Автоматная модель преследования

Н. Ю. Волков

Обозначим множества натуральных и целых чисел как $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$, соответственно. Положим $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Множество клеток, на которые плоскость разбивается целочисленной решеткой, обозначим $\mathbb{Z}^2$, сопоставляя каждой клетке координаты ее нижнего левого угла. Назовем r-окрестностью клетки (x_0, y_0) множество $D_{(x_0,y_0),r} = \{(x,y) \,|\, (\,|x - x_0| + |y - y_0|\,) \leqslant r\}$. Определим следующие лабиринты — подмножества $\mathbb{Z}^2$. $L_0 = \mathbb{Z}^2$, $L_1 = \{(x,y) \,|\, x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N}\}$, $L_2(l) = \{(x,y) \,|\, 0 < y \leqslant \leqslant l,\, x,y \in \mathbb{Z}\}$, $L_3(l) = \{(x,y) \,|\, 0 < y \leqslant l,\, x,y \in \mathbb{N}\}$, $L_4 = \{(x,y) \,|\, x,y \in \in \mathbb{N}\}$, $L_5(l) = \{(x,y) \,|\, 0 < x \leqslant l,\, 0 < y \leqslant l,\, x,y \in \mathbb{N}\}$. Здесь $l \in \mathbb{N}$. Эти лабиринты назовем, соответственно, *плоскостью*, *полуплоскостью*, *l-полосой* и *l-полуполосой*, *квадрантом* и *l-квадратом.*

Рассмотрим автоматный аналог ситуации преследования хищниками своих жертв. В качестве пространства преследования будем рассматривать лабиринт L, являющийся одним из лабиринтов L_0, L_1, $L_2(l)$, $L_3(l)$, L_4, $L_5(l)$. Хищники и жертвы представляются в виде автоматов, которые, находясь в какой-либо клетке лабиринта, умеют обозревать некоторую ее окрестность, и, в зависимости от вида (конфигурации) этой окрестности и своего состояния, способны перемещаться в другую клетку лабиринта. Поведение каждого автомата определяется его начальным расположением в лабиринте, его «физическими параметрами» — обзором и скоростью, а также его внутренней логикой. Определим хищников и жертв более формально.

Под автоматом будем понимать инициальный конечный автомат вида $\mathcal{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$, где A — входной, B — выходной, Q — внутренний алфавиты автомата $\mathcal{A}$, $\varphi : Q \times A \to Q$ и $\psi : Q \times A \to B$ —

функции переходов и выходов $\mathcal{A}$, соответственно, $q_0 \in Q$ — его начальное состояние. Алфавит A определяет возможности $\mathcal{A}$ «видеть» происходящее вокруг, а алфавит B — его возможности перемещаться. Алфавит Q и функции φ и ψ задают внутреннюю логику автомата.

Выходным алфавитом автомата $\mathcal{A}$, перемещающегося в лабиринте L, является множество $B = D_{(0,0),V}$, где параметр $V \in \mathbb{N}$ называется *скоростью автомата* $\mathcal{A}$. Входной алфавит $\mathcal{A}$ зависит от параметра $R \in \mathbb{N}$ $(R \geqslant V)$, называемого *обзором автомата* $\mathcal{A}$ и способа взаимодействия $\mathcal{A}$ с другими автоматами. Возможны два случая такого взаимодействия: 1) $\mathcal{A}$ является элементом независимой системы (н. системы) автоматов; 2) $\mathcal{A}$ является элементом коллектива автоматов. Пусть автомат $\mathcal{A}$ со скоростью V и обзором R находится в клетке (x_0, y_0). Множество $D_{(x_0,y_0),R}$ называется *зоной обзора* $\mathcal{A}$.

Рассмотрим две системы автоматов $K = (W_1, \ldots, W_m)(R, V)$ и $S = (U_1, \ldots, U_n)(R', V')$ с обзорами R и R' и скоростями V и V', соответственно. Здесь S — н. система жертв, K — коллектив хищников. Фиксируем начальные расположения всех автоматов в лабиринте L.

Состояние зоны обзора U_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ в текущий такт времени определяется расположением U_i относительно границы лабиринта и расположением хищников в зоне обзора U_i. Такое состояние зоны обзора U_i будем называть U_i-конфигурацией (U_i-конф.) Состояние зоны обзора W_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ определяется расположением W_j относительно границы лабиринта, расположением жертв и хищников в зоне обзора W_j, а также состояниями хищников, попавших в зону обзора W_j. Такое состояние зоны обзора W_j будем называть W_j-конфигурацией (W_j-конф.) Таким образом, каждая жертва «не видит» других жертв, но «видит» границы лабиринта и хищников на расстоянии своего обзора, а хищники «видят» границы лабиринта, жертв и друг друга на расстоянии своего обзора.

Расположения и состояния жертв и хищников однозначно задают все U_i-конф. и W_j-конф. Множество U_i-конф. при всевозможных расположениях и состояниях жертв и хищников обозначим F', а множество всех W_j-конф. — F. Входным алфавитом каждой жертвы является множество $\{(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \,|\, \mathcal{F}_1 \in (\{\varnothing\} \cup F'), \mathcal{F}_2 \in F'\}$. Входным алфавитом каждого хищника является множество $\{(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \,|\, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in F\}$.

В четные такты каждая жертва U_i получает на вход пару, состоящую из текущей U_i-конф. и U_i-конф. в предыдущий такт (в нулевой такт вместо предыдущей U_i-конф. на вход поступает $\varnothing$). В соответствии со своими функциями переходов и выходов, U_i в четные такты перемещается в некоторую клетку и меняет свое состояние. В нечетные такты каждый хищник W_j получает на вход пару, состоящую из текущей и предыдущей W_j-конф. В соответствии со своими функциями переходов и выходов, W_j в нечетные такты перемещается и меняет свое состояние. Рассматриваются только такие автоматы, для которых перемещение на вектор, равный выходному символу, никогда не выводит за пределы лабиринта L. Жертва считается пойманной, если она оказалась в V-окрестности одного из хищников. Пойманная жертва исчезает из лабиринта. K «ловит» н. систему жертв, если в процессе преследования K ловит каждую жертву.

Расположение системы автоматов в лабиринте, при котором все они находятся в одной клетке, назовем *каноническим.* Вместо слов «начальное расположение» будем использовать сокращение «н. р.», а вместо «каноническое расположение» — «к. р.» Зафиксируем R, $V \in \mathbb{N}$, такие что $2 \leqslant V \leqslant R$. Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Существуют коллективы хищников* $K_0(R, V)$, $K_1(R, V)$, $K_2(R, V)$, $K_3(R, V)$ *и* $K_4(R, V)$, *такие что:*
1) Для каждого $i = 0, 1$, *коллектив* K_i, *стартуя из любого к. р. в* L_i, *ловит любую конечную н. систему жертв* $S(R, V-1)$ *при любом их н. р. в* L_i.
2) Для каждого $i = 2, 3$, *коллектив* K_i, *при любом* l, *стартуя из любого к. р. в* $L_i(l)$, *ловит любую конечную н. систему жертв* $S(R, V-1)$ *при любом их н. р. в* $L_i(l)$.
3) При $V > 7 \cdot V'$, *коллектив* K_4, *стартуя из любого к. р. в* L_4, *ловит любую конечную н. систему жертв* $S(R, V')$ *при любом их н. р. в* L_4.

Теорема 2. *Верны следующие утверждения:*
1) Для любой конечной н. системы жертв $S(R, V-1)$, *существует коллектив хищников* $K_5(R, V)$, *который, при любом* l, *стартуя из любого к. р. в* $L_5(l)$, *ловит* $S(R, V-1)$ *при любом н. р. жертв в* $L_5(l)$.
2) Для любого конечного коллектива хищников $K(R, V)$ *существуют н. система жертв* $S(R, V-1)$ *и натуральное число* l, *такие что*

для любого н. р. хищников в $L_5(l)$*, существует н. р. жертв в* $L_5(l)$*, при котором все они убегают от хищников.*

Автор работы выражает признательность В. Б. Кудрявцеву за научное руководство.

Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[2] Килибарда Г., Кудрявцев В. Б., Ушчумлич Ш. Независимые системы автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. Т. 15. Вып. 2.

[3] Килибарда Г., Кудрявцев В. Б., Ушчумлич Ш. Коллективы автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. Т. 15. Вып. 3. 2003.

[4] Грунская В. И. О динамическом взаиомдействии автоматов // Мат. кибернетика и ее приложения к биологии. МГУ, 1987. С. 8–18.

[5] Волков Н. Ю. Об автоматной модели преследования // Дискретная математика. 2007. Вып. 2.