если не существует такого  $0 \leq r \leq d - 1$ , что для любого  $1 \leq j \leq 2^d$  слово  $[\alpha_j]_{h+2d} \in F_r$ , а  $[\alpha_{2^d+1}]_{h+2d} \in F'_r$ . Значит, такое  $r$  существует. Для какого-то  $\alpha \in C$  с наименьшим периодом  $d$  верно равенство  $[\alpha]_d inv(\gamma) = \circlearrowleft_r \alpha$ . Рассмотрим  $1 \leq j \leq 2^d$ , соответствующее этому  $\alpha$ . Так как высота автомата  $Q_\alpha \leq h + d$ , то легко убедиться, что  $[\alpha]_{h+2d} Q_\alpha(\gamma) \notin F_r$ . Следовательно,  $[\alpha]_{h+2d} \notin F_r$ , получили противоречие. Значит,  $W(\gamma)$  заканчивается на  $\gamma(t - 1)$  и автомат  $W$  во все моменты времени работает как единичная задержка. То есть  $[R_d^C \cup \{T\}] = \mathcal{P}_a$  и утверждение доказано.

**Утверждение 6.** Если  $R_d^C$  — не предполный класс, то существует  $d'$ , делящее  $d$ , и  $C' \subset E_2^{d'}$  такое, что  $R_d^C \subset R_{d'}^{C'}$  и  $R_{d'}^{C'}$  — предполный класс.

**Доказательство утверждения 6.** Обозначим  $d_0 = d$ ,  $C_0 = C$ . Будем строить последовательность  $R_{d_0}^{C_0} \subset R_{d_1}^{C_1} \subset R_{d_2}^{C_2} \subset \dots$ , где  $d_1$  делит  $d_0$ ,  $d_2$  делит  $d_1$ , и так далее.

Пусть мы уже построили  $d_i$  и  $C_i$ , причём  $R_{d_i}^{C_i}$  — не предполный класс. Построим  $d_{i+1}$  и  $C_{i+1}$ . Возможны два варианта:

- 1) Для какого-то  $\alpha \in C_i$  с наименьшим периодом  $d_i$  слово  $\circ_r \alpha \in C_i$ , но для  $\beta \in C_i$  слово  $\circ_r \beta \notin C_i$ . Тогда  $d_{i+1} = d_i$ . Рассмотрим множество  $C_{i+1} \subset C_i$ , состоящее из всех таких  $\gamma \in E_2^{d_i}$ , что для какого-то автомата с одним входом  $T \in R_{d_i}^{C_i}$  выполняется  $G_T(\alpha^\infty) = \gamma^\infty$ . Покажем, что  $C_{i+1} \neq C_i$ . Предположим, что это не так, тогда  $\alpha, (\circ_r \alpha), \beta \in C_{i+1}, (\circ_r \beta) \notin C_{i+1}$ . Так как  $\beta \in C_{i+1}$ , то для какого-то автомата с одним входом  $T \in R_{d_i}^{C_i}$  выполняется  $G_T(\alpha^\infty) = \beta^\infty$ . Аналогично, так как  $\circ_r \alpha \in C_{i+1}$ , то для какого-то автомата  $R \in R_{d_i}^{C_i}$  выполняется  $G_R((\alpha)^\infty) = (\circ_r \alpha)^\infty$ . Значит, для автомата с одним входом  $T_0(x) = T(R(x))$  верно равенство  $G_{T_0}((\alpha)^\infty) = (\circ_r \beta)^\infty$ . Но  $(\circ_r \beta) \notin C_{i+1}$ , получили противоречие, значит,  $C_{i+1} \neq C_i$ . Так как  $C_{i+1} \subset C_i$  и  $P_2 \subset R_{d_i}^{C_i}$ , то нетрудно убедиться, что  $d_{i+1}$  и  $C_{i+1}$  определяют замкнутый класс  $R_{d_{i+1}}^{C_{i+1}}$ , причём  $R_{d_i}^{C_i} \subset R_{d_{i+1}}^{C_{i+1}}$ .
- 2)  $C_i$  содержит слово с наименьшим периодом  $e$ ,  $1 < e < d_i$ , но  $C_i$  содержит не все слова периода  $e$ , тогда  $d_{i+1} = e$ . Рассмотрим множество  $C_{i+1} \subset E_2^{d_{i+1}}$ , состоящее из всех таких  $\gamma \in E_2^{d_{i+1}}$ , что  $\gamma^{d_i/d_{i+1}} \in C_i$ . Так как для любого автомата  $T$  отображение  $G_T$  переводит сверхслова с периодом  $d_{i+1}$  в сверхслова с периодом  $d_{i+1}$ , то нетрудно убедиться, что  $d_{i+1}$  и  $C_{i+1}$  определяют замкнутый класс  $R_{d_{i+1}}^{C_{i+1}}$ , причём  $R_{d_i}^{C_i} \subset R_{d_{i+1}}^{C_{i+1}}$ .

То есть возможны два варианта:  $d_{i+1} < d_i$  или  $C_{i+1} \subset C_i$  и  $d_{i+1} = d_i$ . Это значит, что в последовательности  $R_{d_0}^{C_0} \subset R_{d_1}^{C_1} \subset R_{d_2}^{C_2} \subset \dots$  ни один элемент не повторяется и эта последовательность конечная, потому что различный классов  $R_{\tilde{d}}^{\tilde{C}}$  с  $\tilde{d} \leq d$  конечное число. Осталось в

качестве  $d'$  и  $C'$  взять последний элемент этой последовательности. Утверждение доказано.

Доказательство теоремы 2 основывается на следующих леммах.

**Лемма 2.** Пусть  $\mathfrak{Z}$  — система подмножеств множества всех натуральных чисел  $\mathbb{N}$  такая, что если  $N_1, N_2 \in \mathfrak{Z}$ , то  $\mathbb{N} \setminus N_1, N_1 \cap N_2, N_1 \cup N_2 \in \mathfrak{Z}$ . Тогда  $\mathbb{N}$  можно разбить на непересекающиеся множества  $\mathbb{N} = M_1 \sqcup M_2 \sqcup M_3 \sqcup \dots$  так, что для любого  $C \in \mathfrak{Z}$  и любого конечного множества  $S \subset \mathbb{N}$  существует такое  $D = M_{i_1} \cup \dots \cup M_{i_t}$ , что  $D \cap S = C \cap S$ . И наоборот, для любого  $D = M_{i_1} \cup \dots \cup M_{i_t}$  и любого конечного множества  $S \subset \mathbb{N}$  существует такое  $C \in \mathfrak{Z}$ , что  $D \cap S = C \cap S$ .

**Доказательство.** Построим в явном виде последовательность множеств  $M_i$ .

$$M_1 = \{a \mid \forall K \in \mathfrak{Z} \quad (1 \in K \iff a \in K)\}.$$

Пусть мы уже построили множества  $M_1, M_2, \dots, M_{i-1}$ . Построим  $M_i$ . Пусть  $c$  — наименьшее число в  $\mathbb{N} \setminus M_1 \dots \setminus M_{i-1}$ . Если это множество пусто и такого  $c$  не найдётся, то в последовательности  $M_i$  больше нет элементов и она конечна. Иначе

$$M_i = \{a \mid \forall K \in \mathfrak{Z} \quad (c \in K \iff a \in K)\}.$$

Эти множества, очевидно, не пересекаются, а их объединение составляет  $\mathbb{N}$ .

Пусть  $C \in \mathfrak{Z}$  и конечное множество  $S \subset \mathbb{N}$ . Выделим из последовательности  $M_i$  все такие множества  $M_j$ , что  $M_j \cap S \cap C \neq \emptyset$ . Очевидно, что их будет конечное число. Пусть это  $M_{i_1}, \dots, M_{i_t}$ , докажем, что для  $D = M_{i_1} \cup \dots \cup M_{i_t}$  выполняется  $D \cap S = C \cap S$ . Пусть  $b \in C, b \in S$ . Так как  $\mathbb{N} = M_1 \sqcup M_2 \sqcup M_3 \sqcup \dots$ , то  $b \in M_j$  для какого-то  $j$  и  $b \in M_j \cap S \cap C$ , то есть  $M_j \subset D$  и  $b \in D$ . Теперь пусть  $b \in D, b \in S$ . Докажем, что  $b \in C$ . Для какого-то  $j$  выполняется  $b \in M_j$ . Так как  $M_j \subset D$ , то найдётся  $d \in M_j \cap S \cap C$ . По определению

$$M_j = \{a \mid \forall K \in \mathfrak{Z} \quad (c \in K \iff a \in K)\}.$$

Так как  $d \in C$ , то  $c \in C$ , а значит,  $b \in C$ . То есть мы доказали, что  $D \cap S = C \cap S$ .

Теперь пусть  $D = M_{i_1} \cup \dots \cup M_{i_t}$  и конечное множество  $S \subset \mathbb{N}$ . Для того чтобы доказать, что существует такое  $C \in \mathfrak{Z}$ , что  $D \cap S = C \cap S$  нам достаточно доказать, что для любого  $M_j$  существует такое  $C_j \in \mathfrak{Z}$ , что  $M_j \cap S = C_j \cap S$ . Тогда  $C = C_{i_1} \cup \dots \cup C_{i_t}$ . Рассмотрим  $c$  из определения  $M_j$ . Так как  $c$  с каждым множеством  $K \in \mathfrak{Z}$ ,  $\mathfrak{Z}$  содержит  $\mathbb{N} \setminus K$ , то для любого  $b \in S \setminus M_j$  существует  $A_b \in \mathfrak{Z}$  такое, что  $c \in A_b$ ,  $b \notin A_b$ . Тогда  $C_j = \bigcap_{b \in S \setminus M_j} A_b$  и  $C_j \cap S = M_j \cap S$ . Лемма доказана.

**Лемма 3.** Пусть  $B$  — подмножество  $\mathcal{P}_a$ , не являющееся подмножеством никакого  $M_{pq}$ ,  $P_2 \subset B$ . Тогда для любых  $s$  и  $N$  таких, что  $N \geq s$ , существует автомат без входов  $T_{sN} \in [B]$  такой, что его функция выхода

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 1 \leq t \leq N, t \neq s, \\ 1, & t = s. \end{cases}$$

**Доказательство.** Пусть  $A$  — множество таких элементов  $\alpha \in E$ , для которых существует автомат с одним входом  $T \in [B]$  такой, что  $T(0^\infty) = \alpha$ .

Каждому элементу  $E$  естественным образом сопоставим подмножество множества  $\mathbb{N}$ , а множеству  $A$  систему  $\tilde{A}$  подмножеств  $\mathbb{N}$ . Другими словами все элементы сверхслова пронумерованы элементами множества  $\mathbb{N}$ . Если множество  $C \subset \mathbb{N}$  соответствует сверхслову  $\alpha \in E$ , то  $i \in C$  равносильно тому, что на  $i$ -ом месте в  $\alpha$  стоит 1.

Так как в  $[B]$  есть конъюнкция, дизъюнкция, отрицание, то для любых  $A_1, A_2 \in \tilde{A}$  множества  $A_1 \cap A_2, A_1 \cup A_2, \mathbb{N} \setminus A_1 \in \tilde{A}$ . Из леммы 2 получим  $\mathbb{N} = M_1 \sqcup M_2 \sqcup M_3 \sqcup \dots$ . Найдём минимальное  $k_2$  такое, что для каких-то  $l$  и  $k_1 < k_2$  числа  $k_1, k_2 \in M_l$ . Тогда нетрудно убедиться, что  $B \subset M_{k_1 k_2}$ . Если же такого  $k_2$  не найдётся, то в каждом множестве  $M_i$  ровно 1 элемент. Для определённости можно считать, что  $M_i = \{i\}$ .

Рассмотрим произвольные  $s$  и  $N \geq s$ . Для  $D = M_s = \{s\}$ ,  $S = \{1, 2, \dots, N\}$  из леммы 2 следует, что существует  $C \in \tilde{A}$  такое, что  $C \cap S = \{s\}$ . Множеству  $C$  соответствует сверхслово  $\alpha \in A$ , а этому сверхслову соответствует автомат  $T$  такой, что  $T(0^\infty) = \alpha$ . Но константа 0 принадлежит  $B$ , значит, в качестве  $T_{sN} \in [B]$  можно взять  $T(0)$  и лемма доказана.



**Следствие 1.** Пусть  $B$  — подмножество  $\mathcal{P}_a$ , не являющееся подмножеством никакого  $M_{pq}$ ,  $P_2 \subset B$ . Тогда для любого  $N$  и любого  $S \subset \{1, 2, \dots, N\}$  существует автомат без входов  $T \in [B]$  такой, что

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 1 \leq t \leq N, t \notin S, \\ 1, & t \in S. \end{cases}$$

**Доказательство.** Нетрудно убедиться, что искомый автомат  $T = \bigvee_{t \in S} T_{tN}$ .

**Лемма 4.** Пусть  $B$  — подмножество  $\mathcal{P}_a$ , не являющееся подмножеством никакого  $M_{pq}$ ,  $S_p$  и  $M_{1\infty}$ ,  $P_2 \subset B$ . Тогда для любого  $s$  существует  $N > s$  и автомат без входов  $S_{sN} \in [B]$  такой, что

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 1 \leq t \leq s, \\ 1, & t > N. \end{cases}$$

**Доказательство.** Сначала докажем, что для любого  $t$  существует  $N_t > t$  и автомат без входов  $K_{tN_t} \in [B]$  с функцией выхода

$$y(j) = \begin{cases} 0, & j = t, \\ 1, & j > N_t. \end{cases}$$

Для любого  $t$  построим автомат  $T \in B$  такой, что для каких-то  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{t-1}, \vec{a} \in E_2^{n(T)}$

$$f_{h(T)}(\vec{a}, \vec{a}, \dots, \vec{a}) \neq f_t(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{t-1}, \vec{a}).$$

Если  $t = 1$ , то возьмём произвольный  $T \notin M_{1\infty}$ . Для какого-то  $\vec{a} \in E_2^{n(T)}$

$$f_{h(T)}(\vec{a}, \vec{a}, \dots, \vec{a}) \neq f_1(\vec{a}).$$

Если  $t > 1$ , то возьмём автомат  $T \notin S_t$ . Для каких-то  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_t, \vec{b} \in E_2^{n(T)}$ .

$$f_t(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{t-2}, \vec{a}_{t-1}, \vec{a}_t) \neq f_t(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{t-2}, \vec{b}, \vec{a}_t).$$

А значит, либо левая часть, либо правая часть не равна  $f_{h(T)}(\vec{a}_t, \vec{a}_t, \dots, \vec{a}_t)$ .

Пусть  $n(T) = 1$ . Из следствия 1 следует, что существует автомат без входов  $R \in [B]$  такой, что  $y(i) = a_i$  для любого  $1 \leq i \leq t-1$  и  $y(t) = a$ . Если в качестве выхода автомат  $R$  возвращает сверхслово вида  $a_1 a_2 a_3 \dots a_{t-1} a \gamma b^\infty$  и  $b \neq a$ , то в качестве автомата  $K_{tN_t}$  возьмём  $R$  или  $\overline{R}$ . Иначе, не трудно убедиться в том, что в качестве автомата  $K_{tN_t}$  можно взять  $T(R)$  или  $\overline{T(R)}$ . Аналогично, если  $n(T) > 1$ , то по следствию 1 найдём  $n(T)$  автоматов  $R_1, \dots, R_{n(T)}$  и в качестве  $K_{tN_t}$  будем брать или  $R_i$ , или  $\overline{R_i}$  для какого-то  $i$ , или  $T(R_1, R_2, \dots, R_{n(T)})$ , или  $\overline{T(R_1, R_2, \dots, R_{n(T)})}$ . То есть мы доказали, что существует  $K_{tN_t} \in [B]$ . Но  $S_{sN} = \bigwedge_{t \leq s} K_{tN_t}$ , где  $N = \max_{t \leq s} N_t$ . Что и требовалось доказать.

**Лемма 5.** Пусть  $B$  — подмножество  $\mathcal{P}_a$ , не являющееся подмножеством никакого  $S_p$  и  $M_{pq}$ ,  $P_2 \subset B$ . Тогда для любого  $s \geq 2$  существует автомат с одним входом  $U_s \in [B]$  такой, что  $y(s) = x(s-1)$ .

**Доказательство.** Из условия леммы следует, что существует автомат  $T \in B$  такой, что  $T \notin S_s$ . А значит, для этого автомата

$$f_s(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{s-2}, \vec{a}_{s-1}, \vec{a}_s) \neq f_s(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{s-2}, \vec{b}, \vec{a}_s)$$

для каких-то  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p, \vec{b} \in E_2^{n(T)}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{a}_{s-1}$ . Пусть  $n(T) = 1$ . Из следствия 1 следует, что существует автомат без входов  $R \in [B]$  такой, что  $y(i) = a_i$  для любого  $1 \leq i \leq t$ . Рассмотрим автомат  $Q(x) = T(R \oplus (T_{s-1,s}(x) \wedge x))$ , где  $\oplus$  — сложение по модулю 2,  $T_{s-1,s}$  — автомат из леммы 3. Тогда нетрудно убедиться, что либо автомат  $Q$ , либо автомат  $\overline{Q}$  искомым. Если  $n(T) > 1$ , то по следствию 1 найдём  $n(T)$  автоматов  $R_1, \dots, R_{n(T)}$ , будем добавлять  $T_{s-1,s}(x) \wedge x$  к  $R_i$  только для таких  $i$ , для которых  $\vec{b}^{(i)} \neq \vec{a}_{s-1}^{(i)}$ . Подставив полученные автоматы в  $T$ , мы и получим искомым автомат  $Q$  или  $\overline{Q}$ . Что и требовалось доказать.

Будем говорить, что  $C \subset \mathcal{P}_a$  отличает  $\alpha_1$  от  $\alpha_2$ , если в  $C$  есть автомат  $T$  с одним входом высоты  $\leq \min(|\alpha_1|, |\alpha_2|)$  такой, что  $f_{h(T)}(\text{inv}(\downarrow_{h(T)} \alpha_1)) \neq f_{h(T)}(\text{inv}(\downarrow_{h(T)} \alpha_2))$ .

**Лемма 6.** Пусть  $B \subset \mathcal{P}_a$ ,  $P_2 \subset B$  и в  $[B]$  нет автомата с одним входом  $W$  такого, что  $f_{h(W)}(a_1, \dots, a_{h(W)-1}, a_{h(W)}) = a_{h(W)-1}$  для

любых  $a_1, \dots, a_{h(W)} \in E_2$ . Тогда существуют  $\alpha$  и  $\beta$  из  $E$ , не отличимые множеством  $[B]$ , такие, что  $\alpha(1) = \beta(1)$  и  $\alpha(2) \neq \beta(2)$ .

**Доказательство.** Предположим, что это не так. Определим множества  $D_r \subset (E_2^r)^2$ . Для  $\alpha, \beta \in E_2^r$  пара  $(\alpha, \beta)$  принадлежит  $D_r$  тогда и только тогда, когда  $\alpha(1) = \beta(1)$ ,  $\alpha(2) \neq \beta(2)$ , и  $[B]$  не отличает  $\alpha$  от  $\beta$ .

Теперь докажем, что  $D_r$  не пустое для любого  $r$ . Пусть  $D_r = \emptyset$ , тогда для любых  $\alpha, \beta \in E_2^r$  таких, что  $\alpha(1) = \beta(1)$ ,  $\alpha(2) \neq \beta(2)$ , в  $[B]$  есть автомат  $Q_{\alpha, \beta}$  с одним входом высоты  $h \leq r$  отличающий  $\alpha$  и  $\beta$ . Так как в  $[B]$  есть отрицание, то без ограничения общности можно считать, что  $f_h(\text{inv}(\downarrow_h \alpha)) = 0$ , а  $f_{h(T)}(\text{inv}(\downarrow_{h(T)} \beta)) = 1$ . Также определим  $Q_{\alpha, \beta}$ , если  $\alpha(1) \neq \beta(1)$ ,  $\alpha(2) \neq \beta(2)$ . В этом случае в качестве  $Q_{\alpha, \beta}$  возьмём либо тождественный автомат, либо отрицание тождественного автомата, чтобы  $f_1(\alpha(1)) = 0$ , а  $f_1(\beta(1)) = 1$ .

Рассмотрим автомат  $W(x) = \bigwedge_{\alpha} \bigvee_{\beta} Q_{\alpha, \beta}(x)$ , в котором конъюнкция берётся по всем  $\alpha \in E_2^r$  таким, что  $\alpha(2) = 0$ , дизъюнкция по всем  $\beta \in E_2^r$  таким, что  $\beta(2) = 1$ . Нетрудно убедиться, что  $W$  удовлетворяет условиям леммы, получили противоречие. Значит,  $D_r$  не пустое для любого  $r$ .

Для  $(\alpha', \beta') \in D_{r-1}$ ,  $(\alpha, \beta) \in D_r$  будем говорить, что  $(\alpha', \beta') \prec (\alpha, \beta)$ , если  $\alpha' = \downarrow_{r-1} \alpha$  и  $\beta' = \downarrow_{r-1} \beta$ . Очевидно, что если  $(\alpha, \beta) \in D_r$ , то  $(\downarrow_{r-1} \alpha, \downarrow_{r-1} \beta) \in D_{r-1}$  и  $(\downarrow_{r-1} \alpha, \downarrow_{r-1} \beta) \prec (\alpha, \beta)$ . Тогда из леммы Кёнига [5] следует, что существует бесконечная последовательность  $(\alpha_1, \beta_1) \prec (\alpha_2, \beta_2) \prec \dots$ , где  $(\alpha_i, \beta_i) \in D_i$  для любого  $i$ . Пусть  $\alpha = \alpha_1(1)\alpha_2(2)\dots\alpha_i(i)\dots$ , и  $\beta = \beta_1(1)\beta_2(2)\dots\beta_i(i)\dots$ . Покажем, что  $\alpha$  не отличимо от  $\beta$  множеством  $[B]$ . Предположим, что их можно отличить автоматом  $T \in [B]$  высоты  $r$ , но  $(\downarrow_r \alpha, \downarrow_r \beta) \in D_r$ , получили противоречие, а значит, лемма доказана.

Для  $\alpha \in E$  обозначим  $A_{\alpha, B}$  — множество сверхслов  $\gamma \in E$  таких, что существует автомат  $T \in [B]$  с одним входом такой, что  $G_T(\alpha) = \gamma$ . Тогда верна следующая лемма.

**Лемма 7.** Для любого  $B \subset P_a$  и любого  $\alpha \in E$  каждый автомат из  $B$   $G$ -сохраняет  $A_{\alpha, B}$ .

**Доказательство.** Рассмотрим  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in A_{\alpha, B}$  и любой автомат  $T \in B$  с  $n$  входами, докажем, что  $G_T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in A_{\alpha, B}$ . Из определения следует, что существуют автоматы с одним входом  $R_1, R_2, \dots, R_n \in [B]$  такие, что  $\alpha_i = G_{R_i}(\alpha)$ . Рассмотрим автомат  $Q(\gamma) = T(R_1(\gamma), R_2(\gamma), \dots, R_n(\gamma))$ . Очевидно, что  $Q \in [B]$ ,  $G_Q(\alpha) = G_T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , а значит,  $G_T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in A_{\alpha, B}$ . Что и требовалось доказать.

**Определение 5.** Для  $h > 1$  говорим, что множество автоматов  $B$  обладает  $h$ -свойством, если  $P_2 \subset B$ ,  $B \subset \mathcal{P}_a^h$  и  $B$  не является подмножеством  $L_1, L_2, L_3, L_4$  и  $R_d^C$  для  $d < (2h^2)^{4h}$ .

Рассмотрим произвольное  $B$ , обладающее  $h$ -свойством, и произвольное  $A \subset E$  такое, что  $B$   $G$ -сохраняет  $A$ . Сопоставим каждому элементу  $E$  подмножество  $\mathbb{N}$ , а множеству  $A$  систему  $\tilde{A}$  подмножеств  $\mathbb{N}$ . Другими словами, все элементы сверхслова пронумерованы элементами множества  $\mathbb{N}$ . Если множество  $C \subset \mathbb{N}$  соответствует  $\alpha \in E$ , то  $i \in C$  равносильно тому, что на  $i$ -ом месте в  $\alpha$  стоит 1.

Так как в  $[B]$  есть конъюнкция, дизъюнкция, отрицание, то для любых  $A_1, A_2 \in A$  множества  $A_1 \cap A_2, A_1 \cup A_2, \mathbb{N} \setminus A_1 \in \tilde{A}$ . Из леммы 2 получим  $\mathbb{N} = M_1 \sqcup M_2 \sqcup M_3 \sqcup \dots$ . Другими словами, это означает, что мы разбили множество  $\mathbb{N}$  на классы эквивалентности, при этом если  $i$  эквивалентно  $j$ , а  $\gamma \in A$ , то в  $\gamma$  на  $i$ -ом и  $j$ -ом местах стоит одно и то же. Будем говорить, что отображение  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  описывает  $A$ , если  $g(k_1) = g(k_2)$  равносильно тому, что для любого  $\alpha \in A$  выполняется  $\alpha(k_1) = \alpha(k_2)$ . Множество всех таких отображений обозначим  $\mathbb{G}(A)$ . Очевидно, что отображение, принимающее на любом элементе множества  $M_i$  значение  $i$ , принадлежит  $\mathbb{G}(A)$ . Чтобы задать произвольное такое отображение необходимо и достаточно задать его на множествах  $M_1, M_2, \dots$ .

**Лемма 8.** Пусть  $B$  обладает  $h$ -свойством и  $G$ -сохраняет  $A \subset E$ ,  $g \in \mathbb{G}(A)$ . Для любого конечного  $S \subset \mathbb{N}$  и любого отображения  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow E_2$  существует  $\gamma \in A$  такое, что для любого  $i \in S$  на  $i$ -ом месте в  $\gamma$  стоит  $\phi(g(i))$ .

**Доказательство.** Рассмотрим систему  $\tilde{A}$  подмножеств  $\mathbb{N}$ , соответствующую множеству  $A$ , и воспользуемся леммой 2. Пусть множество  $D$  является объединением тех и только тех  $M_i$ , для которых

$M_i \cap S \neq \emptyset$  и  $\phi(g(M_i)) = 1$ . Тогда по лемме 2 найдётся такое  $C \in \tilde{A}$ , что  $C \cap S = D \cap S$ . Множеству  $C$  можно сопоставить  $\gamma \in A$ . Нетрудно убедиться, что  $\gamma$  удовлетворяет условиям леммы.

**Лемма 9.** Пусть  $B$  обладает  $h$ -свойством и  $G$ -сохраняет  $A \subset E$ ,  $g \in \mathbb{G}(A)$ . Для любого автомата  $T \in [B]$  с  $n$  входами и любого отображения  $\pi : \mathbb{N} \rightarrow E_2^n$  из равенства  $g(a) = g(b)$  следует равенство

$$\begin{aligned} f_{h(T)}(\pi(g(a + h(T) - 1)), \dots, \pi(g(a))) = \\ = f_{h(T)}(\pi(g(b + h(T) - 1)), \dots, \pi(g(b))). \end{aligned} \quad (1)$$

**Доказательство.** Отображение  $\pi$  можно представить в виде  $\pi(a) = (\phi_1(a), \phi_2(a), \dots, \phi_n(a))$ . Для  $S = \{a, a + 1, \dots, a + h - 1, b, b + 1, \dots, b + h - 1\}$  из леммы 8 найдём  $\alpha_j \in A$ , где  $1 \leq j \leq n$ , такие, что для  $i \in S$  на  $i$ -ом месте в  $\alpha_j$  стоит  $\phi_j(g(i))$ .

Пусть  $\gamma = G_T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , тогда так как  $B$   $G$ -сохраняет  $A$ , то  $\gamma \in A$ . Так как  $g(a) = g(b)$ , то в  $\gamma$  на  $a$ -ом и  $b$ -ом местах стоит одно и то же. Если записать это равенство в явном виде, то мы и получим равенство 1.

Рассмотрим произвольное  $A \subset E$  и  $g \in \mathbb{G}(A)$ . Определим функцию  $u_A : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  следующим образом.  $u_A(k)$  — минимальное натуральное число  $l$  такое, что  $g(k + l) = g(k)$ . Если такого числа не существует, то считаем, что  $u_A(k) = \infty$ . Нетрудно убедиться, что функция  $u_A$  не зависит от выбора функции  $g$ , а зависит только от множества  $A$ . Далее мы докажем некоторые свойства функции  $u_A$ .

**Лемма 10.** Пусть  $B$  обладает  $h$ -свойством и  $G$ -сохраняет  $A \subset E$ ,  $g \in \mathbb{G}(A)$ . Если  $g(a) = g(b)$ ,  $g(a) \neq g(a + 1)$  и  $u_A(a + 1) \geq h$ , то для какого-то  $l \in \{b + 1, b + 2, \dots, b + h - 1\}$  выполняется  $g(l) = g(a + 1)$ .

**Доказательство.** Предположим, что это не так, докажем, что в этом случае  $B \subset L_1$ . Рассмотрим произвольный автомат  $T \in B$  с  $n$  входами и произвольные вектора  $\vec{a}, \vec{b} \in E_2^n$ .

Пусть отображение  $\pi : \mathbb{N} \rightarrow E_2^n$  такое, что  $\pi(i) = \vec{b}$ , если  $i = g(a + 1)$  и  $\pi(i) = \vec{a}$  иначе. Так как  $g(a) = g(b)$ , то мы можем записать равенство 1. Учитывая, что  $h(T) \leq h$ ,  $g(a) \neq g(a + 1)$ ,  $g(l) \neq g(a + 1)$

для  $l \in \{b+1, b+2, \dots, b+h\}$ , нетрудно убедиться, что равенство будет иметь вид:

$$f_{h(T)}(\vec{a}, \vec{a}, \dots, \vec{a}, \vec{a}, \vec{a}) = f_{h(T)}(\vec{a}, \vec{a}, \dots, \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}).$$

Следовательно,  $B \subset L_1$ , получили противоречие. Лемма доказана.

**Лемма 11.** Пусть  $B$  обладает  $h$ -свойством и  $G$ -сохраняет  $A \subset E$ . Тогда  $u_A(n+1) \leq u_A(n) + h - 1$  для любого  $n$ .

**Доказательство.** Рассмотрим произвольное  $g \in \mathbb{G}(A)$ . Если  $u_A(n) = \infty$  или  $u_A(n+1) < h$ , то неравенство очевидно. Пусть  $u_A(n) \neq 1$ ,  $u_A(n)$  конечно и  $u_A(n+1) \geq h$ . Применим лемму 10 к  $g(n) = g(n + u_A(n))$ . Получим, что для какого-то  $l \in \{n + u_A(n) + 1, n + u_A(n) + 2, \dots, n + u_A(n) + h - 1\}$  выполняется  $g(l) = g(n + 1)$ . Тогда  $u_A(n+1) \leq (l - (n+1)) \leq n + u_A(n) + h - 1 - (n+1) = u_A(n) + h - 2 < u_A(n) + h - 1$ .

Пусть  $u_A(n) = 1$ ,  $u_A(n+1) \geq h$ , докажем, что в этом случае  $[B] \subset L_2$ . Рассмотрим произвольный автомат  $T \in B$  с  $n$  входами и произвольные вектора  $\vec{a}, \vec{b} \in E_2^n$ .

Пусть отображение  $\pi : \mathbb{N} \rightarrow E_2^n$  такое, что  $\pi(i) = \vec{b}$ , если  $i = g(n)$  и  $\pi(i) = \vec{a}$  иначе. Так как  $g(n) = g(n + 1)$ , то мы можем записать равенство 1. Учитывая, что  $h(T) \leq h$ ,  $g(l) \neq g(n)$  для  $l \in \{a + 2, a + 3, \dots, a + h\}$ , нетрудно убедиться, что равенство будет иметь вид:

$$f_{h(T)}(\vec{a}, \vec{a}, \dots, \vec{a}, \vec{a}, \vec{b}) = f_{h(T)}(\vec{a}, \vec{a}, \dots, \vec{a}, \vec{b}, \vec{b}).$$

Следовательно,  $[B] \subset L_2$ , получили противоречие. Лемма доказана.

**Следствие 2.** Если  $u_A(n) \neq \infty$ , то  $u_A(m) \neq \infty$  для любого  $m \geq n$ . Если  $u_A(n) = \infty$ , то  $u_A(m) = \infty$  для любого  $m \leq n$ .

**Лемма 12.** Пусть  $B$  обладает  $h$ -свойством и  $G$ -сохраняет  $A \subset E$ . Пусть  $u_A(n) \neq \infty$ ,  $u_A(n + u_A(n)) \neq 1$ ,  $u_A(n) \geq h$ ,  $u_A(n + u_A(n) + 1) \geq h$  тогда существует  $l < h$  такое, что  $u_A(n + l) \leq u_A(n)$ , причём равенство допускается только при  $l = 1$ .

**Доказательство.** Рассмотрим произвольное  $g \in \mathbb{G}(A)$ . Так как  $u_A(n + u_A(n) + 1) \geq h$ ,  $u_A(n + u_A(n)) \neq 1$ , то можно применить лемму 10

к  $g(n + u_A(n)) = g(n)$ . Получим, что для какого-то  $l_0 \in \{n + 1, n + 2, \dots, n + h - 1\}$  имеет место  $g(l_0) = g(n + u_A(n) + 1)$ . А отсюда следует, что  $u_A(l_0) \leq (n + u_A(n) + 1 - (l_0)) \leq n + u_A(n) + 1 - (n + 1) = u_A(n)$ . При этом равенство возможно только, если  $l_0 = n + 1$ . Значит, для  $l = l_0 - n < h$  выполняется  $u_A(n + l) = u_A(l_0) \leq u_A(n)$ . Лемма доказана.

**Лемма 13.** Пусть  $B$  обладает  $h$ -свойством и  $G$ -сохраняет  $A \subset E$ ,  $g \in \mathbb{G}(A)$ . Если  $u_A(i) = s$  для любого  $i \geq k$ , то для любых  $f < g$ , таких, что  $g(f) = g(q)$ ,  $q - f$  делится на  $s$ .

**Доказательство.** Утверждение очевидно при  $s = 1$ , докажем его при  $s > 1$ . Предположим, что это не так. Можно считать, что  $f < k$ , иначе утверждение очевидно. Рассмотрим максимальное  $f_0 < k$  такое, что для некоторого  $q_0 > f_0$  выполняется  $g(f_0) = g(q_0)$ ,  $q_0 - f_0$  не делится на  $s$ .

Пусть  $s = 2$ , докажем, что в этом случае  $[B] \subset L_3$ . Рассмотрим произвольный автомат  $T \in B$  с  $n$  входами и произвольные вектора  $\vec{a}, \vec{b} \in E_2^n$ .

Пусть отображение  $\pi : \mathbb{N} \rightarrow E_2^n$  такое, что  $\pi(i) = \vec{b}$ , если для какого-то  $j$  выполняется  $f_0 < j < k + 2$ ,  $i = g(j)$ ,  $j - q_0$  делится на 2, и  $\pi(i) = \vec{a}$  иначе. Так как  $g(f_0) = g(q_0)$ , то мы можем записать равенство 1. Нетрудно убедиться, что равенство будет иметь вид:

$$f_{h(T)}(\dots, \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{b}) = f_{h(T)}(\dots, \vec{b}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}, \vec{b}).$$

Следовательно,  $[B] \subset L_3$ , получили противоречие.

Теперь пусть  $s > 2$ , рассмотрим множество  $D \subset E_2^s$ , состоящее из всех таких элементов  $\xi$ , у которых  $\xi((f_0 - k) \pmod{s} + 1) = \xi((q_0 - k) \pmod{s} + 1)$ . Нетрудно убедиться, что  $s$  и  $D$  определяют замкнутый класс  $R_s^D$ .

Покажем, что для любого автомата с  $n$  входами  $T \in B$  и для любых  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in D$  выполняется  $T(\alpha_1^\infty, \alpha_2^\infty, \dots, \alpha_n^\infty) = \eta^\infty$ , где  $\eta \in D$ .

Из леммы 8 следует, что можно подобрать такие  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in A$ , что  $\gamma_j(i) = \alpha_j((i - k) \pmod{s} + 1)$  при всех  $i \geq f_0$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Пусть  $G_T(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) = \zeta$ .  $B$   $G$ -сохраняет  $A$ , поэтому  $\zeta \in A$ . Нетрудно

получить, что  $\zeta(k+i) = \eta(i+1)$  для  $0 \leq i < s$ . Из соображений периодичности  $\zeta(f_0+i) = \zeta(f_0+j)$  для  $i = j \pmod{s}$  и  $f_0 \leq i < j$ . Но  $g(f_0) = g(q_0)$ , тогда  $\zeta(f_0) = \zeta(q_0)$ . Значит,  $\eta((f_0 - k) \pmod{s} + 1) = \eta((q_0 - k) \pmod{s} + 1)$  и  $\eta \in D$ . Мы доказали, что  $B \subset R_s^D$ , но по условию  $B$  обладает  $h$ -свойством. Получили противоречие, то есть мы показали, что для любых  $f < q$  таких, что  $g(f) = g(q)$ , число  $q - f$  делится на  $s$ .

**Лемма 14.** Пусть  $B$  обладает  $h$ -свойством и  $G$ -сохраняет  $A \subset E$ . Если  $u_A(n) \leq 2h^2$  для  $n \geq t$ , то существуют такие  $k \geq t$  и  $s$ , что  $u_A(i) = s$  для  $i = k, k+1, \dots, k+4h-1$ .

**Доказательство.** Рассмотрим произвольное  $g \in \mathbb{G}(A)$ . Покажем, что на множестве  $\{m, m+1, m+2, \dots\}$  функция  $g$  принимает не более  $2h^2$  различных значений. Предположим, что это не верно, тогда рассмотрим такое  $m_1 > t$ , что на множестве  $\{m, m+1, \dots, m_1-1\}$  функция  $g$  принимает более  $2h^2$  различных значений. Так как каждое значение обязательно повторяется, причём не более, чем через  $2h^2$ , то на множестве  $\{g(m_1+1), \dots, g(m_1+6h^4)\}$  каждое значение встречается по крайней мере  $\left\lfloor \frac{6h^4}{2h^2} \right\rfloor - 1 = 3h^2 - 1$  раз. А по предположению всего значений  $\geq 2h^2 + 1$ , тогда получаем неравенство  $(3h^2 - 1) * (2h^2 + 1) \leq 6h^4$ . Получили противоречие. Значит, на множестве  $\{m, m+1, m+2, \dots\}$  функция  $g$  принимает не более  $2h^2$  различных значений. Обозначим множество всех таких значений  $Z$ .

Для произвольного  $i$  рассмотрим слово  $g(i)g(i+1)\dots g(i+4h-1) \in Z^{4h}$ . Так как множество  $Z^{4h}$  конечно (в нём не более  $(2h^2)^{4h}$  различных элементов), то найдутся такие числа  $a, b \geq m$ , что  $0 < b - a \leq (2h^2)^{4h}$  и  $g(a+i) = g(b+i)$  для  $i = 0, 1, \dots, 4h-1$ . Пусть при этом  $b$  — минимальное число большее  $a$ , удовлетворяющее этому условию.

Пусть  $b - a = d$ , тогда  $d \leq (2h^2)^{4h}$ .  $C$  — множество слов  $\eta \in E_2^d$  таких, что для какого-то  $\gamma \in A$  выполняется  $\gamma(a+i) = \eta(i+1)$  при всех  $0 \leq i < d$ .

Так как  $P_2 \subset B$ , то для любых  $\eta_1, \eta_2 \in C$  слова  $\overline{\eta_1}, \eta_1 \vee \eta_2, \eta_1 \wedge \eta_2 \in C$ . Покажем, что для любого автомата с  $n$  входами  $T \in B$  и для любых  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in C$  выполняется  $T(\alpha_1^\infty, \alpha_2^\infty, \dots, \alpha_n^\infty) = \eta^\infty$ , где  $\eta \in$



$C$ . По определению существуют  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in A$ , такие, что  $\gamma_j(a + i) = \alpha_j(i + 1)$  при всех  $0 \leq i < d, 1 \leq j \leq n$ . Пусть  $G_T(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) = \zeta$ . Так как  $B$   $G$ -сохраняет  $A$ , то  $\zeta \in A$ . Все автоматы в  $B$  имеют высоту  $\leq h$ , поэтому из равенства  $g(a + i) = g(b + i)$  для  $0 \leq i < 4h$  следует, что  $\zeta(a + i) = \eta(i + 1)$  для  $0 \leq i < d$ . А значит,  $\eta \in C$ .

$d$  и  $C$  не определяют замкнутый класс, так как иначе  $B \subset R_d^C$ , а  $B$  по условию обладает  $h$ -свойством. Посмотрим, в каком случае  $d$  и  $C$  не определяют замкнутый класс. Это возможно, только если для любого  $l$  множество  $C$  вместе со словом с наименьшим периодом  $l$  содержит все слова периода  $l$ . Рассмотрим наибольшее  $l_1$  такое, что в  $C$  есть слово с наименьшим периодом  $l_1$ . Предположим, что  $l_1 < d$ . Тогда в  $C$  должно быть слово с наименьшим периодом  $l_2$ , не делящим  $l_1$ , иначе все слова в  $C$  имели бы период  $l_1$  и  $g(a + i) = g(a + l_1 + i)$  для  $i = 0, 1, \dots, 4h - 1$ , а  $b$  — минимальное число, обладающее этим свойством. Отсюда следует, что в  $C$  есть все слова периода  $l_1$  и  $l_2$ . Например,  $\zeta_1 = \underbrace{(100 \dots 00)}_{l_1}^{d/l_1}$  и  $\zeta_2 = \underbrace{(100 \dots 00)}_{l_2}^{d/l_2}$  принадлежат  $C$ . Но

наименьший период слова  $\zeta_1 \wedge \zeta_2 \in C$  больше  $l_1$ , что противоречит выбору  $l_1$ . Значит, в  $C$  есть слово с наименьшим периодом  $d$  и  $C = E_2^d$ . Тогда функция  $g$  ни на каких двух элементах  $\{a, a + 1, a + 2, \dots, b - 1\}$  не принимает одинакового значения. Отсюда сразу делаем вывод, что  $u_A(n) = d$  для  $n = a, a + 1, \dots, a + 4h - 1$ .

**Лемма 15.** Пусть  $B$  обладает  $h$ -свойством и  $G$ -сохраняет  $A \subset E$ . Тогда функция  $u_A$  удовлетворяет одному из следующих пунктов:

- 1)  $u_A(n) = \infty$  для любого  $n$ .
- 2) Существует  $m \geq 1$  такое, что  $u_A(n) = \infty$  для  $n < m$  и  $u_A(n) = s$  для  $n \geq m$ .

**Доказательство.** Рассмотрим произвольное  $g \in \mathbb{G}(A)$ . Пусть  $s$  — минимум  $u_A(n)$ . Если  $s = \infty$ , то это первый случай. Иначе, если  $s > h$ , рассмотрим минимальное  $n_0$  такое, что  $u_A(n_0) = s$ . Так как  $u_A(n_0 + u_A(n_0)) \geq s > h > 1$ , то из леммы 12 следует, что для какого-то  $1 \leq l < h$  выполняется  $u_A(n_0 + l) \leq u_A(n_0) = s$ . Но  $s$  — минимум  $u_A(n)$ , значит,  $u_A(n_0 + l) = u_A(n_0)$  и  $l = 1$ . Аналогично применим лемму 12 к  $n_0 + 1$ , и так далее. Получим, что  $u_A(n) = s$  для любого  $n \geq$

$n_0$ . Если  $n_0 = 1$ , то это 2-ой пункт. Пусть  $n_0 > 1$ , тогда  $u_A(n_0 - 1) > s$ . Предположим, что  $u_A(n_0 - 1) \neq \infty$ . Пусть  $n_1 = n_0 - 1$ . Так как  $n_1 + u_A(n_1) - s > n_0$ , то  $u_A(n_1 + u_A(n_1) - s) = s$ . Тогда  $g(n_1 + u_A(n_1) - s) = g(n_1 + u_A(n_1)) = g(n_1)$ , а значит,  $n_1$  и  $n_1 + u_A(n_1) - s$  эквивалентны. Но по определению  $u_A$ , число  $n_1 + u_A(n_1) - s$  — минимальное число большее  $n_1$  такое, что  $g(n_1 + u_A(n_1)) = g(n_1)$ . Получили противоречие, значит,  $u_A(n_0 - 1) = \infty$ . По следствию 2  $u_A(n) = \infty$  для любого  $n < n_0$ , значит, функция  $u_A$  относится ко 2-ому пункту.

Теперь пусть  $s \leq h$ , а  $n_0$  — минимальное число такое, что  $u_A(n_0) \leq h$ . Будем строить последовательность  $n_0, n_1, n_2, \dots$  так, чтобы  $u_A(n_i) \leq 2h - 1$ , а также  $n_i - n_{i-1} \leq 2h$ . Покажем, что её можно построить. Пусть мы уже построили  $n_0, \dots, n_r$ . Если  $u_A(n_r) \leq h$ , то из леммы 11 следует, что в качестве  $n_{r+1}$  можно взять  $n_r + 1$ . Если  $u_A(n_r + u_A(n_r) + 1) < 2h$ , то в качестве  $n_{r+1}$  можно взять  $n_r + u_A(n_r) + 1$ . Если  $u_A(n_r + u_A(n_r)) = 1$ , то в качестве  $n_{r+1}$  можно взять  $n_r + u_A(n_r)$ . Если  $u_A(n_r) > h$  и  $u_A(n_r + u_A(n_r) + 1) \geq 2h > h$ , то можно воспользоваться леммой 12 и в качестве  $n_{r+1}$  взять  $n_r + l$ . Мы получим, что  $u(n_{r+1}) = u_A(n_r + l) \leq u_A(n_r) < 2h$ . Таким образом, последовательность построена. Рассмотрим произвольное  $n > n_0$ . Существует  $n_i$  такое, что  $n - n_i < 2h$ , и из леммы 11 следует, что  $u_A(n_i + j + 1) \leq u_A(n_i + j) + h - 1$ . А значит,  $u_A(n) \leq u_A(n_i) + (h - 1) * (n - n_i) \leq 2h^2$ . То есть мы доказали, что для любого  $n \geq n_0$  выполняется  $u_A(n) \leq 2h^2$ .

Теперь покажем, что для какого-то  $m_1$  выполняется  $u_A(n) = s_0$  для любого  $n > m_1$ . Предположим, что это не так, тогда построим три последовательности  $a_1, a_2, \dots$ ,  $b_1, b_2, \dots$  и  $s_1, s_2, \dots$ . По лемме 14 существует минимальное  $a_1 \geq n_0$  такое, что существуют  $b_1$  и  $s_1$ , для которых  $b_1 \geq a_1 + 4h$ ,  $u_A(a_1 - 1) \neq s_1$ ,  $u_A(b_1) \neq s_1$ ,  $u_A(j) = s_1$  для  $j = a_1, a_1 + 1, \dots, b_1 - 1$ . Аналогично рассмотрим минимальное  $a_2 > a_1$  такое, что существуют  $b_2$  и  $s_2$  для которых  $b_2 \geq a_2 + 4h$ ,  $u_A(a_2 - 1) \neq s_2$ ,  $u_A(b_2) \neq s_2$ ,  $u_A(j) = s_2$  для  $j = a_2, a_2 + 1, \dots, b_2 - 1$ . И так далее, построим три последовательности. Из леммы 14 следует, что такие последовательности существуют, причём они бесконечны. Для любого  $i$  рассмотрим наибольшее  $n_j$  такое, что  $a_i \leq n_j < b_i$ . Оно очевидно найдется. Но  $u_A(n_j) \leq 2h - 1$ , значит  $s_i \leq 2h - 1$  для любого  $i$ .

Рассмотрим произвольный  $i$ -ый кусок. Для любого  $\alpha \in A$  его элементы от  $a_i$ -ого до  $(b_i + s_i - 1)$ -ого повторяются с периодом  $s_i$ . Из каждого сверхслова из  $A$  удалим  $s_i$  элементов от  $a_i$ -ого до  $a_i + s_i - 1$ -ого. Получим множество  $A' \subset E$ . Так как все автоматы из  $B$  имеют высоту  $\leq h$ , а кусок имеет длину большую  $4h + s_i - 1 > s_i + h$ , то  $B$   $G$ -сохраняет  $A'$ . Посмотрим, чем отличается функция  $u_{A'}$  от функции  $u_A$ . Для  $t \geq a_i$  очевидно, что  $u_{A'}(t) = u_A(t + s_i)$ . Для  $t < a_i$  понятно, что  $u_A(t)$  может отличаться от  $u_{A'}(t)$ , только если  $u_A(t) > 4h$ . При этом  $u_{A'}(t) > 4h$ , а также  $u_{A'}(a_i - 1) \neq s_i$ . Покажем, что после удаления этого куска не может появиться новый периодический кусок. Предположим, что это не так и кусок от  $a_0 \geq n_0$  до  $b_0$  с периодом  $s_0$  появился (возможно  $b_0 = \infty$  и кусок бесконечный).  $s_0 \leq 2h - 1$ , так как всё, доказанное нами для  $A$ , верно и для  $A'$ . Если  $a_0 \geq a_i$ , то этому куску соответствует, кусок от  $a_0 + s_i$  до  $b_0 + s_i$  в  $A$ . Для  $a_0 \leq l < b_0$  число  $u_{A'}(l) = s_0 \leq 2h - 1 \leq 4h$ , поэтому если  $b_0 \leq a_i$ , то этому куску соответствует, кусок от  $a_0$  до  $b_0$  в  $A$ . Иначе  $a_0 < a_i < b_0$ , но  $u(A')(a_i - 1) \neq s_i$ , а  $u(A')(a_i) = u(A)(a_i + s_i) = s_i$ . Получили противоречие, следовательно новых кусков появиться не могло. Теперь удалим из каждого куска  $s_i$  элементов ровно столько раз, чтобы длина куска была меньше, чем  $4h + s_i$ , но больше, чем  $4h - 1$ . В оставшемся от  $A$  множестве уже не будет периодических кусков длины больше, чем  $4h + s_i - 1$ , так как при удалении элементов новые периодические куски появиться не могли. Но это невозможно, так как оставшееся от  $A$  множество не удовлетворяет лемме 14. Получили противоречие. То есть мы доказали, что для какого-то  $m_1$  выполняется  $u_A(n) = s_0$  для любого  $n > m_1$ .

Рассмотрим минимальное  $m_2$  такое, что  $u_A(n) = s_0$  для любого  $n \geq m_2$ . Если  $m_2 = 1$ , то это 2-ой пункт. Пусть  $m_2 > 1$ , покажем, что  $u_A(m_2 - 1) = \infty$ . Предположим, что это не так. Число  $u_A(m_2 - 1)$  не равняется  $s_0$ , но по лемме 13 делится на  $s_0$ . Значит,  $u_A(m_2 - 1) > s_0$ . Но  $u_A(n) = s_0$  для любого  $n \geq m_2$ . Значит,  $g(m_2 - 1 + u_A(m_2 - 1) - s_0) = g(m_2 - 1 + u_A(m_2 - 1)) = g(m_2 - 1)$ . Но по определению  $m_2 - 1 + u_A(m_2 - 1) - s_0$  — минимальное число, для которого  $g(m_2 - 1 + u_A(m_2 - 1)) = g(m_2 - 1)$ . Получили противоречие, значит,  $u_A(m_2 - 1) = \infty$ . По следствию 2  $u_A(n) = \infty$  для любого  $n < m_2$ , значит, функция  $u_A$  относится ко 2-ому пункту. Лемма доказана.

Теперь перейдём к доказательству основной леммы.

**Лемма 16.** Пусть  $P_2 \subset B$ ,  $B \subset \mathcal{P}_a^h$ , и  $B$  не является подмножеством  $L_1, L_2, L_3, L_4$  и  $R_d^C$  для  $d < (2h^2)^{4h}$ . Тогда существует автомат с одним входом  $W \in [B]$  такой, что  $f_{h(W)}(a_1, \dots, a_{h(W)-1}, a_{h(W)}) = a_{h(W)-1}$  для любых  $a_1, \dots, a_{h(W)} \in E_2$ .

**Доказательство.** Предположим, что это не так, тогда из леммы 6 найдём  $\alpha$  и  $\beta$  из  $E$ , не отличимые множеством  $[B]$ , такие, что  $\alpha(1) = \beta(1)$  и  $\alpha(2) \neq \beta(2)$ .

Рассмотрим  $A \subset E^2$  — множество пар  $(\gamma, \delta) \in E^2$ , для каждой из которых существует автомат  $T \in [B]$  с одним входом такой, что  $G_T(\alpha) = \gamma$  и  $G_T(\beta) = \delta$ . Будем говорить, что  $B$   $G$ -сохраняет  $A \subset E^2$ , если для любого автомата  $T \in B$  с  $n$  входами и любых  $(\gamma_1, \delta_1), (\gamma_2, \delta_2), \dots, (\gamma_n, \delta_n) \in A$  выполняется  $(G_T(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n), G_T(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)) \in A$ . Пусть  $A_1$  — множество таких  $\gamma$ , что для какого-то  $\delta$  выполняется  $(\gamma, \delta) \in A$ , аналогично,  $A_2$  — множество таких  $\delta$ , что для какого-то  $\gamma$  выполняется  $(\gamma, \delta) \in A$ . Полностью аналогично лемме 7 легко доказать, что  $B$   $G$ -сохраняет  $A$ .

Пусть  $\mathbb{N}_1 = \{1, 2, 3, \dots\}$  и  $\mathbb{N}_2 = \{1', 2', 3', \dots\}$  — два непересекающихся множества, изоморфных множеству натуральных чисел. Рассмотрим их объединение  $\tilde{\mathbb{N}} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$ , то есть  $\tilde{\mathbb{N}} = \{1, 2, 3, \dots, 1', 2', 3', \dots\}$ . На множестве  $\tilde{\mathbb{N}}$  введем отношение частичного порядка. На множествах  $\mathbb{N}_1$  и  $\mathbb{N}_2$  порядок естественный, а между собой элементы этих множеств не сравнимы. Каждому элементу  $E^2$  можно естественным образом сопоставить подмножество  $\tilde{\mathbb{N}}$ , а множеству  $A$  систему  $\tilde{A}$  подмножеств  $\tilde{\mathbb{N}}$ . Другими словами все элементы  $(\gamma, \delta)$  пронумерованы элементами множества  $\tilde{\mathbb{N}}$ . И множеству  $C \subset \tilde{\mathbb{N}}$  соответствует  $(\gamma, \delta)$ , если для любого  $i \in \tilde{\mathbb{N}}$  число  $i \in C$  тогда и только тогда, когда на  $i$ -ом месте в  $(\gamma, \delta)$  стоит 1.

Так как в  $[B]$  есть конъюнкция, дизъюнкция, отрицание, то для любых  $C_1, C_2 \in \tilde{A}$  множества  $C_1 \cap C_2, C_1 \cup C_2, \tilde{\mathbb{N}} \setminus C_1 \in \tilde{A}$ . Но  $\mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$  изоморфно  $\tilde{\mathbb{N}}$ , значит, по лемме 2  $\tilde{\mathbb{N}} = M_1 \sqcup M_2 \sqcup M_3 \sqcup \dots$ . Другими словами это означает, что мы разбили множество  $\tilde{\mathbb{N}}$  на классы эквивалентности, при этом если  $i$  эквивалентно  $j$ , а  $(\gamma, \delta) \in A$ , то в  $(\gamma, \delta)$  на  $i$ -ом и  $j$ -ом местах стоит одно и то же. Рассмотрим отображение  $\tilde{g}: \tilde{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$  такое, что  $\tilde{g}(k) = l$ , если  $k \in M_l$ . Нетрудно убедиться, что

если ограничить функцию  $\tilde{g}$  на множество  $\mathbb{N}_1(\mathbb{N}_2)$ , то мы получим функцию  $g_1 \in \mathbb{G}(A_1)$  ( $g_2 \in \mathbb{G}(A_2)$ ).

Так как  $\alpha$  и  $\beta$  не отличимы множеством  $B$ , то для любого  $(\gamma, \delta) \in A$  выполняется  $\gamma(1) = \delta(1)$ . А значит,  $\tilde{g}(1) = \tilde{g}(1')$ . Но  $\tilde{g}(2) \neq \tilde{g}(2')$ , так как  $\alpha(2) \neq \beta(2)$ .

Аналогично лемме 9, легко доказать, что для любого автомата  $T \in [B]$  с  $n$  входами и любого отображения  $\pi : \tilde{\mathbb{N}} \rightarrow E_2^n$  из равенства  $\tilde{g}(a) = \tilde{g}(b)$  следует равенство

$$\begin{aligned} f_{h(T)}(\pi(\tilde{g}(a + h(T) - 1)), \dots, \pi(\tilde{g}(a))) = \\ = f_{h(T)}(\pi(\tilde{g}(b + h(T) - 1)), \dots, \pi(\tilde{g}(b))). \quad (2) \end{aligned}$$

Определим функцию  $\tilde{u} : \tilde{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$  следующим образом.  $\tilde{u}(k)$  — минимальное натуральное число  $l$  такое, что  $\tilde{g}(k+l) = \tilde{g}(k)$ . Если такого числа не существует, то считаем, что  $\tilde{u}(k) = \infty$ . Нетрудно убедиться, что если ограничить функцию  $\tilde{u}$  на множество  $\mathbb{N}_1(\mathbb{N}_2)$  то мы получим функцию  $u_{A_1}$  ( $u_{A_2}$ ).

Без изменений останется лемма 10: если  $\tilde{g}(a) = \tilde{g}(b)$ ,  $\tilde{g}(a) \neq \tilde{g}(a+1)$  и  $\tilde{u}(a+1) \geq h$ , то для какого-то  $l \in \{b+1, b+2, \dots, b+h-1\}$  выполняется  $\tilde{g}(l) = \tilde{g}(a+1)$ .

Воспользуемся леммой 15 для  $u_{A_1}$  и  $u_{A_2}$ , и объединим результаты. Получим, что возможны следующие случаи:

- 1)  $u_{A_1}(n_1) = \infty$  для любого  $n_1 \in \mathbb{N}_1$  и  $u_{A_2}(n_2) = \infty$  для любого  $n_2 \in \mathbb{N}_2$ .
- 2)  $u_{A_1}(n_1) = \infty$  для любого  $n_1 \in \mathbb{N}_1$ . Существуют  $m_2$  и  $s$  такие, что  $u_{A_2}(n_2) = \infty$  для  $n_2 < m_2$  и  $u_{A_2}(n_2) = s$  для  $n_2 \geq m_2$ ,
- 3)  $u_{A_2}(n_2) = \infty$  для любого  $n_2 \in \mathbb{N}$ . Существует  $m_1$  и  $s$  такие, что  $u_{A_1}(n_1) = \infty$  для  $n_1 < m_1$  и  $u_{A_1}(n_1) = s$  для  $n_1 \geq m_1$ ,
- 4) Существуют  $m_1, m_2, s_1$  и  $s_2$  такие, что  $u_{A_1}(n_1) = \infty$  для  $n_1 < m_1$  и  $u_{A_1}(n_1) = s_1$  для  $n_1 \geq m_1$ ,  $u_{A_2}(n_2) = \infty$  для  $n_2 < m_2$  и  $u_{A_2}(n_2) = s_2$  для  $n_2 \geq m_2$ ,

Разберём эти случаи.

- 1)  $\tilde{g}(1') = \tilde{g}(1)$ , поэтому из леммы 10 следует, что для какого-то  $l_{2'} > l_{1'} = 1$  выполняется  $\tilde{g}(2') = \tilde{g}(l_{2'})$ . Снова применим лемму 10 к  $\tilde{g}(2') = \tilde{g}(l_{2'})$ , получим, что для какого-то  $l_{3'} > l_{2'}$  выполняется  $\tilde{g}(l_{3'}) = \tilde{g}(3')$ . И так далее получим, что для любого  $n \in \mathbb{N}_2$  существует  $l_n \in \mathbb{N}_1$  такое, что  $\tilde{g}(l_n) = \tilde{g}(n)$ . Теперь применим лемму 10 к  $\tilde{g}(1) = \tilde{g}(1')$ , Получим, что для какого-то  $t \in \mathbb{N}_2$  выполняется  $\tilde{g}(t) = \tilde{g}(2)$ . Но тогда  $\tilde{g}(l_t) = \tilde{g}(2)$  и  $\tilde{u}(2) \neq \infty$ , противоречие, значит, первый случай разобран.
- 2)-3) Второй и третий случаи эквивалентны, поэтому рассмотрим только второй. Рассмотрим наибольшее  $t \in \mathbb{N}_1$  такое, что для какого-то  $t' \in \mathbb{N}_2$  выполняется  $\tilde{g}(t) = \tilde{g}(t')$ . Очевидно такое найдётся, так как на  $\mathbb{N}_1$  функция  $\tilde{g}$  принимает бесконечное количество значений, а на  $\mathbb{N}_2$  — конечное. Применим лемму 10 к  $\tilde{g}(t) = \tilde{g}(t')$ . Тогда найдётся  $l > t'$  такое, что  $\tilde{g}(l) = \tilde{g}(t + 1)$ . Но мы выбрали максимальное  $t$ , противоречие, значит, второй и третий случаи разобраны.
- 4) Пусть  $F_1 = \{g_1(m_1), g_1(m_1 + 1), \dots, g_1(m_1 + s_1 - 1)\}$  и  $F_2 = \{g_2(m_2), g_2(m_2 + 1), \dots, g_2(m_2 + s_2 - 1)\}$ . Покажем, что возможны 3 случая:
- $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ .
  - Существуют  $t_1 \geq m_1$  и  $t_2 \geq m_2$  такие, что  $g_1(t_1) = g_2(t_2)$ ,  $g_1(t_1 + 1) \neq g_2(t_2 + 1)$ .
  - Существуют  $t_1 \in \mathbb{N}_1$  и  $t_2 \in \mathbb{N}_2$  такие, что  $g_1(t_1 + i) = g_2(t_2 + i)$  для  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ .

Пусть множества  $F_1$  и  $F_2$  пересекаются, рассмотрим произвольные  $t_1 \geq m_1$  и  $t_2 \geq m_2$  такие, что  $g_1(t_1) = g_2(t_2)$ . Рассмотрим минимальное  $i \in \mathbb{N}$  такое, что  $g_1(t_1 + i) \neq g_2(t_2 + i)$ . Если оно найдётся, то это случай б), иначе случай в).

Осталось рассмотреть случаи а)–в).

- Введём на множестве пар отношение частичного порядка. Будем говорить, что  $(a, b) \leq (c, d)$ , если  $a \leq b$  и  $c \leq d$ . Рассмотрим любую максимальную пару  $(t_1, t_2)$  такую что  $g_1(t_1) = g_2(t_2)$ . Очевидно, что она найдётся. При этом или  $t_1 < m_1$ , или  $t_2 < m_2$ . Для определённости будем считать, что  $t_1 < m_1$ . Пусть отображение  $\pi : \tilde{\mathbb{N}} \rightarrow E_2^n$  такое, что

$\pi(i) = \vec{b}$ , если  $i = \tilde{g}(j)$  для какого-то  $j > t_1$  и  $\pi(i) = \vec{a}$  иначе. Так как  $g_1(t_1) = g_2(t_2)$ , то для произвольного автомата  $T \in B$  мы можем записать равенство 2. Учитывая, что пара  $(t_1, t_2)$  максимальная, нетрудно убедиться, что равенство будет иметь вид:

$$f_{h(T)}(\vec{b}, \vec{b}, \dots, \vec{b}, \vec{b}, \vec{a}) = f_{h(T)}(\vec{a}, \vec{a}, \dots, \vec{a}, \vec{a}, \vec{a}).$$

А значит,  $[B] \subset L_4$ , получили противоречие, следовательно, случай а) полностью разобран.

- б) Для определённости будем считать, что  $s_1 \leq s_2$ . Пусть  $A'$  — множество пар  $(\gamma, \delta)$  таких, что для каких-то  $\eta_1 \in E_2^{t_1}$  и  $\eta_2 \in E_2^{t_2}$  выполняется  $(\eta_1\gamma, \eta_2\delta) \in A$  и  $\gamma \in \{0^\infty, 1^\infty\}$ . Так как пары такого вида переходят в пары такого вида, то  $B$   $G$ -сохраняет  $A'$ . Аналогично тому, как мы строили  $A_1$  и  $A_2$  построим  $A'_1 \subset E$  и  $A'_2 \subset E$ . Очевидно, что  $B$   $G$ -сохраняет  $A'_2$  и к нему можно применить лемму 15.

Если  $A'_2$  имеет период  $s_2 > 1$ , то  $|F_1 \cap F_2| = 1$ . И  $A'$  состоит из всех пар  $(a^\infty, \delta^\infty)$  таких, что  $\delta \in E_2^{s_2}$ ,  $\delta(1) = a$ . Рассмотрим замкнутый класс  $R_{s_2}^C$ , где  $C$  состоит из всех слов вида  $aa\gamma$ . Покажем, что  $B \subset R_{s_2}^C$ . Рассмотрим произвольный автомат  $T \in B$  с  $n$  входами и произвольные  $a_1, a_2, \dots, a_n \in E_2, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in E_2^{s_2-2}$  и докажем, что  $G_T((a_1a_1\alpha_1)^\infty, (a_2a_2\alpha_2)^\infty, \dots, (a_na_n\alpha_n)^\infty) = (cc\delta)^\infty$  для каких-то  $c \in E_2$  и  $\delta \in E_2^{s_2-2}$ . Пусть

$$\begin{aligned} G_T(a_1^\infty, a_2^\infty, \dots, a_n^\infty) &= c^\infty, \\ G_T((a_1a_1\alpha_1)^\infty, (a_2a_2\alpha_2)^\infty, \dots, (a_na_n\alpha_n)^\infty) &= \epsilon^\infty, \\ G_T((a_1\alpha_1a_1)^\infty, (a_2\alpha_2a_2)^\infty, \dots, (a_n\alpha_na_n)^\infty) &= \zeta^\infty, \end{aligned}$$

где  $\epsilon, \zeta \in E_2^{s_2}$ . Так как  $B$   $G$ -сохраняет  $A'$ , то  $(c^\infty, \epsilon^\infty), (c^\infty, \zeta^\infty) \in A'$ . А это значит, что  $c = \epsilon(1) = \zeta(1)$ , но  $\epsilon(2) = \zeta(1)$ , тогда  $\epsilon(1) = \epsilon(2)$  и  $\epsilon \in C$ . То есть  $T \in R_{s_2}^C$  и  $B \subset R_{s_2}^C$ . Противоречие.

Значит,  $A'_2$  имеет период 1 и  $F_1 = F_2$ . Тогда  $s_1 = s_2$ . Рассмотрим  $A'' \subset E$  — множество элементов  $\gamma$  таких, что для каких-то  $\eta_1 \in E_2^{t_1-1}$  и  $\eta_2 \in E_2^{t_2-1}$  выполняется  $(\eta_1\gamma, \eta_2\gamma) \in A$ . нетрудно убедиться, что  $B$   $G$ -сохраняет

$A''$ . Так как  $F_1 = F_2$ , то для какого-то  $l > 1$  выполняется  $g_1(t_1 + l) = g_2(t_2 + 1)$ . Очевидно,  $(10^{s_1-1})^\infty \in A''$ , а  $(0^l 10^{s_1-l-1})^\infty \notin A''$ . Но по лемме 15 множество  $A''$  состоит из все сверхслов с определённым периодом, который очевидно делит  $s_1$ . Получили противоречие. Значит, случай б) полностью разобран.

- в) Очевидно  $s_1 = s_2 = s$  и  $F_1 = F_2$ . Покажем, что для любого  $l_1 \in \mathbb{N}_1$  существует  $l_2 \in \mathbb{N}_2$  такое, что  $g_1(l_1) = g_2(l_2)$ . Предположим, что это не так, тогда рассмотрим минимальное такое  $l_1 \in \mathbb{N}_1$ , что для любого  $i \in \mathbb{N}_2$  выполняется  $g_1(l_1 + 1) \neq g_2(i)$ . Так как  $l_1$  — минимальное, то для какого-то  $l_2 \in \mathbb{N}_2$  выполняется  $g_1(l_1) = g_2(l_2)$ . Если  $u_{A_1}(l_1 + 1) \geq h$ , то воспользуемся леммой 10, получим, что для какого-то  $k \in \mathbb{N}_2$  имеет место равенство  $g_1(l_1 + 1) = g_2(k)$ , что противоречит выбору  $l_1$ . Если же  $u_{A_1}(l_1 + 1) < h$ , то  $g_1(l_1 + 1) \in F_1$ ,  $g_1(l_1 + 1) \in F_2$ . Но мы предполагали, что для любого  $i \in \mathbb{N}_2$  выполняется  $g_1(l_1 + 1) \neq g_2(i)$ . Получили противоречие, значит, для любого  $l_1 \in \mathbb{N}_1$  существует  $l_2 \in \mathbb{N}_2$  такое, что  $g_1(l_1) = g_2(l_2)$ . Аналогично наоборот: для любого  $l_2 \in \mathbb{N}_2$  существует  $l_1 \in \mathbb{N}_1$  такое, что  $g_1(l_1) = g_2(l_2)$ . Отсюда в частности следует, что  $m_2 = (m_1)'$ , а так как  $\tilde{g}(2) \neq \tilde{g}(2')$ , то  $m_1 > 1$ .

Для всех  $1 \leq i \leq m_1$  найдём  $l_i \in \mathbb{N}_2$  такое, что  $g_1(i) = g_2(l_i)$ . Пусть множество  $D_i \subset E$  состоит из таких элементов  $\delta$ , что для каких-то  $\gamma \in E_2^{i-1}$  и  $a \in E_2$  выполняется  $(\gamma a^\infty, \delta) \in A$ . Так как  $B$   $G$ -сохраняет  $D_i$  для любого  $i$ , то мы можем применить к  $D_i$  лемму 15. Из неё следует, что множество  $\{g_1(i+1), g_1(i+2), \dots, g_1(m_1-1)\}$  совпадает с  $\{g_2((i)'+1), g_2((i)'+2), \dots, g_2((m_1)'-1)\}$ . Для  $i = m_1 - 1$  это означает, что  $g_1(m_1 - 1) = g_2((m_1)' - 1)$ . Далее для  $i = m_1 - 2$  получаем  $\{g_1(m_1 - 2), g_1(m_1 - 1)\} = \{g_2((m_1)' - 2), g_2((m_1)' - 1)\}$ , а значит,  $g_1(m_1 - 2) = g_2((m_1)' - 2)$ . И так далее, получим, что  $g_2((i)') = g_1(i)$  для любого  $i$ . Для  $i = 2$  получим  $g_1(2) = g_2(2')$ . Получили противоречие, значит, случай в) полностью разобран и лемма доказана.



**Доказательство теоремы 2.** Необходимость следует из теоремы 1. Докажем достаточность. Для  $h = 1$  утверждение теоремы очевидно. Рассмотрим случай  $h \geq 2$ .

Предположим, что  $B \subset M_{pq}$  для некоторого  $q > 2h$ . Если  $p > h$ , то  $B \subset M_{h, h+q-p}$ . Если  $p \leq h$ , то  $B \subset M_{p, 2h}$ . Получаем противоречие с условием теоремы. Следовательно,  $B \not\subset M_{pq}$  для  $q > 2h$ .

$B \not\subset S_p$  для  $p > h$ , так как иначе  $B \subset S_h$ , что противоречит условию теоремы.

Из леммы 16 следует, что существует автомат с одним входом  $W \in [B]$  такой, что

$$f_u(a_1, \dots, a_{u-1}, a_u) = a_{u-1}$$

для любых  $a_1, \dots, a_u \in E_2$ , где  $u$  — высота автомата  $W$ .

Из леммы 4 следует, что существует  $N > u$  и автомат  $S_{uN} \in [B]$  такой, что

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 1 \leq t \leq u, \\ 1, & t > N. \end{cases}$$

Из леммы 3 следует, что для любого  $i$  существует автомат  $T_{iN} \in [B]$  такой, что

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 1 \leq t \leq N, t \neq i, \\ 1, & t = i. \end{cases}$$

Из леммы 5 следует, что для любого  $i$  существует автомат  $U_i \in [B]$  такой, что  $y(i) = x(i-1)$ . Автомат  $T_{iN} \& U_i(x)$  в  $i$  момент времени работает как единичная задержка, а в остальные моменты времени  $\leq N$  возвращает 0. Далее автомат  $\bigvee_{i=2}^N (T_{iN} \& U_i(x))$  работает как единичная задержка в моменты времени  $\leq N$ , а автомат  $W(x)$  работает как единичная задержка, начиная с момента времени  $u$ . Осталось сделать так, чтобы сначала работал первый автомат, а потом второй. Воспользуемся для этого автоматом  $S_{uN}$  и получим автомат  $R = (\overline{S_{uN}} \& \bigvee_{i=2}^N (T_{iN} \& U_i)) \vee (S_{uN} \& W)$ , который реализует единичную задержку. Так как  $P_2 \subset B$  и  $R \in [B]$ , то  $[B] = \mathcal{P}_a$ . Теорема доказана.

### Список литературы

- [1] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.
- [2] Кратко М. И. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов // ДАН СССР. 1964. Т. 155.
- [3] Бабин Д. Н. Разрешимый случай задачи о полноте автоматных функций // Дискретная математика. № 4. 1992.
- [4] Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. М.: Наука, 1990.
- [5] Берж К. Теория графов и её применения. М.: ИЛ, 1962.