О сложности вложения графов

Д. В. Зайцев

1. Введение

В работе изучается сложность универсальных графов, которые позволяют получать графы заданных классов в качестве подграфов, порождённых подмножествами их вершин. Универсальные графы могут быть интересны в связи со сжатием информации, а также при проектировании чипов. Получены порядки минимального числа вершин графов, универсальных для двух классов графов, у которых вершины помечены натуральными числами. Первый класс состоит из неориентированных, необязательно связных графов, не имеющих петель и кратных рёбер, второй состоит из неориентированных деревьев.

2. Основные определения и результаты

Пусть W — класс графов без петель и кратных рёбер, необязательно связных, у которых вершины помечены натуральными числами. Несколько вершин могут иметь одинаковую пометку.

Пусть $U \in W$ — некоторый граф с N вершинами. Для любого подмножества M вершин графа U порождённым (индуцированным) подграфом $\langle M \rangle$ называется подграф графа G, множеством вершин которого является M, и множество рёбер состоит из всех рёбер графа U, у которых оба конца принадлежат M [2]. Иначе говоря, две вершины из M смежны в $\langle M \rangle$ тогда и только тогда, когда они смежны в U.

Пусть задан некоторый класс графов $V \subset W$, в графах которого разные вершины имеют разные пометки. Будем рассматривать два вида универсальности графов. Договоримся обозначать универсальность первого вида одним штрихом, второго — двумя. Граф $U' \in W$ называется универсальным для класса V, если он обладает следующим свойством: для любого графа G из класса V можно указать подмножество вершин M графа U' такое, что этим подмножеством порождается граф $\langle M \rangle$ изоморфный графу G. Теперь определим универсальность графа второго вида, которую будем называть также λ-универсальностью. Пусть $m = |M|$, и пусть λ — целое число такое, что $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{m(m-1)}{2}$. Пусть E_M — подмножество множества неупорядоченных пар различных вершин из M, $|E_M| = \lambda$. E_M определяет места, где можно добавлять рёбра после задания M. Граф U'' называется λ-универсальным для класса V, если для любого графа $G \in V$ существует подмножество вершин M графа U'' и подмножество E_M такие, что в порождённый граф $\langle M \rangle$ достаточно добавить не более λ рёбер, чтобы граф $\langle M \rangle$ стал изоморфным G, причём пары концов этих рёбер должны принадлежать E_M. Изоморфизм графов рассматривается с учётом пометок вершин.

Заметим, что вторая постановка даёт большее возможностей выбора универсального графа, так как накладывает менее жёсткие ограничения благодаря возможности добавлять недостающие рёбра в порождаемые подграфы.

Далее, определим функции сложности задания класса графов для каждого из двух видов универсальности. Назовём универсальный граф минимальным, если он имеет минимальное количество вершин среди универсальных графов для данного класса. Сложностью задания класса графов назовём количество вершин в минимальном универсальном графе для данного класса.

Пусть $K \subset V$ — класс m-вершинных неориентированных графов, у которых вершины помечены числами из множества $\{1, \ldots, m\}$. Обозначим через $N_K(m)$ сложность задания класса K с помощью универсального графа первого вида. Обозначим через $N_K(m, \lambda)$ сложность задания класса K с помощью λ-универсального графа.

Пусть $T \subset V$ — класс m-вершинных неориентированных помеченных деревьев с пометками из множества $\{1, \ldots, m\}$. Обозначим через $N_T(m)$ сложность задания класса T универсальным графом первого вида.

Теорема 1. *Для любого $m > 0$, для класса K можно построить минимальный по порядку универсальный граф U'_K и $N_K(m) \asymp m2^{\frac{m}{2}}$ при $m \to +\infty$.*

Теорема 2. *Для любых целых m и λ таких, что $0 < m$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{m(m-1)}{2}$, для класса K можно построить минимальный по порядку λ-универсальный граф U''_K и $N_K(m, \lambda) \asymp m2^{\frac{m}{2}-\frac{\lambda}{m}}$ при $m \to +\infty$.*

Теорема 3. *Для любого $m > 0$, для класса T можно построить минимальный по порядку универсальный граф U'_T и $N_T(m) \asymp m^2$ при $m \to +\infty$.*

3. Доказательство теоремы 1

Лемма 1. *Для любого $m > 0$ можно построить универсальный для класса K граф U'_K и*

$$N_K(m) \leqslant \begin{cases} m\, 2^{\frac{m-1}{2}} & m - \textit{неч.}, \\ \frac{3\sqrt{2}}{4} m\, 2^{\frac{m-1}{2}} & m - \textit{чёт.} \end{cases}$$

Доказательство. Построим граф U'_K, докажем его универсальность для класса K, подсчитаем количество вершин. Полученное число вершин будет являться верхней оценкой сложности $N_K(m)$, так как количество вершин в минимальном универсальном графе для класса K не больше данного.

Рассмотрим множество вершин P с пометками из множества $\{1, \ldots, m\}$. Множество P содержит m подмножеств вершин $P_1, \ldots, P_m$. Подмножество P_i $(i = 1, \ldots, m)$ определяется как подмножество вершин, которые имеют пометку i. Чтобы ссылаться на отдельные вершины множества P, упорядочим в рамках каждого подмножества вершины в произвольном порядке. Пусть t — натуральное число, $t \leqslant |P_i|$, тогда через $p(i,t)$ обозначим вершину из P_i с номером t.

Отдельно будем рассматривать случаи, когда m нечётно и чётно. Введём функцию

$$l(m,i) = \begin{cases} \frac{m-1}{2} & \text{при } m \text{ неч.}, \\ \left[\frac{m-1}{2}\right] & \text{при } m \text{ чёт.}, \quad i = 1, \ldots, \frac{m}{2}, \\ \left]\frac{m-1}{2}\right[& \text{при } m \text{ чёт.}, \quad i = \frac{m}{2}+1, \ldots, m. \end{cases}$$

Значение этой функции можно понимать как количество подмножеств, которые мы рассматриваем вместе с P_i в зависимости от четности m.

Введём функцию

$$I(i,j,m) = \begin{cases} i+j & i+j \leqslant m, \\ i+j-m & i+j > m. \end{cases}$$

Когда j пробегает $\{1,\ldots,l(m,i)\}$, значение $I(i,j,m)$ пробегает номера подмножеств, которые мы рассматриваем вместе с P_i.

Пусть r — целое число, $0 \leqslant r \leqslant 2^{l(m,i)}-1$. Пусть $(r_1,\ldots,r_{l(m,i)})$ соответствует двоичной записи числа r, а именно $r_j \in \{0,1\}$, r_1 равен значению младшего разряда, $r_{l(m,i)}$ — старшего. Определим

$$B_i(r,m) = \bigcup_{\substack{j\in\{1,\ldots,l(m,i)\} \\ r_j=1}} P_{I(i,j,m)}.$$

Так r задает, какие подмножества входят в объединение.

Для множества вершин P определим граф $S_P(i,t,r)$. Пусть $S_P(i,t,r)$ — двудольный граф, первая доля которого состоит из вершины $p(i,t) \in P_i$, вторая доля совпадает с множеством $\bigcup_{j=1}^{l(m,i)} P_{I(i,j,m)}$. Множество вершин смежных с $p(i,t)$ есть множество вершин $B_i(r,m)$.

Пусть мощность подмножества P_i равна $2^{l(m,i)}$ $(i=1,\ldots,m)$. Потребуем, чтобы U'_K обладал следующими свойствами. Множество вершин графа U'_K есть P. Для любых натуральных $i \leqslant m$, для любых целых $r \in \{0,\ldots,2^{l(m,i)}-1\}$ подмножество $\left(\bigcup_{j=1}^{l(m,i)} P_{I(i,j,m)}\right) \bigcup \{p(i,r)\}$ порождает граф $S_P(i,r,r)$. Заметим, что $U'_K \in W$.

Теперь докажем, что введённый выше граф U'_K универсален для K. Рассмотрим произвольный граф $G \in K$. По определению в универсальном графе должно найтись подмножество M, содержащее m вершин, которое порождает изоморфный G граф. По определению K, граф $G \in K$ имеет m вершин, которые помечены числами от 1 до m без повторений. Пусть g_i вершина графа G с пометкой i. При построении подмножества $M \subset P$ вершине g_i будет соответствовать некоторая вершина из P_i. Определим, какая именно. Ранее мы договорились в рамках подмножества вершин с одинаковыми пометками различать вершины по номеру. Из подмножества P_i включаем в M вершину с номером r_i, который определяется так. Пусть номер r_i соответствует в двоичной записи $(r_{i,1},\dots,r_{i,l(m,i)})$, как говорилось выше, и для каждого $j \in \{1,\dots,l(m,i)\}$ задается следующим образом

$$r_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{когда } g_i \text{ смежно с } g_{I(i,j,m)}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что выбор некоторой вершины $p(i,r_i)$ не влияет на возможности выбора вершины с другим i, так как по построению U'_K для любого $j \in \{1,\dots\ l(m,i)\}$ вершина $p(i,r_i)$ смежна или несмежна одновременно со всеми вершинами из $P_{I(i,j,m)}$. Итак, благодаря такому определению r_i, соответствие вершин из M и вершин G, сохраняет отношение смежности. Мы получили требуемый изоморфизм графов G и $\langle M\rangle$.

Теперь посчитаем, сколько вершин в универсальном графе U'_K,

$$|U'_K| = \sum_{i=1}^{m} |P_i| = \sum_{i=1}^{m} 2^{l(m,i)}.$$

Если m нечётно, то

$$|U'_K| = \sum_{i=1}^{m} 2^{\frac{m-1}{2}} = m\, 2^{\frac{m-1}{2}}.$$

Если m чётно, то с учетом $\left[\frac{m-1}{2}\right] = \frac{m}{2} - 1$ и $\left]\frac{m-1}{2}\right[= \frac{m}{2}$ получаем

$$|U'_K| = \sum_{i=1}^{m/2} 2^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} + \sum_{i=\frac{m}{2}+1}^{m} 2^{\left]\frac{m-1}{2}\right[} = \frac{m}{2}\, 2^{\frac{m}{2}-1} + \frac{m}{2}\, 2^{\frac{m}{2}} =$$
$$= \frac{m}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2}\right) 2^{\frac{m-1}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} m 2^{\frac{m-1}{2}}.$$

Лемма доказана.

Получим нижнюю оценку сложности задания класса K.

Лемма 2. *Для любого $m > 0$ верно*

$$N_K(m) > \frac{1}{e} m\, 2^{\frac{m-1}{2}}.$$

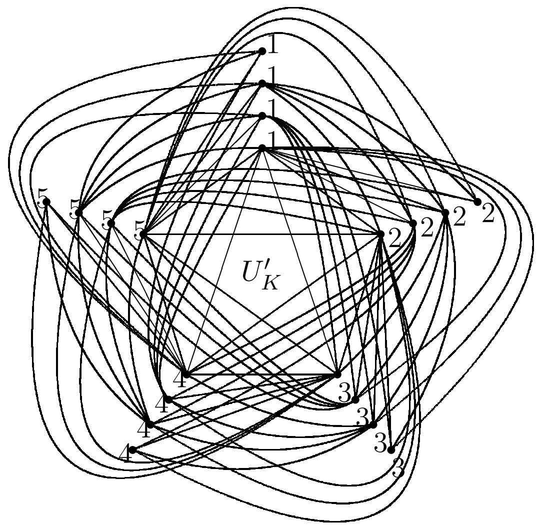

Рис. 1. Универсальный граф U'_K при $m = 5$.

Доказательство. Нижняя оценка вытекает из мощностных соображений. Пусть U'_K — произвольный универсальный граф для класса K. Пусть N — число его вершин. Для получения некоторого графа $G \in K$ надо выбрать соответствующее m-вершинное подмножество в U'_K. Возможностей такого выбора должно быть не меньше числа графов, которые мы хотим получать, то есть мощности K. Это условие накладывает ограничение на N.

Мощность класса графов $|K| = 2^{\frac{m(m-1)}{2}}$ [2]. Верхняя оценка числа возможностей выбора m вершин с различными пометками из N-вершинного множества, в котором пометки могут повторяться, есть $\binom{N}{m}$.

Отметим, что рассмотрение верхней оценки числа возможностей выбора m вершин вместо точного числа понижает нижнюю границу множества значений, которые может принимать N, согласно условию, наложенному на N выше. Это несколько ухудшает нижнюю оценку для N.

Рассмотрим следующую верхнюю оценку $\binom{N}{m}$. Для $1 \leqslant m \leqslant N$ выполняются соотношения

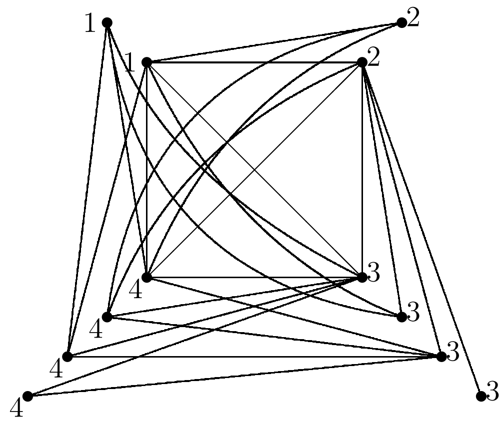

Рис. 2. Универсальный граф U'_K при $m = 4$.

$$\binom{N}{m} = \frac{N!}{m!(N-m)!} = \frac{(N-m)!(N-m+1)\cdot, \ldots, \cdot(N-1)\cdot N}{m!(N-m)!} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{N^m}{m!} < \frac{e^m \cdot N^m}{m^m}.$$

В последнем неравенстве использовано утверждение, что для любых $m \geqslant 1$ верно $\frac{m^m}{e^m} < m!$, которое доказывается, например, в [1].

Найдём нижнюю оценку для N из неравенства $|K| \leqslant \binom{N}{m}$, где $1 \leqslant m \leqslant N$. Из неравенства следует, что

$$2^{\frac{m(m-1)}{2}} < \frac{e^m \cdot N^m}{m^m}.$$

Выразив отсюда N, получаем

$$\frac{1}{e} m\, 2^{\frac{m-1}{2}} < N.$$

Поскольку рассуждения верны для произвольного универсального графа для класса K, они верны и для минимального, следовательно, сложность вложения $N_K(m)$ также удовлетворяет соотношению $\frac{1}{e} m\, 2^{\frac{m-1}{2}} < N_K(m)$ при $m \geqslant 1$.

Лемма доказана.

Утверждение теоремы 1 следует из лемм 1 и 2.

4. Доказательство теоремы 2

Лемма 3. *Для любого* $m > 0$ *можно построить* λ*-универсальный для класса* K *граф* U''_K *и*

$$N_K(m,\lambda) \leqslant \begin{cases} 2m\,2^{\frac{m-1}{2}-\frac{\lambda}{m}} & m - \textit{неч.}, \\ \frac{3}{2}m\,2^{\frac{m-1}{2}-\frac{\lambda}{m}} & m - \textit{чёт.}, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{m}{2}, \\ 2m\,2^{\frac{m-1}{2}-\frac{\lambda}{m}} & m - \textit{чёт.}, \quad \frac{m}{2} < \lambda \leqslant \frac{m(m-1)}{2}. \end{cases}$$

Доказательство. Построим граф U''_K, докажем его универсальность для класса K, подсчитаем количество вершин. Полученное число вершин будет являться верхней оценкой сложности $N_K(m,\lambda)$, так как количество вершин в минимальном универсальном графе для класса K не больше данного.

Рассмотрим множество вершин P с пометками из множества $\{1,\ldots,m\}$. Множество P содержит m подмножеств вершин $P_1,\ldots$ $\ldots,P_m$. Подмножество P_i $(i = 1,\ldots,m)$ определяется как подмножество вершин, которые имеют пометку i. Чтобы ссылаться на отдельные вершины множества P, упорядочим в рамках каждого подмножества вершины в произвольном порядке. Пусть t — натуральное число, $t \leqslant |P_i|$, тогда через $p(i,t)$ обозначим вершину из P_i с номером t.

Отдельно будем рассматривать случаи, когда m нечётно и чётно. Введём функцию

$$l(m,i,\lambda) = \begin{cases} \frac{m-1}{2} - \left]\frac{\lambda}{m}\right[& m \text{ неч.}, \ i = 1,\ldots,\lambda - \left[\frac{\lambda}{m}\right]m, \\ \frac{m-1}{2} - \left[\frac{\lambda}{m}\right] & m \text{ неч.}, \ i = \lambda - \left[\frac{\lambda}{m}\right]m + 1,\ldots,m, \\ \left[\frac{m-1}{2}\right] & m \text{ чёт.}, \ i = 1,\ldots,\frac{m}{2}+\lambda, \\ & \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{m}{2}, \\ \left]\frac{m-1}{2}\right[& m \text{ чёт.}, \ i = \frac{m}{2}+\lambda+1,\ldots,m, \\ & \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{m}{2}, \\ \left[\frac{m-1}{2}\right] - \left]\frac{\lambda}{m} - \frac{1}{2}\right[& m \text{ чёт.}, \ i = 1,\ldots,\lambda - \frac{m}{2} - \left[\frac{\lambda}{m} - \frac{1}{2}\right]m, \\ & \qquad \frac{m}{2} < \lambda \leqslant \frac{m(m-1)}{2}, \\ \left[\frac{m-1}{2}\right] - \left[\frac{\lambda}{m} - \frac{1}{2}\right] & m \text{ чёт.}, \ i = \lambda - \frac{m}{2} - \left[\frac{\lambda}{m} - \frac{1}{2}\right]m + 1,\ldots,m, \\ & \qquad \frac{m}{2} < \lambda \leqslant \frac{m(m-1)}{2}. \end{cases}$$

Значение этой функции можно понимать как количество подмножеств, которые мы рассматриваем вместе с P_i в зависимости от четности m и величины λ.

Введём функцию

$$I(i,j,m) = \begin{cases} i+j & i+j \leqslant m, \\ i+j-m & i+j > m. \end{cases}$$

Когда j пробегает $\{1,\dots,l(m,i,\lambda)\}$, значение $I(i,j,m)$ пробегает номера подмножеств, которые мы рассматриваем вместе с P_i.

Пусть r — целое число, $0 \leqslant r \leqslant 2^{l(m,i,\lambda)}-1$. Пусть $(r_1,\dots,r_{l(m,i,\lambda)})$ соответствует двоичной записи числа r, а именно $r_j \in \{0,1\}$, r_1 равен значению младшего разряда, $r_{l(m,i,\lambda)}$ — старшего. Определим

$$B_i(r,m,\lambda) = \bigcup_{\substack{j\in\{1,\dots,l(m,i,\lambda)\} \\ r_j=1}} P_{I(i,j,m)}.$$

Так r задает, какие подмножества входят в объединение.

Для множества вершин P определим граф $S_P(i,t,r,\lambda)$. Пусть $S_P(i,t,r,\lambda)$ — двудольный граф, первая доля которого состоит из вершины $p(i,t) \in P_i$, вторая доля совпадает с множеством $\bigcup_{j=1}^{l(m,i,\lambda)} P_{I(i,j,m)}$. Множество вершин смежных с $p(i,t)$ есть множество вершин $B_i(r,m,\lambda)$.

Пусть мощность подмножества P_i равна $2^{l(m,i,\lambda)}$ $(i=1,\dots,m)$. Потребуем, чтобы U''_K обладал следующими свойствами. Множество вершин графа U''_K есть P. Для любых натуральных $i \leqslant m$, для любых целых $r \in \{0,\dots,2^{l(m,i,\lambda)}-1\}$ подмножество $\left(\bigcup_{j=1}^{l(m,i,\lambda)} P_{I(i,j,m)}\right) \cup \bigcup\{p(i,r)\}$ порождает граф $S_P(i,r,r,\lambda)$. Заметим, что $U''_K \in W$.

Теперь докажем, что введённый выше граф U''_K универсален для K. Рассмотрим произвольный граф $G \in K$. По определению в универсальном графе должны найтись подмножество вершин M и подмножество пар вершин E_M такие, что в порождённый граф $\langle M\rangle$ достаточно добавить не более λ рёбер, чтобы граф $\langle M\rangle$ стал изоморфным G, причём пары концов этих рёбер должны принадлежать E_M.

По определению K, граф $G \in K$ имеет m вершин, которые помечены числами от 1 до m без повторений. Пусть g_i вершина графа G с пометкой i. При построении подмножества $M \subset P$ вершине g_i будет соответствовать некоторая вершина из P_i. Определим, какая именно. Ранее мы договорились в рамках подмножества вершин с одинаковыми пометками различать вершины по номеру. Из подмножества

P_i включаем в M вершину с номером r_i, который определяется так. Пусть номер r_i соответствует в двоичной записи $(r_{i,1}, \ldots, r_{i,l(m,i,\lambda)})$, как говорилось выше, и для каждого $j \in \{1, \ldots, l(m,i,\lambda)\}$ задается следующим образом

$$r_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{когда } g_i \text{ смежно с } g_{I(i,j,m)}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что выбор вершины $p(i, r_i)$ не влияет на возможности выбора вершины с другим i, так как по построению U''_K для любого $j \in \{1, \ldots\, l(m,i,\lambda)\}$ вершина $p(i, r_i)$ смежна или несмежна одновременно со всеми вершинами из $P_{I(i,j,m)}$.

Итак, благодаря такому определению r_i, соответствие вершин из M и вершин G, сохраняет отношение смежности, если G удовлетворяет следующему условию. Для любого натурального $i \leqslant m$ вершина g_i НЕ смежна с вершинами из $\bigcup_{j=l(m,i,\lambda)+1}^{l(m,i,0)} \{g_{I(i,j,m)}\}$. Для сохранения отношения смежности в случае произвольного $G \in K$, достаточно добавлять необходимые рёбра с концами из следующего множества неупорядоченных пар

$$E_M = \bigcup_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=l(m,i,\lambda)+1,\ldots,l(m,i,0)}} \{(g_i, g_{I(i,j,m)})\}.$$

Нетрудно проверить, что действительно $|E_M| = \lambda$. Мы получили требуемый изоморфизм графов G и $\langle M \rangle$.

Теперь посчитаем, сколько вершин в универсальном графе U''_K,

$$|U''_K| = \sum_{i=1}^{m} |P_i| = \sum_{i=1}^{m} 2^{l(m,i,\lambda)}.$$

Если m нечётно, то

$$\begin{aligned} |U''_K| = \sum_{i=1}^{\lambda - \left[\frac{\lambda}{m}\right] m} 2^{\frac{m-1}{2} - \left]\frac{\lambda}{m}\right[} + \sum_{i=\lambda - \left[\frac{\lambda}{m}\right] m + 1}^{m} 2^{\frac{m-1}{2} - \left[\frac{\lambda}{m}\right]} \leqslant \\ \leqslant \left(\lambda - \left[\frac{\lambda}{m}\right] m + 2m + 2 \left[\frac{\lambda}{m}\right] m - 2\lambda \right) 2^{\frac{m-1}{2} - \left]\frac{\lambda}{m}\right[} = \\ = \left(\left(\left[\frac{\lambda}{m}\right] m - \lambda \right) + 2m \right) 2^{\frac{m-1}{2} - \left]\frac{\lambda}{m}\right[} \leqslant 2m \, 2^{\frac{m-1}{2} - \frac{\lambda}{m}}. \end{aligned}$$

Если m чётно и $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{m}{2}$, то

$$
\begin{aligned}
|U''_K| = \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}+\lambda} 2^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} + \sum_{i=\frac{m}{2}+\lambda+1}^{m} 2^{\left]\frac{m-1}{2}\right[} &= \left(\frac{m}{2}+\lambda\right) 2^{\frac{m}{2}-1} + \left(\frac{m}{2}-\lambda\right) 2^{\frac{m}{2}} = \\
&= \left(\frac{m}{2}+\lambda\right) \frac{1}{\sqrt{2}}\, 2^{\frac{\lambda}{m}}\, 2^{\frac{m-1}{2}-\frac{\lambda}{m}} + \left(\frac{m}{2}-\lambda\right) \sqrt{2}\, 2^{\frac{\lambda}{m}}\, 2^{\frac{m-1}{2}-\frac{\lambda}{m}} \leqslant \\
&\leqslant \left(\frac{3}{2}m-\lambda\right) 2^{\frac{m-1}{2}-\frac{\lambda}{m}} \leqslant \frac{3}{2}m\, 2^{\frac{m-1}{2}-\frac{\lambda}{m}}.
\end{aligned}
$$

Если m чётно и $\frac{m}{2} < \lambda \leqslant \frac{m(m-1)}{2}$, то

$$
\begin{aligned}
|U''_K| &= \sum_{i=1}^{\lambda-\frac{m}{2}-\left[\frac{\lambda}{m}-\frac{1}{2}\right]m} 2^{\left[\frac{m-1}{2}\right]-\left]\frac{\lambda}{m}-\frac{1}{2}\right[} + \sum_{i=\lambda-\frac{m}{2}-\left[\frac{\lambda}{m}-\frac{1}{2}\right]m+1}^{m} 2^{\left[\frac{m-1}{2}\right]-\left[\frac{\lambda}{m}-\frac{1}{2}\right]} = \\
&= \left(\lambda-\frac{m}{2}-\left[\frac{\lambda}{m}-\frac{1}{2}\right]m\right) 2^{\frac{m}{2}-1-\left]\frac{\lambda}{m}-\frac{1}{2}\right[} + \\
&+ \left(m-\lambda+\frac{m}{2}+\left[\frac{\lambda}{m}-\frac{1}{2}\right]m\right) 2^{\frac{m}{2}-1-\left[\frac{\lambda}{m}-\frac{1}{2}\right]} \leqslant \\
&\leqslant \left(\left(\lambda-\frac{m}{2}-\left[\frac{\lambda}{m}-\frac{1}{2}\right]m\right)+2m-2\left(\lambda-\frac{m}{2}-\left[\frac{\lambda}{m}-\frac{1}{2}\right]m\right)\right) 2^{\frac{m}{2}-\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{m}} = \\
&= \left(\left[\frac{\lambda}{m}-\frac{1}{2}\right]m-\lambda+\frac{m}{2}+2m\right) 2^{\frac{m-1}{2}-\frac{\lambda}{m}} \leqslant 2m\, 2^{\frac{m-1}{2}-\frac{\lambda}{m}}.
\end{aligned}
$$

Лемма доказана.

Получим нижнюю оценку сложности задания класса K.

Лемма 4. *Для любого $m > 0$ и любого λ такого, что $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{m(m-1)}{2}$ верно следующее неравенство*

$$
N_K(m,\lambda) > \frac{1}{e} m\, 2^{\frac{m-1}{2}-\frac{\lambda}{m}}.
$$

Доказательство. Нижняя оценка вытекает из мощностных соображений. Пусть U''_K — произвольный универсальный граф для класса K. Пусть N — число его вершин. Для получения некоторого графа

$G \in K$ надо выбрать соответствующее m-вершинное подмножество M в U''_K. Кроме этого, после выбора m-вершинного подмножества мы добавляем, если надо, рёбра в заранее определённых для каждого M местах E_M. Количество таких мест $|E_M| = \lambda$. Всего возможностей задать граф с помощью U''_K указанным способом должно быть не меньше числа графов, которые мы хотим получать, то есть мощности K. Это условие накладывает ограничение на N.

Мощность класса графов $|K| = 2^{\frac{m(m-1)}{2}}$ [2]. Верхняя оценка числа возможностей выбора m вершин с различными пометками из N-вершинного множества, в котором пометки могут повторяться, есть $\binom{N}{m}$. После выбора подмножества вершин есть ещё не более 2^λ возможностей расставить рёбра на λ местах.

Отметим, что рассмотрение верхних оценок понижает нижнюю границу множества значений, которые может принимать N, при упомянутых выше ограничениях. Это несколько ухудшает нижнюю оценку для N.

Рассмотрим следующую верхнюю оценку $\binom{N}{m}$. Для $1 \leqslant m \leqslant N$ верно

$$\binom{N}{m} < \frac{e^m \cdot N^m}{m^m}.$$

Найдём нижнюю оценку для N из неравенства $|K| \leqslant \binom{N}{m} \cdot 2^\lambda$, где $1 \leqslant m \leqslant N$. Из неравенства следует, что

$$2^{\frac{m(m-1)}{2}} < \frac{e^m \cdot N^m}{m^m} \cdot 2^\lambda.$$

Выразив отсюда N, получаем

$$\frac{1}{e} m\, 2^{\frac{m-1}{2} - \frac{\lambda}{m}} < N.$$

Поскольку рассуждения верны для произвольного универсального графа для класса K, они верны и для минимального, следовательно, сложность вложения $N_K(m, \lambda)$ также удовлетворяет соотношению $\frac{1}{e} m\, 2^{\frac{m-1}{2} - \frac{\lambda}{m}} < N_K(m, \lambda)$ при $m \geqslant 1$.

Лемма доказана.

Утверждение теоремы 2 следует из лемм 3 и 4.

5. Доказательство теоремы 3

Лемма 5. *Для любого* $m > 0$ *можно построить универсальный для класса* T *граф* U'_T *и*

$$N_T(m) \leqslant m^2 - 2m + 2.$$

Доказательство. Сначала построим тривиальный универсальный граф для T. Потом внесём в него изменения и добьёмся значительного уменьшения числа вершин, сохранив свойство универсальности. Полученное число вершин будет являться верхней оценкой сложности $N_T(m)$, так как количество вершин в минимальном универсальном графе для класса T не больше данного.

Первый универсальный граф для класса T, который мы сейчас определим, является помеченным деревом с корнем, его вершины имеют пометки из $\{1, \ldots, m\}$. Допускается, что несколько вершин могут иметь одинаковые пометки. Обозначим это универсальное для T дерево через Y'_T. В корневых деревьях каждой вершине можно взаимнооднозначно сопоставить простую цепь, с началом в корне и концом в данной вершине. Пусть y — некоторая вершина Y'_T. Обозначим через $C(y)$ упорядоченный набор вершин, входящих в цепь в порядке следования от корня дерева Y'_T до вершины y $(y \in C(y))$. Число $|C(y)|$ можно также рассматривать как номер яруса, в котором находится y. Обозначим через $P(C(y))$ множество пометок вершин, которыми помечены вершины в наборе $C(y)$.

Дерево Y'_T определяется следующим правилом. Корнем дерева является вершина с пометкой «1». С каждой вершиной y смежны $m - |C(y)|$ вершин из яруса с номером $|C(y)| + 1$, которые имеют различные пометки из множества $\{1, \ldots, m\} \backslash P(C(y))$. Из определения следует, что для любого y пометки вершин в $C(y)$ не повторяются. Всего может быть m ярусов. Количество вершин в Y'_T достаточно велико: $(m-1)! \leqslant |Y'_T| \leqslant m!$. Оно равно

$$|Y'_T| = 1 + \sum_{i=1}^{m-1} \prod_{j=1}^{i} (m-j) = 1 + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{(m-1)!}{(m-1-i)!}.$$

Докажем универсальность Y'_T для класса T. Достаточно для произвольного дерева $G \in T$ доказать существование подмножества вершин $M_{Y'}$ графа Y'_T такого, что $\langle M_{Y'} \rangle$ изоморфен G. Напомним, что

T — класс m-вершинных неориентированных помеченных деревьев с пометками из множества $\{1, \ldots, m\}$, причём разные вершины имеют разные пометки. В любом дереве $G \in T$ есть вершина с пометкой «1», будем считать её корнем.

Для произвольного $G \in T$ подмножество $M_{Y'}$ строится следующим образом. Будем просматривать поочереди ярусы дерева G, начиная с корня. Каждой вершине из текущего яруса ставим в соответствие вершину из Y'_T с такой же пометкой, сохраняя отношение смежности, и включаем её в $M_{Y'}$. Докажем, что это всегда возможно.

Пусть вершине с пометкой «1» дерева G соответствует корень дерева Y'_T, который также по определению имеет пометку «1». Предположим, что уже найдено соответствие для i $(1 \leqslant i < m)$ нижних ярусов. Рассмотрим произвольную вершину $g \in G$, лежащую в i-том ярусе G. Пусть ей по предположению соответствует вершина $y \in M_{Y'}$. Вершине g однозначно соответствует простая цепь $g_1, \ldots, (g_i = g)$, где конец g_1 — корень дерева. По предположению, для вершин этой цепи уже найдены соответствующие вершины в Y'_T. Они образуют $C(y) \subset M_{Y'}$, так как цепи в G должна соответствовать цепь в Y'_T, поскольку по предположению отношение смежности сохраняется в i нижних ярусах.

Пометки вершин в G не повторяются, значит в $i+1$-ом ярусе G могут находиться только вешины с пометками отличными от тех, что встречаются при вершинах цепи $g_1, \ldots, g$. По определению Y'_T, вершине y в ярусе $i + 1 = |C(y)| + 1$ смежны $m - |C(y)|$ вершин со *всеми* пометками, которые ещё не вошли в $P(C(y))$. Поэтому при рассмотрении g и вершин из следующего яруса, смежных с g, мы всегда можем найти для них соответствие и включить в $M_{Y'}$. Поскольку в дереве Y'_T нет циклов, соответствие вершин G и вершин из $M_{Y'}$ сохраняет отношение смежности, значит G изоморфен $\langle M_{Y'} \rangle$.

Теперь преобразуем Y'_T, уменьшая число вершин. Определим операцию склейки вершин здесь как отождествление вершин из некоторого подмножества. При этом удаляются петли и кратные рёбра, если они возникают (в этом доказательстве они возникать не будут). Пусть для любой вершины y через $S(y)$ обозначается множество вершин, смежных с y. Заметим, что при склейке вершин некоторого подмножества Z множество вершин, смежных с результатом склейки, состоит из $\bigcup_{z\in Z} S(z)\backslash Z$.

Преобразование Y'_T заключается в следующем. Склеиваются вершины удовлетворяющие таким свойствам. Для любых двух вершин y и $\breve{y}$ из склеиваемого подмножества верно:

1) y и $\breve{y}$ имеют одинаковые пометки.
2) Упорядоченные набораы вершин $C(y) = y_1, \ldots, y_{i-1}, y$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ и $C(\breve{y}) = \breve{y}_1, \ldots, \breve{y}_{j-1}, \breve{y}$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ содержат вершины y_{i-1} и $\breve{y}_{j-1}$, которые имеют одинаковые пометки.

Будем говорить, что некоторая вершина предшествует данной, если при движении по цепи от корня она стоит на одну позицию ближе к корню. Таким образом, склеиваются вершины, которые вместе с предшествующими вершинами образуют одинаковые упорядоченные пары.

Из определения Y'_T следует, что в склейке могут участвовать только вершины, стоящие не ниже третьего яруса, так как во втором ярусе вершины имеют разные пометки, и всем вершинам предшествует корень с пометкой «1», которая больше нигде в Y'_T не встречается.

В третьем ярусе содержатся представители всех подмножеств, каждое из которых склеивается в одну вершину. Поэтому вершины третьего яруса естественно рассматривать в качестве результатов склейки каждого из подмножеств. Действительно, в склейках участвуют вершины со всеми пометками кроме «1». По определению Y'_T, каждая вершина второго яруса с одной из $m-1$ возможных пометок предшествует вершине с одной из $m-2$ оставшихся пометок. Поэтому вершины третьего яруса образуют с предшествующими вершинами все возможные упорядоченные пары. Мощность третьего яруса равна $(m-1)(m-2)$.

В результате получаем граф из W, который уже не является деревом. Обозначим его U'_T. Количество вершин в U'_T нетрудно подсчитать. Оно равно сумме мощностей трёх нижних ярусов Y'_T.

$$|U'_T| = 1 + (m-1) + (m-1)(m-2) = 1 + (m-1)^2 = m^2 - 2m + 2.$$

Докажем, что граф U'_T универсален для T. Проделаем это в два этапа. Во-первых, докажем, что для любого дерева $G \in T$ в U'_T со-

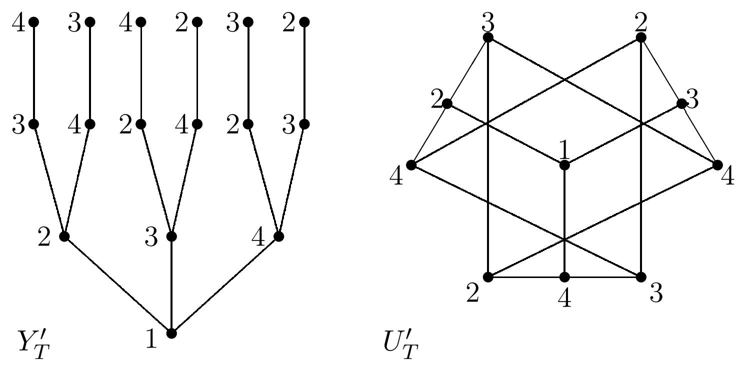

Рис. 3. Универсальные графы Y'_T и U'_T при $m = 4$.

держится изоморфный ему подграф G_U. Пусть M — множество вершин дерева G_U. Во-вторых, докажем, что в $\langle M\rangle$ нет циклов. Тем самым, для любого дерева $G \in T$ мы указываем подмножество вершин M графа U'_T такое, что G изоморфен $\langle M\rangle$. По определению это означает универсальность U'_T. Действительно, для того чтобы дерево G_U, входящее в U_T в качестве подграфа, было изоморфно графу $\langle M\rangle$ достаточно, чтобы граф $\langle M\rangle$ не имел циклов. Последнее верно из следующих соображений. Все вершины G_U войдут в $\langle M\rangle$. Если две вершины из M были смежны в G_U, то они останутся смежными в $\langle M\rangle$. Остается показать, что в $\langle M\rangle$ не добавится рёбер, которых нет в G_U. Появление в дереве нового ребра, без добавляя новых вершин, эквивалентно появлению цикла.

Поскольку граф Y'_T универсален для T, то для любого $G \in T$ он содержит подграф G_Y, изоморфный G. При преобразовании Y'_T в U'_T, склеиваются только вершины с одинаковыми пометками. Граф $G \in T$ содержит вершины с различными пометками, значит между вершинами G_Y до преобразования, и вершинами, в которые они перешли при преобразовании, есть взаимнооднозначное соответствие. Любая пара вершин из G_Y сохраняет отношение смежности при переходе в пару вершин из G_U, так как любая вершина графа G_Y может склеиться только с вершиной с такой же пометкой, а значит не принадлежащей множеству вершин графа G_Y. Поэтому подграф G_Y после склейки переходит в некоторый изоморфный ему подграф, который мы обозначили G_U.

Отсутствие циклов в $\langle M\rangle$ доказывается так. Определим в графе U'_T три подмножества вершин. Пусть U^i_T — подмножество вершин, которые находятся на расстоянии $i-1$ от корня (вершины с пометкой «1») ($i = 1, 2, 3$). Как следует из определения, в U'_T нет вершин, находящихся от корня на расстоянии больше двух.

Если дерево G_U не имеет вершин в U^3_T, то $\langle M\rangle$ не имеет циклов (в преобразовании Y'_T участвовали вершины не ниже третьего яруса).

Допустим, G_U имеет вершины, принадлежащие U^3_T. Пусть g_1 и g_2 — некоторые вершины из U^3_T. Пусть тогда $\hat{g}_1$ — вершина из U^2_T, смежная с g_1, и $\hat{g}_2$ — вершина из U^2_T, смежная с g_2 (с каждой вершиной из U^3_T смежна только одна вершина из U^2_T).

Рассмотрим свойство, следующее из определения U'_T. Обозначим его $(*)$. Произвольная пара вершин g_1 и g_2 из U^3_T может быть соединена ребром в одном из двух случаев:

1) g_1 и $\hat{g}_2$ имеют одинаковые пометки.
2) $\hat{g}_1$ и g_2 имеют одинаковые пометки.

Если в $\langle M\rangle$ есть простой цикл, в котором вершины имеют разные пометки, то его можно отнести к одному из следующих видов:

(а) Цикл содержит вершину, принадлежащую U^2_T. При этом, по определению U'_T, цикл обязан содержать две вершины из U^3_T, соединённые ребром.
(б) Цикл содержит только вершины из U^3_T.

В обоих случаях $\langle M\rangle$ должен содержать корень — вершину с пометкой «1». Значит, если цикл не проходит через корень, то в $\langle M\rangle$ существует простая цепь, соединяющая некоторую вершину из цикла с корнем. Обозначим её Q.

Цикл вида (а) не может существовать в $\langle M\rangle$, поскольку по свойству $(*)$ в данном цикле будут две вершины с одинаковыми пометками.

Рассмотрим подробнее случай (б). Пусть мы имеем простой цикл Z, в котором все вершины принадлежат U^3_T, имеют разные пометки. Допустим, что на Z выбрано одно из двух направлений обхода, и обозначим вершины соответственно $z_1, \ldots, z_r$ ($3 \leqslant r \leqslant m-2$). Множество пометок этих вершин — $P(\{z_1, \ldots, z_r\})$. Подмножество вершин из U^2_T, смежных с вершинами цикла $z_1, \dots, z_r$, имеют то же множество пометок, другими словами $P(\{\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_r\}) = P(\{z_1, \dots, z_r\})$. Обозначим это свойство $(**)$. Доказывается оно так. Введём функцию

$$I(i,j,r) = \begin{cases} i+j & i+j \leqslant r, \\ i+j-r & i+j > r. \end{cases}$$

Цикл Z обладает следующим свойством. Направление обхода вершин цикла Z может быть выбрано так, что любая вершина $z_{I(i,0,r)}$, где $1 \leqslant i \leqslant r$, имеет такую же пометку, как у вершины $\hat{z}_{I(i,1,r)}$. Докажем это. Во-первых, при некотором направлении обхода цикла вершина $\hat{z}_{I(i,1,r)}$ с такой же пометкой, как у $z_{I(i,0,r)}$, существует, иначе по свойству $(*)$ не может существовать цикл Z. Во-вторых, допустим, существует вершина $z_{I(i,0,r)}$ с такой же пометкой, как и у вершин $\hat{z}_{I(i,1,r)}$ и $\hat{z}_{I(i,-1,r)}$ (это возможно только, когда вершины $\hat{z}_{I(i,1,r)}$ и $\hat{z}_{I(i,-1,r)}$ совпадают, так как в U_T^2 нет двух вершин с одинаковыми пометками). Тогда по свойству $(*)$ найдутся вершины $z_{I(k,1,r)}$, $z_{I(k,-1,r)}$ и $\hat{z}_{I(k,0,r)}$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$, имеющие одинаковые пометки. Первые две принадлежат циклу, получили противоречие с тем, что в цикле Z вершины имеют разные пометки. Из доказанного свойства цикла Z следует $(**)$, то есть $P(\{\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_r\}) = P(\{z_1, \dots, z_r\})$. Значит, цепь Q не может проходить через вершины множества $\{\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_r\}$. В противном случае $\langle M \rangle$ содержит две вершины с одинаковыми пометками, чего не может быть по определению M.

Теперь в рамках (б) рассмотрим случай, когда простая цепь Q идёт сначала через вершины из U_T^3, прежде чем перейти в U_T^2. Q идёт к корню, минуя $\{\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_r\}$. Докажем, что в объединении множеств вершин Q и Z обязательно содержится пара вершин с одинаковыми пометками. Пусть q_1 — конец цепи Q, принадлежащий Z. Пусть $q_1, \dots, q_s$ $(2 \leqslant s)$ — вершины цепи, лежащие в U_T^3. Пусть $\hat{q}_s$ — первая от конца q_1 вершина цепи, лежащая в U_T^2. В данных условиях есть три возможности сосуществования Q и Z в $\langle M \rangle$, разрешённые свойством $(*)$. Первая возможность следующая: для некоторого k $(2 \leqslant k \leqslant s)$ вершины $\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_{k-1}$ и соответственно $q_2, \dots, q_k$ имеют одинаковые пометки. Как было доказано выше $(**)$, пометка при $\hat{q}_1$ имеется у некоторой вершины цикла. Значит, и пометка вершины q_2, принадлежащей Q, имеется у некоторой вершины цикла. Вторая возможность: совпадают пометки вершин $\hat{q}_2, \ldots, \hat{q}_s$ и соответственно $q_1, \ldots, q_{s-1}$. Здесь вершины цепи q_{s-1} и $\hat{q}_s$ имеют одинаковые пометки. Третья возможность: при $s > 2$ вершины q_2 и $\hat{q}_1$ имеют разные пометки, и существует такое минимальное i $(2 \leqslant i \leqslant s-1)$, что q_{i+1} и $\hat{q}_i$ имеют одинаковую пометку. Значит, по свойству $(*)$ вершины $\hat{q}_i$ и q_{i-1} имеют одинаковые пометки, иначе не может быть ребра цепи Q, соединяющего $\hat{q}_i$ и q_{i-1}. Следовательно, вершины цепи q_{i+1} и q_{i-1} имеют одинаковые пометки.

Отсюда получаем, что в случае (б) простая цепь Q имеет две одинаково помеченные вершины, или содержит вершину, помеченную одинаково с некоторой вершиной из Z. Получили противоречие с тем, что вершины $\langle M \rangle$ имеют различные пометки.

Итак, мы наконец доказали, что $\langle M \rangle$ не содержит циклов, а значит, как говорилось выше, граф U'_T универсален для класса T.

Лемма доказана.

Получим нижнюю оценку сложности задания класса T.

Лемма 6. *Для любого $m > 0$ верно*

$$N_T(m) > C_m\, m^2, \qquad C_m \to \frac{1}{e} - 0 \ \text{ при } \ m \to +\infty.$$

Доказательство. Нижняя оценка вытекает из мощностных соображений. Пусть U'_T — произвольный универсальный граф для класса T. Пусть N — число его вершин. Для получения некоторого графа $G \in T$ надо выбрать соответствующее m-вершинное подмножество в U'_T. Возможностей такого выбора должно быть не меньше числа графов, которые мы хотим получать, то есть мощности T. Это условие накладывает ограничение на N.

По теореме Кели существует ровно m^{m-2} различных помеченных деревьев с m вершинами [3]. То есть $|T| = m^{m-2}$. Верхняя оценка числа возможностей выбора m вершин с различными пометками из N-вершинного множества, в котором пометки могут повторяться, есть $\binom{N}{m}$.

Отметим, что рассмотрение верхней оценки числа возможностей выбора m вершин вместо точного числа понижает нижнюю границу множества значений, которые может принимать N, согласно условию, наложенному на N выше. Это несколько ухудшает нижнюю оценку для N.

Рассмотрим верхнюю оценку $\binom{N}{m}$. Для $1 \leqslant m \leqslant N$ выполняется неравенство

$$\binom{N}{m} < \frac{e^m \cdot N^m}{m^m}.$$

Найдём нижнюю оценку для N из неравенства $|T| \leqslant \binom{N}{m}$, где $1 \leqslant \leqslant m \leqslant N$. Из неравенства следует, что

$$\frac{m^m}{m^2} < \frac{e^m \cdot N^m}{m^m}.$$

Выразив отсюда N, получаем

$$\frac{1}{e}\, m^2\, \frac{1}{m^{\frac{2}{m}}} < N.$$

Выражение $\frac{1}{e} \cdot \frac{1}{m^{\frac{2}{m}}} \to \frac{1}{e} - 0$ при $m \to +\infty$. Обозначим его через C_m.

Поскольку рассуждения верны для произвольного универсального графа для класса T, они верны и для минимального, следовательно, сложность вложения $N_T(m)$ также удовлетворяет соотношению $N_T(m) > C_m\, m^2$, где $C_m \to \frac{1}{e} - 0$ при $m \to +\infty$.

Лемма доказана.

Утверждение теоремы 3 следует из лемм 5 и 6.

В заключение автор выражает благодарность профессору А. С. Подколзину, под руководством которого выполнена эта работа.

Список литературы

[1] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Высш. шк., 2002.

[2] Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. — М.: Мир, 1977.

[3] Уилсон Р. Введение в теорию графов. — М.: Мир, 1977.