Об отношении границ на конечных автоматах

И. Ю. Самоненко

В данной работе вводится понятие отношения границ на состояниях конечного автомата. Изучены его свойства, найдены некоторые классы автоматов, удовлетворяющие этому отношению, а так же система операций, сохраняющая это отношение. Рассмотрена связь отношения границ и задачи синхронизации автомата.

1. Введение

В данной работе вводится понятие отношения границ на состояниях конечного автомата без выхода. Это отношение на состояниях автомата арности $r+1$, где $r \geqslant 2$, сохраняемое переходами автомата. Возможность построения на автомате данного отношения позволяет более эффективно решать различные задачи, связанные с синхронизацией автомата.

Пусть $\mathfrak{A} = (A, Q, \varphi)$ — конечный автомат с входным алфавитом A, множеством состояний Q и функцией переходов $\varphi : (Q \times A) \to Q$. Функция φ естественным образом расширяется до функции $\varphi : (Q \times A^*) \to Q$. Необходимо найти слово $\alpha \in A^*$ и $q_f \in Q$, такое что $\forall q \in Q \ \varphi(q, \alpha) = q_f$. Безусловно, такое слово α существует не всегда. В случае, если оно существует, то автомат назовем синхронизуемым, а слово α синхронизующим для этого автомата.

Можно сформулировать три задачи, важные с точки зрения приложений:

1) Проверка, является ли данный автомат синхронизуемым.
2) В том случае, если автомат синхронизируем, поиск какого-нибудь слова, синхронизирующего его.

3) В том случае, если автомат синхронизируем, поиск синхронизующего слова заданной длины.
4) В том случае, если автомат синхронизируем, поиск минимального по длине синхронизующего слова.

Если автомат имеет n состояний, то первые две задачи решаются за время $O(n^3)$. Третья задача NP-полная [2]. Четвертая задача предположительно не является даже NP-легкой[4].

С задачей синхронизации связана гипотеза Černy [3]. Формулируется она следующим образом: пусть дан синхронизируемый автомат с n состояниями, тогда длина минимального по длине синхронизующего слова не превосходит $(n-1)^2$. На сегодняшний, день наилучшая верхняя оценка синхронизующего слова равна $\frac{n^3-n}{6}$ [5].

Наиболее обширное приложение данной задачи можно найти в производстве процессоров, тестировании процессоров и программ. А также и в других областях, где применяются автоматные методы для моделирования, тестирования и смежных задач.

В данной работе будет показано, что в классе автоматов, сохраняющих отношение границ, задача синхронизации решается существенно проще.

2. Обозначения

В данном разделе введем некоторые обозначения, которые будем использовать в дальнейшем. Пусть $\mathfrak{A} = (A, Q, \varphi)$, тогда вместо $\varphi(q, \alpha)$ будем писать $q.\alpha$, где $\alpha \in A^*$. Аналогично, если $Q' \subseteq Q$, тогда вместо $\{\varphi(q, \alpha) | q \in Q'\}$ будем писать $Q'.\alpha$.

Через K_n обозначим множество всех автоматов с n состояниями.

Через $Syn(\mathfrak{A})$ обозначим множество всех слов, синхронизующих автомат $\mathfrak{A}$, то есть

$$Syn(\mathfrak{A}) = \bigcup_{q_f \in Q} \{\alpha \in A^* | Q.\alpha = q_f\}.$$

Через $MinSyn(\mathfrak{A})$ обозначим множество минимальных по длине слов из $Syn(\mathfrak{A})$.

Через Θ обозначим класс всех синхронизуемых автоматов.

Положим

$$E_k = \{0, \ldots, k-1\} \quad N_k = \{1, \ldots, k\}.$$

Будем говорить, что алгоритм $\mathbb{A}$ имеет сложность $Compl(N, M)$, если количество операции в нем не превосходит N и объем используемой памяти не превосходит M.

3. Определение и свойства граничных автоматов

Пусть $R \subseteq Q^{r+1}$ — некоторое $r+1$-арное отношение на множестве Q. Через $[q_1, \ldots, q_r]_R$ обозначим множество $\{q \in Q | R(q, q_1, \ldots, q_r)\}$.

Определение 1. Отношением границ порядка r на множестве Q называется отношение $R \subseteq Q^{r+1}$ со следующими свойствами:

1) Для любой перестановки $\sigma \in S_r$
$$q \in [q_1, \ldots, q_r]_R \Rightarrow q \in [q_{\sigma(1)}, \ldots, q_{\sigma(r)}]_R;$$
2) Для любых $q, q' \in Q$
$$q \in [q', \ldots, q']_R \Rightarrow q = q';$$
3) Существуют $g_1, \ldots, g_r \in Q$, такие что $\forall q \in Q$ верно $q \in [g_1, \ldots, g_r]_R$. Множество состояний $\{g_1, \ldots, g_r\}$ называется начальной границей для R.

Определение 2. Автомат $\mathfrak{A} = (A, Q, \varphi)$ называется граничным автоматом порядка r, если на множестве Q можно ввести отношение границ R порядка r со следующими свойством:
$$q \in [q_1, \ldots, q_r]_R \Rightarrow \forall x \in A \; q.x \in [q_1.x, \ldots, q_r.x]_R.$$
При этом, отношение R называется согласованным с автоматом $\mathfrak{A}$. Множество всех автоматов с n состояниями, на которых можно ввести отношение границ порядка r обозначим через Γ^r_n и $\Gamma^r = \cup_{n=1}^{\infty} \Gamma^r_n$.

Автоматом Черни с n состояниями называется автомат $\mathfrak{P}_n = (\{0,1\}, \{0, \ldots n-1\}, \varphi_n)$, где функции φ_n определена следующим образом:

φ_n	0	1	2	...	$n-2$	$n-1$
0	1	2	3	...	$n-1$	0
1	1	1	2	...	$n-2$	$n-1$

Лемма 1. $\mathfrak{P}_n \notin \Gamma_n^{n-1}$ *для любого* $n = 3, 4, \ldots$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{P}_n \in \Gamma_n^{n-1}$ и множество $G = E_n \setminus \{q'\}$ является начальной границей. Рассмотрим слово $\alpha = (0^{n-q'+2}1)^{n-2}$. Легко заметить, что $G.\alpha = 1$ и $q'.\alpha = 2$, но это противоречит условию 3 из определения отношения границ. Лемма доказана.

Теорема 1. $\Gamma_n^2 \subsetneq \Gamma_n^3 \subsetneq \cdots \subsetneq \Gamma_n^n = K_n$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} \in \Gamma_n^r$ и R — согласованное отношение границ порядка r. Построим отношение границ R' порядка $r+1$. Положим $(q, q_1, \ldots, q_{r+1}) \in R'$ тогда и только тогда, когда существует $j \in N_{r+1}$ такое, что $(q, q_1, \ldots, q_{j-1}, q_{j+1}, \ldots, q_{r+1}) \in R$. Очевидно, первые два условия из определения отношения границ выполнено. Пусть $\{g_1, \ldots, g_r\}$ начальная граница для R. Возьмем произвольное состояние $g \in Q \setminus \{g_1, \ldots, g_r\}$, тогда множество $\{g, g_1, \ldots, g_r\}$ будет начальной границей для R'. Условие согласованности R' с $\mathfrak{A}$ очевидно.

Покажем, что $\Gamma_n^r \neq \Gamma_n^{r+1}$. Рассмотрим автомат $\mathfrak{B} = (\{0,1\}, \{0, 1, \ldots, n-1\}, \varphi) \in K_n$, где функция φ определена следующим образом:

$$\varphi(q,x) = \begin{cases} \varphi_{r+1}(q,x), & q \in E_{r+1}, \\ 1, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где φ_{r+1} — функция переходов автомата Черни с $r+1$ состоянием. Очевидно, что $\mathfrak{B} \in \Gamma_n^{r+1}$ при начальной границе $G = E_{r+1}$. При переходе по любой букве автомат $\mathfrak{B}$ переходит в свой подавтомат, который совпадает с $\mathfrak{P}_{r+1}$. Следовательно, из леммы 1 получаем, что $\mathfrak{B} \notin \Gamma_n^r$.

Для доказательства $\Gamma_n^n = K_n$ достаточно взять отношение границ $R' = \{(q, q_{i_1}, \ldots, q_{i_n}) | q_{i_j} \in Q, q \in \{q_{i_1}, \ldots, q_{i_n}\}\}$. Теорема доказана.

4. Алгоритм построения отношения границ

В данном разделе рассмотрим алгоритм $\mathbb{A}_1(\mathfrak{A}, r)$, который определяет принадлежит ли автомат $\mathfrak{A}$ множеству Γ^r, и в том случае, если принадлежит, то строит согласованное с ним отношение границ.

Пусть R — отношение границ порядка r, введем обозначение $\overline{R} = Q^{r+1} \backslash R$. Алгоритм будет итерационно строить множество $\overline{R}$, так что бы для R выполнились условия из определения.

Множество $\overline{R}$ будет задаваться переменной L, тип которой будет $SetOf(Q^{r+1})$.

Алгоритм $\mathbb{A}_1(\mathfrak{A}, r)$
$L = \{(q, q', \ldots, q') | q, q' \in Q, q \neq q'\};$
$H = L;$
while $(H \neq \varnothing)$ {
  $L = L \cup H;$
  $H = \{(q', q'_{i_1}, \ldots, q'_{i_r}) | (q, q_{i_1}, \ldots, q_{i_r}) \in H, x \in A,$
$q' \in \varphi^{-1}(q, x), q'_1 \in \varphi^{-1}(q_{i_1}, x), \ldots, q'_r \in \varphi^{-1}(q_{i_r}, x)\} \setminus L;$
}
$L' = \{(q, q_{\sigma(i_1)}, \ldots, q_{\sigma(i_r)}) | (q_{i_1}, \ldots, q_{i_r}) \in L, \sigma \in S_r\};$
if $(\exists G = (q_{j_1}, \ldots, q_{j_r}) : ((|\{q_{j_1}, \ldots, q_{j_r}\}| = r) \&$
$(\forall q \in Q, (q, q_{j_1}, \ldots, q_{j_r}) \notin L'))$ {
  //Автомат принадлежит классу Γ^r, G — начальная граница
  $R = Q^{r+1} \setminus L'$; // отношение границ
}$else${
  //Автомат не принадлежит классу Γ^r
}

Имеет место теорема.

Теорема 2. *Алгоритм* $\mathbb{A}_1(\mathfrak{A}, r)$ *проверяет, принадлежит ли автомат* $\mathfrak{A}$ *классу* Γ^r*, и в случае, если принадлежит, то строит соответствующее отношение* R *и указывает начальную границу* G*. Сложность алгоритма* $Compl(O(n^{r+1}), O(n^{r+1}))$.

5. Отношение границ и задача синхронизации

В данном разделе будет рассмотрен вопрос о решении задачи синхронизации для класса граничных автоматов. Напомним, что через Θ обозначен класс всех синхронизируемых автоматов.

Теорема 3. *Пусть* $\mathfrak{A} = (A, Q, \varphi) \in \Gamma^r_n \cap \Theta$*. Тогда длина минимального синхронизующего слова для автомата* $\mathfrak{A}$ *не превышает* $(r-1)\frac{n(n-1)}{2}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} = (A, Q, \varphi) \in \Gamma^r_n$ и G начальная граница. Очевидно, что если слово $\gamma \in A^*$ такое, что $|G.\gamma| = 1$, то $\gamma \in Syn(\mathfrak{A})$. Оценим длину минимальную длину слова, для которого $|G.\gamma| = 1$.

Рассмотрим автомат $\mathfrak{B} = (A, Q', \varphi')$, где $Q = \{(q_i, q_j) \,|\, q_i, q_j \in Q, i \leqslant j\}$ и функция φ' определена следующим образом: пусть $\varphi(q_i, x) = q_k$ и $\varphi(q_j, x) = q_l$ тогда

$$\varphi'((q_i, q_j), x) = \begin{cases} (q_k, q_l), & k \leqslant l, \\ (q_l, q_k), & k > l. \end{cases}$$

По условию автомат $\mathfrak{A}$ — синхронизуем, следовательно, для любых $q_i, q_j \in Q$ существует слово $\alpha \in A^*$, такое что $\varphi(q, \alpha) = \varphi(q_j, \alpha)$. Пусть $\alpha(q_i, q_j)$ — минимальное по длине слово, обладающее этим свойством и состояние $q(i, j) \in Q$, такое что $q(i, j) = \varphi(q, \alpha(q_i, q_j)) = \varphi(q_j, \alpha(q_i, q_j))$. Автомат $\mathfrak{B}$ имеет $\frac{n(n-1)}{2}$ состояний вида (q_i, q_j), где $i < j$, и n состояний вида (q_i, q_i). Следовательно минимальный пусть из состояний первого вида в состояния второго вида не превышает $\frac{n(n-1)}{2}$, следовательно $|\alpha(q_i, q_j)| \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$.

На состояниях автомата $\mathfrak{A}$ задано отношение границ R порядка r. Пусть $G = \{g_1, \ldots, g_r\} \subseteq Q$ — начальная граница. Построим слово γ, склеивающее эти состояния. Положим $\beta_1 = \alpha(g_1, g_2)$ и $\beta_i = \alpha(\varphi(g_1, \beta_{i-1}), g_{i+1})$, $i = 2, \ldots, r-1$. Положим $\gamma = \beta_1 \ldots \beta_{r-1}$, тогда $G.\gamma = \{q_f\}$.

Итак, в явном виде построено слово $\gamma \in Syn(\mathfrak{A})$ и $|\gamma| \leqslant (r-1) \times \times \frac{n(n-1)}{2}$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Оценка длины минимального синхронизующего слова для граничных автоматов порядка* 2 *улучшает оценку Черни, для класса граничных автоматов порядка* 3 *асимптотически с ней совпадает, для класса граничных автоматов порядка r, при $r \geqslant 4$, совпадает с ней по порядку.*

Фактически теорема 3 содержит алгоритм построения синхронизующего слова.

Следствие 2. *Если $\mathfrak{A} \in \Gamma_n^r$ и известна начальная граница, то алгоритм поиска синхронизующего слова имеет сложность* $Compl((r-1)\frac{n(n-1)}{2}, O((r-1)\frac{n(n-1)}{2}))$

В общем случае задача проверки существует ли в автомате синхронизующее слово длины m является NP-полной [2]. Задача проверки, что в автомате минимальное синхронизующее слово имеет длину

m предположительно не является даже NP-легкой [4]. В том случае, если автомат $\mathfrak{A} \in \Gamma_n^r \cap \Theta$, то обе эти задачи относится к классу P.

Рассмотрим алгоритм $\mathbb{A}_2(\mathfrak{A}, r, m)$ построения синхронизующего слова длины m.

Пусть дан $\mathfrak{A} = (A, Q, \varphi) \in \Gamma_n^r \cap \Theta$, построим автомат $\mathfrak{B} = (A, Q', \varphi')$, где $Q' = \{\{q_1, \ldots, q_r\} | q_i \in Q\}$ и функция переходов φ' определена следующим образом:

$$\varphi'(\{q_1, \ldots, q_r\}, x) = \{\varphi(q_1, x), \ldots, \varphi(q_r, x)\}$$

Пусть G — начальная граница для автомата $\mathfrak{A}$, ясно, что G является состоянием автомата $\mathfrak{B}$. В алгоритме будет использована переменная H типа $SetOf(Q')$ и переменная M типа $Q' \to A^*$. Изначально считаем, что для любого $q \in Q'$, $M(q) = \lambda$.

Алгоритм $\mathbb{A}_2(\mathfrak{A}, r, m)$

```
H = {G};
for (i = 1; i ⩽ m; i++) {
    H' = ∅;
    forall (q ∈ H , x ∈ A) {
        H' = H' ∪ {q};
        M(q) = M(q)x;
    }
    H = H';
}
if (∃q_f ∈ Q : {q_f} ∈ H) {
    α = M({q_f}); //Искомое слово
} else {
    //Искомого слова не существует
}
```

Положим

$$T_n^r = \sum_{i=2}^{r} C_n^i.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* $\mathfrak{A} \in \Gamma_n^r$. *Алгоритм* $\mathbb{A}_2(\mathfrak{A}, r, m)$ *проверяет есть ли в автомате синхронизующее слово длины* m, *и в случае, если существует строит его. Сложность алгоритма* $Compl(mT_n^r, O(mT_n^r))$.

Аналогичным будет алгоритм $\mathbb{A}_3(\mathfrak{A}, r)$ строящий минимальное по длине синхронизующее слово. Отличие будет состоять лишь в том, что в каждом состоянии требуется побывать не более одного раза. Переменная L будет содержать все пройденные состояния, переменная H — граничные состояния, из которых будут делаться новые переходы.

Алгоритм $\mathbb{A}_3(\mathfrak{A}, r)$
$L = \{G\}$;
$H = \{G\}$;
$s = 1$;
while $((H \neq \varnothing)\&(s \leqslant (r-1)\frac{n(n-1)}{2}))$ {
    $H' = \varnothing$;
    forall $(q \in H\ ,\ x \in A)$ {
        $L = L \cup \{q\}$;
        $H' = H' \cup \{q\}$;
        $M(q) = M(q)x$;
    }
    $H = H'$;
    $s = s + 1$;
    if $(\exists q_f \in Q : \{q_f\} \in H)$ {
        $\alpha = M(\{q_f\})$; //Искомое слово
        //завершение алгоритма
    }
}
// Искомого слова не существует

Так же верна аналогичная теорема.

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{A} \in \Gamma_n^r$. Алгоритм $\mathbb{A}_3(\mathfrak{A}, r)$ принадлежит ли $\mathfrak{A}$ классу Θ, и в случае, если принадлежит строит слово из $MinSyn(\mathfrak{A})$. Сложность алгоритма $Compl(T_n^r, O(T_n^r))$.*

6. Асинхронная суперпозиция

В данном разделе мы рассмотрим операцию асинхронной суперпозиции над автоматами и ее связь с граничными автоматами.

Определение 3. Пусть $\mathfrak{A} = (A, Q_0, \varphi_0)$, $\mathfrak{B}_i = (A_i, Q_i, \varphi_i)$, $i = 1 \ldots s$ — множество автоматов и $\bar{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_s)$ — вектор-функция, где

$\psi_i : Q_0 \times A \to A_i^*, i = 1 \dots s$ — произвольные функции. Рассмотрим автомат $\mathfrak{C} = (A, Q, \varphi)$, где $Q = Q_0 \times Q_1 \times \dots \times Q_s$ и функция переходов φ определена следующим образом:

$$\varphi((q_0, q_1, \dots, q_s), x) = (\varphi_0(q_0, x), \varphi(q_1, \psi_1(q_0, x)), \dots, \varphi(q_s, \psi_s(q_0, x))).$$

Автомат $\mathfrak{C}$ назовем автоматом полученным посредством асинхронной суперпозиции автомата $\mathfrak{A}$ с автоматами $\mathfrak{B}_i = (A_i, Q_i, \varphi_i)$, $i = 1 \dots s$ при помощи функции $\bar{\psi}$ и обозначим $\mathfrak{C} = [\mathfrak{A}, \bar{\psi}] \rightsquigarrow (\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_s)$. Вектор-функцию $\bar{\psi}$ назовем управляющей функцией.

В частных случаях операция управления совпадает с классическими операциями над автоматами [1].

Пусть $\mathfrak{A} = (A \times A, Q_0, \varphi_0)$ — автомат с одним состоянием, $s = 2$, $\mathfrak{B}_1 = (A, Q_1, \varphi_1)$, $\mathfrak{B}_2 = (A, Q_1, \varphi_2)$, $\psi_1(a_1, a_2) = a_1$ и $\psi_2(a_1, a_2) = a_2$ тогда $[\mathfrak{A}, \bar{\psi}] \rightsquigarrow (\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ есть параллельное соединение автоматов $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$.

Пусть $\mathfrak{A} = (A^n, Q_0, \varphi_0)$ — автомат с одним состоянием, $s = 1$, $\mathfrak{B}_1 = (A, Q_1, \varphi_1)$ и $\psi_1(a_1, \dots, a_n) = a_1 \dots a_n$ тогда $[\mathfrak{A}, \bar{\psi}] \rightsquigarrow (\mathfrak{B}_1)$ есть возведение автомата $\mathfrak{B}_1$ в n-ую степень.

Положим $B = \{(\psi_1(q, x), \dots, \psi_s(q, x)) | q \in Q_0, x \in A\}$, тогда автомат $\mathfrak{A}$ порождает автомат с выходом $\mathfrak{A}' = (A, Q_0, B, \varphi, \psi)$. Очевидно, что операция управления будет операцией суперпозиции.

Теорема 6. *Пусть* $\mathfrak{A} \in \Gamma^r$, $\mathfrak{B}_i \in \Gamma^{r_i}$, $i = 1 \dots s$ *и* $\bar{\psi}$ *— некоторая управляющая функция. Тогда*

$$\mathfrak{C} = [\mathfrak{A}, \bar{\psi}] \rightsquigarrow (\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_s) \in \Gamma^{dr' + r - 1}$$

где d *— число классов неотличимости автомата* $\mathfrak{A}'$ *и* $r' = \max\{r_1, \dots, r_s\}$.

Доказательство. По теореме 1 можно считать, что $\mathfrak{B}_i \in \Gamma^{r'}$, $i = 1 \dots s$. Пусть G_0 — начальная граница автомата $\mathfrak{A}$ и $G_i = \{g_1^i, \dots, g_{r'}^i\}$ — начальная граница автомата $\mathfrak{B}_i$, $i = 1, \dots, s$. Пусть T_j — классы неотличимости состояний автомата $\mathfrak{A}'$, $j = 1, \dots, d$. Положим $T'_j = T_j \cap G_0 = \{t_1^j, \dots, t_{k_j}^j\}$, $j = 1, \dots, d$.

Построим начальную границу G для автомата $\mathfrak{C} = (A, Q, \varphi) = [\mathfrak{A}, \bar{\psi}] \rightsquigarrow (\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_s)$.

Для каждого $j = 1, \dots, d$ построим множество M_j следующим образом: если $k_j \leqslant r'$, то

$$\begin{aligned}M_j = &\{(t_1^j, g_1^1, \dots, g_1^s), (t_2^j, g_2^1, \dots, g_2^s), \dots, (t_{k_j}^j, g_{k_j}^1, \dots, g_{k_j}^s)\\ &(t_{k_j}^j, g_{k_j+1}^1, \dots, g_{k_j+1}^s), (t_{k_j}^j, g_{k_j+2}^1, \dots, g_{k_j+2}^s), \dots, (t_{k_j}^j, g_{r'}^1, \dots, g_{r'}^s)\}\end{aligned}$$

иначе

$$\begin{aligned}M_j = &\{(t_1^j, g_1^1, \dots, g_1^s), (t_2^j, g_2^1, \dots, g_2^s), \dots, (t_{r'}^j, g_{r'}^1, \dots, g_{r'}^s)\\ &(t_{r'+1}^j, g_{r'}^1, \dots, g_{r'}^s), (t_{r'+2}^j, g_{r'}^1, \dots, g_{r'}^s), \dots, (t_{k_j}^j, g_{r'}^1, \dots, g_{r'}^s)\}\end{aligned}$$

Положим $G = \cup_{j=1}^d M_j$ и так как $k_1 + \dots + k_d = r$, то $|G| \leqslant dr' + k - 1$. Построим отношение на множестве Q^{s+1} отношение $R = \{G.\alpha \mid \alpha \in A^*\}$. Прямой проверкой можно убедиться, что отношение R является отношением границ с начальной границей G. Теорема доказана.

Немного изменив доказательство можно получить следующее следствие.

Следствие 3. *Если число классов классов неотличимости $d = 1$, то $\mathfrak{C} \in \Gamma^{\max\{r,r'\}}$.*

7. Некоторые классы граничных автоматов

7.1. Линейные автоматы

Пусть F_k — конечное поле с k элементами.

Определение 4. Линейным автоматом называется автомат $\mathfrak{A} = (A, Q, \varphi)$, где $A = F_k^r$, $Q = F_k^n$, функция переходов $\varphi : Q \times A \to Q$ имеет вид:

$$\varphi(q, x) = Uq + Vx + l \tag{1}$$

U и V — матрицы размера $n \times n$ и $n \times k$ соответственно над полем F_k.

Класс всех линейных автоматов размерности n над полем мощности k обозначим через KL_n^k. Пусть $\alpha = x_1 \dots x_s$ и $q \in Q$ тогда

$$\begin{aligned}\varphi(q, \alpha) = \varphi(q, x_1 \dots x_s) &= \varphi(\varphi(q, x_1 \dots x_{s-1}), x_s) =\\ &= U\varphi(q, x_1 \dots x_{s-1}) + Vx_s + l =\\ - 3pt &= U(U\varphi(q, x_1 \dots x_{s-2}) + Vx_{s-1} + l) + Vx_s + l =\\ &\dots\\ &= U(\dots(Uq + Vx_1 + l) + Vx_2 + l)\dots) + Vx_s + l,\end{aligned}$$

следовательно
$$\varphi(q,\alpha) = U^s q + L_s(U,V,l,\alpha), \tag{2}$$
где $L_s(U,V,l,\alpha) : A^s \to Q$ — линейное отображение по каждому из x_i, $i = 1 \dots n$.

Положим $e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)^t$ (1 стоит на i-том месте) $i = 1 \dots n$ и $z = (0,\dots,0)^t$.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{A} = (A, Q, \varphi)$ — линейный автомат с функцией переходов $\varphi(q,x) = Uq + Vx + l$. Тогда следующие два условия эквивалентны:*

1) $\exists N : U^N = (0)$*;*

2) $\exists \alpha \in A^* : e_1.\alpha = \dots = e_n.\alpha = z.\alpha = q_f$*.*

Доказательство. 1 $\Rightarrow$ 2. Рассмотрим произвольное слово $\alpha = x_1 \dots x_N \in A^N$ и воспользуемся разложением (2):
$$q.\alpha = U^N q + L_N(U,V,l,\alpha).$$

Следовательно
$$e_1.\alpha = \dots = e_n.\alpha = z.\alpha = q_f = L_N(U,V,l,\alpha).$$

2 $\Rightarrow$ 1 Пусть $\alpha = x_1 \dots x_N$. Из разложения (2) получаем:
$$\begin{gathered} q_f = z.\alpha = U^N z + L_N(U,V,l,\alpha) = L_N(U,V,l,\alpha) \Rightarrow \\ q_f = e_i.\alpha = U^N e_i + q_f \Rightarrow \\ U^N e_i = z \Rightarrow U^N = (0). \end{gathered}$$

Лемма доказана.

Из леммы 2 следуют следующие утверждения.

Теорема 7. $KL_n^k \in \Gamma_{k^n}^{n+1}$ *с начальной границей* $\{z, e_i | i \in N_n\}$*.*

Теорема 8. *Пусть $\mathfrak{A} = (A, Q, \varphi) \in KL_n^k$ и с функцией переходов (1). Тогда $\mathfrak{A}$ синхронизуем тогда и только тогда матрица U — нильпотентна, при этом $MinSyn(\mathfrak{A}) = A^n$.*

Следствие 4. *Предположение Černy верно для класса линейных автоматов.*

7.2. Автоматы сохраняющие порядок

Пусть на множестве Q задано отношение частичного порядка $\preceq_P$. Элемент $q \in Q$ называется минимальным, если не существует отличного от него элемента $q' \in Q$, такого что $q' \preceq_P q$. Множество всех минимальных элементов обозначим через $D_{Min}(P)$. Элемент $q \in Q$ называется максимальным, если не существует отличного от него элемента $q' \in Q$, такого что $q \preceq_P q'$. Множество всех максимальных элементов обозначим через $D_{Max}(P)$.

Определение 5. Пусть на множестве Q задано отношение частичного порядка $\preceq_P$. Автомат $\mathfrak{A} = (A, Q, \varphi)$ назовем сохраняющим порядок $\preceq_P$, если для любого $x \in A$ из $q_1 \preceq_P q_2$ следует $\varphi(q_1, x) \preceq_P \varphi(q_2, x)$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 9. *Пусть автомат $\mathfrak{A} \in K_n$ сохраняет порядок $\preceq_P$ и $r = |D_{Min}(P)| + |D_{Max}(P)|$, тогда $\mathfrak{A} \in \Gamma_n^r$ с начальной границей $G = D_{Min}(P) \cup D_{Max}(P)$.*

8. Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Бабину Дмитрию Николаевичу за постановку задачи и помощь в ее решении.

Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[2] Eppstein David. Reset Sequences for Monotonic Automata. 1990.

[3] Černy J. Poznamka k homogenum eksperimentom s konechnymi automatami // Math.-Fiz. Cas. 14. 1964.

[4] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

[5] Trahtman A. N. The existence of synchronizing word and Černy conjecture for some finite automata.