Математические методы и алгоритмы эмпирического восстановления стохастических и нечетких моделей

Ю. П. Пытьев

Как известно, теоретико-вероятностные методы де-факто оказались неэффективными при моделировании сложных физических, технических, социальных и экономических объектов, субъективных суждений и т. д. Этим объясняется повышенный интерес к невероятностным моделям нечеткости, случайности и неопределенности, характерный для 60–70-х годов. Субъективная вероятность Севеджа, как мера неуверенности субъекта, суждения которого удовлетворяют определенным условиям «рациональности» [1], верхние и нижние вероятности Демпстера, характеризующие неполноту наблюдений и отражающие неопределенность в теории вероятностей, моделируемую многозначными отображениями [2], тесно связанные с емкостью Шоке [3] правдоподобие и доверие Шеффера в теории принятия решений, обобщающие конструкции Демпстера [4], и, наконец, возможность Заде, основанная на его теории нечетких множеств [5, 6], — далеко не полный перечень фундаментальных математических работ, ориентированных на моделирование нечеткости, случайности и неопределенности невероятностными методами.

Причины неэффективности вероятностных методов обусловлены многими факторами. Во-первых, названные объекты зачастую просто не имеют хорошо определенной стохастической компоненты, а в тех случаях, когда ее удается выделить, возникают серьезные проблемы с построением и проверкой адекватности ее теоретико-вероятностной модели. Основная причина возникающих проблем в том, что для эмпирического построения теоретико-вероятностной модели сложного объекта, ра́вно как и для ее верификации, требуются большие объемы наблюдений, которые в конечном счете, как правило, оказываются неполными, неточными и противоречивыми. Дело прежде всего в том, что для их получения обычно требуется время, в течение которого объект и его окружение заметно эволюционируют, вероятностные характеристики объекта, которые должны быть оценены, существенно изменяются, а их оценки, естественно, оказываются неадекватными. Во-вторых, даже если стохастическая природа объекта и его «стационарность» не вызывают сомнений, эмпирическое построение с приемлемой точностью его вероятностной модели может оказаться нереализуемым из-за слишком большого объема необходимых наблюдений, а, в-третьих, если все трудности и окажутся преодолимыми и достаточно точная модель будет построена, она может оказаться настолько сложной, что проблемным окажется ее использование на практике[1].

1. Стохастические и нечеткие модели. Эмпирическое построение и интерпретация

1.1. Стохастическая и нечеткая модели эксперимента

Обозначим $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \Pr)$ вероятностное пространство, для простоты — дискретное, моделирующее стохастический эксперимент Э, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ — множество элементарных исходов Э, $\mathcal{P}(\Omega)$ — класс всех подмножеств Ω, представляющих все исходы Э, $\Pr(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ — вероятность, определенную равенством

[1] Разумеется, не трудно привести примеры стохастических объектов, модели которых могут быть априори охарактеризованы математически, а эмпирически лишь уточнены и верифицированы. Вспомним, что теорию вероятностей «породили» так называемые «азартные игры». Их стохастические модели относительно просты и в процессе игры, как правило, либо не эволюционируют, либо эволюционируют по известным правилам. К этой же категории следует отнести и существенно более сложные стохастические объекты, эволюция моделей которых хорошо описывается, например, линейными разностными, дифференциальными или интегральными стохастическими уравнениями. Математические модели таких объектов могут быть эмпирически восстановлены на основе временных рядов наблюдений за ними, и эти же данные позволяют проверять их адекватность, см., например, [7].

$$\Pr(A) = \sum_{i:\,\omega_i \in A} \mathrm{pr}_i,\ \ A \in \mathcal{P}(\Omega), \tag{1}$$

в котором $\mathrm{pr}_i \triangleq \Pr(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots,$ — распределение[2] $\Pr(\cdot)$. Если $(\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega), \Pr)^n = (\Omega^n,\, \mathcal{P}(\Omega^n), \Pr^n)$ — модель Э^n — n раз взаимно независимо повторенного Э, где $\Pr^n = \Pr \times \ldots \times \Pr$, и $\nu^{(n)}(A)$ — частота исхода A в Э^n, то при $n \to \infty$ почти наверное (п. н.) $\nu^{(n)}(A) \to \Pr(A)$, точнее

$$\forall\ A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \forall \varepsilon > 0\ \lim_{n\to\infty} \overset{\infty}{\Pr} \left(\sup_{k \geqslant n} |\nu^{(k)}(A) - \Pr(A)| > \varepsilon \right) = 0. \tag{2}$$

Усиленный закон больших чисел (З.Б.Ч.) (2) определяет событийно-частотную интерпретацию вероятности, согласно которой с увеличением n частота исхода A приближается и в смысле (2) остается близкой к вероятности A. Этот факт позволяет эмпирически сколь угодно точно оценить вероятность и тем самым определяет ее событийно-частотную интерпретацию.

Теоретико-возможностной (нечеткой) моделью Э является пространство с возможностью $(\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega),\, ¶)$, в котором возможность $\mathrm{P}(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\,1]$, как и вероятность $\Pr(\cdot) :\ \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$, *является мерой, определенной свойствами Э, значение* $\mathrm{P}(A)$ *которой при каждом испытании оценивает шанс любого исхода* $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ *эксперимента по сравнению с шансами любых других его исходов, при этом численные значения* $\mathrm{P}(\cdot)$ *не важны, имеет смысл лишь их упорядоченность.* Более того, любые возможности $¶(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ и $¶'(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ считаются эквивалентными, если для любого $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ найдутся $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ такие, что $\gamma(¶(A)) = \gamma'(P'(A))\gamma(\cdot), \gamma'(\cdot) :$

[2]Нестандартный в русско-язычной литературе термин «распределение вероятности» используется с целью расширения «терминологического единства» теории вероятностей и возможностей, поскольку в данной работе вероятность и возможность рассматриваются как метафизические понятия, *характеризующие объект исследования* подобно метафизическим понятиям силы, тепла и т. п. в духе пропенситивной интерпретации вероятности К. Поппера [8]. В теории вероятностей «распределение» и «вероятность» как правило — синонимы; условимся термин «распределение вероятностей (возможностей)» понимать как распределение вероятностей (возможностей) элементарных событий, значений случайного (нечеткого) элемента и т. п.

$[0,\,1] \to [0,\,1]$ — непрерывные, строго монотонно возрастающие функции, $\gamma(0) = \gamma'(0) = 0$, $\gamma(1) = \gamma'(1) = 1$, Γ — класс всех таких функций, являющийся группой относительно их композиции $\gamma \circ \gamma'(a) \triangleq \gamma(\gamma'(a))$, $a \in [0,\,1]$. Соответственно пространства с возможностью $(\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega),\, ¶)$ и $(\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega),\, ¶')$ являются эквивалентными нечеткими моделями одного и того же Э [9].

Математически этот фрагмент теории возможностей оформляется введением понятия шкалы $\mathcal{L} \triangleq \{[0,1],\, \leqslant,\, \dotplus,\, \bullet\}$ значений возможности и объявлением Γ группой автоморфизмов $\mathcal{L}$. Шкала $\mathcal{L}$ — отрезок с естественной упорядоченностью, определенной отношением $\leqslant$, и двумя бинарными операциями: сложением $\dotplus : [0,\,1]^2 \to [0,\,1]$ и умножением $\bullet : [0,\,1]^2 \to [0,\,1]$, а так как Γ — группа автоморфизмов $\mathcal{L}$, то $\forall\, a, b \in [0,\,1]$, $\forall \gamma(\cdot) \in \Gamma \quad a \leqslant b \iff \gamma(a) \leqslant \gamma(b)$, $\gamma(a \dotplus b) = \gamma(a) \dotplus \gamma(b)$, $\gamma(a \bullet b) = \gamma(a) \bullet \gamma(b)$.

Если правила композиции $\dotplus : [0,\,1]^2 \to [0,\,1]$, $\bullet : [0,\,1]^2 \to [0,\,1]$ удовлетворяют условиям $\forall\, a \in [0,\,1] \quad a \dotplus 0 = a$, $a \dotplus 1 = 1$, $a \bullet 0 = 0$, $a \bullet 1 = a$ и непрерывны, то $a \dotplus b = \max(a, b)$, $a \bullet b = \min(a, b)$, $a, b \in [0,\,1]$, [9]. В согласии с этим

$$\mathrm{P}(A) = \sup_{i:\, \omega_i \in A} \mathrm{p}_i, \;\; A \in \mathcal{P}(\Omega), \tag{3}$$

где $\mathrm{p}_i \triangleq ¶(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$

Все это определяет принципиальное отличие возможности от вероятности. В то время как теоретико-вероятностные модели формулируются в единой шкале значений вероятности, теоретико-возможностные модели могут формулироваться в различных (изоморфных!) шкалах[3], выбираемых исследователями сообразно их предпочтениям. При этом формулируемые в некоторых шкалах модели, доводы, заключения и т. п. считаются эквивалентными, если существует шкала, в которой их формулировки совпадают, а содержательно истолкованы могут быть только те из них, формулировки которых не зависят от выбора шкалы. В частности, высказывания типа «возможность A равна 0,3», «возможность A больше возможности B на 0,1», «возможность A больше возможности B в 2 раза» и т. п. не имеют содержа-

[3]Преобразование $\gamma \in \Gamma$ определяет переход $\mathcal{L} \to \gamma\mathcal{L}$ к шкале $\gamma\mathcal{L}$, изоморфной $\mathcal{L}$. Все шкалы совпадают с точностью до изоморфизма и считаются эквивалентными.

тельной интерпретации, в отличие от равенств $\P(A) = 0$, $\P(A) = 1$, $\P(A) = \P(B)$ и неравенств $\P(A) > 0$, $\P(A) < 1$, $\P(A) < \P(B)$ и т. п., верных в любой шкале, [9].

1.2. Согласованность возможности с вероятностью. Стохастически измеримая возможность

Пусть вероятности $\mathrm{pr}_i \triangleq \Pr(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, элементарных событий упорядочены[4] по невозрастанию

$$1 \geqslant \mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \ldots \geqslant 0, \quad \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \ldots = 1, \tag{4}$$

и $\mathbb{P}\mathrm{r}$ — класс всех таких вероятностей Pr. При *любом определении* возможности $\P$ возможности элементарных событий $p_i \triangleq \mathrm{P}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, должны быть упорядочены аналогично:

$$1 = p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant 0. \tag{5}$$

Класс $\mathbb{P}$ всех таких возможностей P называется *согласованным* с классом $\mathbb{P}\mathrm{r}$. Заметим, что $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, если $\forall \Pr \in \mathbb{P}\mathrm{r}\ \Pr(A) \leqslant \Pr(B)$, то $\forall \P \in \mathbb{P}\ \P(A) \leqslant \P(B)$, [9].

Представим класс $\mathbb{P}$ как объединение непересекающихся неприводимых классов $\mathbb{P}_{(e)}$, $e \in [0, 1]$, *эквивалентных* возможностей, каждая из которых определятся *конкретной упорядоченностью* ее распределения в (5),

$$\mathbb{P} = \bigcup_{e \in (0,1)} \mathbb{P}_{(e)}, \tag{6}$$

где $e = 0.e_1 e_2 \ldots$ — двоичная запись числа из $[0, 1]$, определяющего конкретную упорядоченность распределения $\P \in \mathbb{P}_{(e)}$, заданную отношениями: $\mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1} \iff e_i = 0$, $\mathrm{p}_i > \mathrm{p}_{i+1} \iff e_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots$

Обозначим $\widetilde{\Gamma}$ — класс всех монотонно неубывающих функций $\widetilde{\gamma}(\cdot) : [0, 1] \to [0, 1]$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$; $\Gamma \subset \widetilde{\Gamma}$.

---

[4]Условие упорядоченности (3) позволит проще охарактеризовать отношения между возможностью и вероятностью. Упорядоченность может быть определена эмпирически, см. параграф 2 «Алгоритмы эмпирического упорядочения вероятностей элементарных событий».

Возможность ¶ называется *согласованной* с Pr, Pr $\sim>$ ¶, если $\exists\widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}\ \forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad ¶(A) = \widetilde{\gamma}(\Pr(A))$, $\widetilde{\gamma}(a) = 0 \Longleftrightarrow a = 0$.

Возможность ¶ называется *максимально согласованной* с Pr, Pr $\approx>$ ¶, если Pr $\sim>$ ¶ и $\forall\widetilde{¶}$, Pr $\sim> \widetilde{¶}$, $\exists\widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}$, $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad \widetilde{¶}(A) = \widetilde{\gamma}(¶(A))$. Если Pr $\approx>$ ¶, то ¶ называется Pr-*стохастически измеримой* [9].

В [9] показано, что Pr $\approx>$ ¶, если и только если распределения в (4) и (5) удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &e_i = 1 \Longleftrightarrow p_i > p_{i+1} \Longleftrightarrow f_i \triangleq \mathrm{pr}_1 + \dots + \mathrm{pr}_{i-1} + 2\mathrm{pr}_i > 1, \\ &e_i = 0 \Longleftrightarrow p_i = p_{i+1} \Longleftrightarrow f_i \leqslant 1,\ i = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{7}$$

Если Pr $\approx>$ ¶, то каждый исход A стохастического эксперимента $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \Pr)$, вероятность которого определена в (1), можно интерпретировать как исход A нечеткого эксперимента $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), ¶)$, возможность которого определена в (3), причем

$$¶(A) \triangleq \sup_{i:\omega_i \in A} p_i = \widetilde{\gamma}(\Pr(A)) \triangleq \widetilde{\gamma}(\sum_{i:\omega_i \in A} \mathrm{pr}_i),\ A \in \mathcal{P}(\Omega), \tag{8}$$

где $\widetilde{\gamma}(\cdot) : [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ — произвольная (фиксированная) функция из определяемого соотношениями (7) класса $\widetilde{\Gamma}(\Pr) \subset \widetilde{\Gamma}$ непрерывных на $(0, 1]$ монотонно неубывающих функций [9].

На самом деле возможность P, даже максимально согласованная с вероятностью Pr, может «не чувствовать» вероятностных отличий между событиями из $\mathcal{P}(\Omega)$, например, может так случиться, что $\mathrm{P}(A) = 1$ для каждого непустого $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. В таком случае класс $\mathcal{P}(\Omega)$ всех подмножеств Ω должен быть сужен до σ-алгебры $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ подмножеств Ω, вероятности которых достаточно «контрастны», чтобы их отличия могла «передать» возможность, *максимально согласованная с вероятностью* Pr *на* $\mathcal{A}$.

Возможность ¶ называется *согласованной с* Pr *на* σ*-алгебре* $\mathcal{A}$, Pr $\overset{\mathcal{A}}{\sim>}$ ¶, если $\exists\widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}\ \forall A \in \mathcal{A} \quad ¶(A) = \widetilde{\gamma}(\Pr(A))$, $\widetilde{\gamma}(a) = 0 \Longleftrightarrow a = 0$.

Возможность ¶ называется *максимально согласованной с* Pr *на* σ*-алгебре* $\mathcal{A}$, Pr $\overset{\mathcal{A}}{\approx>}$ ¶, если Pr $\overset{\mathcal{A}}{\sim>}$ ¶ и $\forall\widetilde{¶}$, Pr $\overset{\mathcal{A}}{\sim>} \widetilde{¶}$, $\exists\widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}$, $\forall A \in \mathcal{A} \quad \widetilde{¶}(A) = \widetilde{\gamma}(¶(A)) \triangleq \widetilde{\gamma} * ¶(A)$.

Выбирая должным образом σ-алгебру $\mathcal{A}$, можно и вероятность максимально согласовать на $\mathcal{A}$ с возможностью[5].

1.3. Событийно-частотная интерпретация и эмпирическое построение Pr-стохастически измеримой возможности

Связь возможности с вероятностью в (8) и З.Б.Ч. (2) позволяют дать и возможности событийно-частотную интерпретацию, которая с учетом произвольности функции $\widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}(\mathrm{Pr})$ такова: *если* $\P(A) > \P(B)$, *то* $\exists \overline{n} = \overline{n}(A, B)$ $\forall n \geqslant \overline{n}$ $\nu^{(n)}(A) \overset{п.\,н.}{>} \nu^{(n)}(B)$, *то есть упорядоченность возможностей исходов* Э *при достаточно больших n определяет такую же упорядоченность их частот.*

Согласно соотношениям (7) каждому классу возможностей $\mathbb{P}_{(e)}$ из (6), распределения которых упорядочены согласно $e \in (0,\,1)$, сопоставлен класс вероятностей $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, распределения которых удовлетворяют условиям в (7), причем так, что любая возможность $\P \in \mathbb{P}_{(e)}$ максимально согласована со всеми вероятностями $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ и только с ними, а классы $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, $e \in (0,\,1)$, образуют разбиение класса $\mathbb{P}\mathrm{r}$:

$$\mathbb{P}\mathrm{r} = \bigcup_{e \in (0,\,1)} \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}, \tag{9}$$

индуцированное разбиением (6). *Разбиения* (6) *и* (9) *позволяют свести задачу эмпирического определения стохастически измеримой возможности к задаче проверки статистических гипотез о принадлежности вероятности* $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$, *контролирующей наблюдения, к одному из классов* $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, $e \in (0,\,1)$, [9].

1.4. Событийно-частотная интерпретация и эмпирическое построение Pr^1-, …, Pr^k-стохастически измеримой возможности

Каждый класс $\mathbb{P}_{(e)}$ в разбиении (6) определяет по существу *единственную* (с точностью до эквивалентности) возможность $\P \in \mathbb{P}_{(e)}$.

[5] См. параграф 4 «Алгоритмы эмпирического построения стохастически измеримой возможности и σ-алгебры, максимально согласующей вероятность с возможностью».

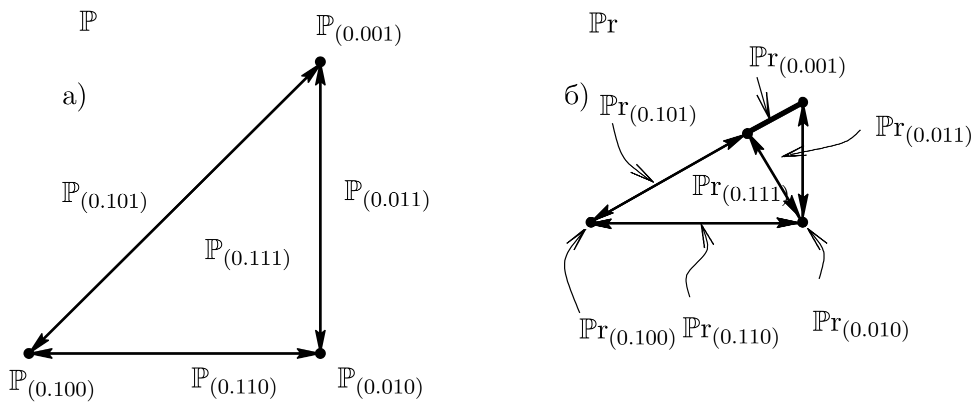

Рис. 1. Для $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$: а) «треугольник возможностей» $\mathbb{P}$ и семь классов распределений $\mathbb{P}_{(0.100)}, \dots, \mathbb{P}_{(0.111)}$, образующих разбиение $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{(0.100)} \cup \mathbb{P}_{(0.010)} \cup \dots \cup \mathbb{P}_{(0.111)}$ (6) и определяющих семь попарно различных неприводимых классов $\mathbb{P}_{(0.100)}, \dots, \mathbb{P}_{(0.111)}$ эквивалентных возможностей. б) «Треугольник вероятностей» $\mathbb{P}\mathrm{r}$ и семь его подмножеств — прообразов $\mathbb{P}_{(0.100)}, \dots, \mathbb{P}_{(0.111)}$, образующих разбиение (9). При этом $\mathbb{P}_{(0.100)} = \mathbb{P}(\mathrm{Pr})$, $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.100)}, \dots, \mathbb{P}_{(0.111)} = \mathbb{P}(\mathrm{Pr})$, $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$; классы вероятностей $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.100)} = \mathbb{P}\mathrm{r}(\P)$, $\P \in \mathbb{P}_{(0.100)}, \dots$, $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)} = \mathbb{P}\mathrm{r}(\P)$, $\P \in \mathbb{P}_{(0.111)}$, образуют разбиение (9) треугольника $\mathbb{P}\mathrm{r}$. Всем вероятностям $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ соответствует единственная с точностью до эквивалентности возможность $\P \in \mathbb{P}_{(e)}$, $\mathrm{Pr} \approx> \P$, $e = 0.100, \dots, 0.111$.

Классу $\mathbb{P}_{(e)}$ соответствует в (9) класс $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ *различных* вероятностей $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, с каждой из которых максимально согласована любая возможность $\P \in \mathbb{P}_{(e)}$, $e \in (0,\,1)$, см. рис.1. Этот результат позволяет эмпирически восстанавливать нечеткие модели многих из названных выше объектов, стохастические модели которых эмпирически восстановить невозможно.

Рассмотрим последовательность взаимно независимых экспериментов $(\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega),\, \mathrm{Pr}_1), (\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega),\, \mathrm{Pr}_2), \dots, (\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega),\, \mathrm{Pr}_n)$, стохастической моделью которой является вероятностное пространство $(\Omega \times \dots \times \Omega,\, \mathcal{P}(\Omega \times \dots \times \Omega),\, \mathrm{Pr}_1 \times \dots \times \mathrm{Pr}_n)$.

В этом случае усиленный З.Б.Ч. гарантирует, что $\forall \varepsilon > 0\ \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\lim_{N\to\infty} \overset{\infty}{\Pr} \left(\sup_{n\geqslant N} \left|\nu^{(n)}(A) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Pr_i(A)\right| > \varepsilon \right) = 0. \tag{10}$$

Пусть среди вероятностей $\Pr_1, \Pr_2, \ldots$ конечное число k различных, скажем, $\Pr^1, \ldots, \Pr^k$, распределения $\mathrm{pr}_i^s \triangleq \Pr^s(\{\omega_i\})$, $s = 1, \ldots, k, i = 1, 2, \ldots$, которых упорядочены согласно условию

$$\mathrm{pr}_1^s \geqslant \mathrm{pr}_2^s \geqslant \cdots \geqslant 0,\ \mathrm{pr}_1^s + \mathrm{pr}_2^s + \cdots = 1,\ s = 1, \ldots, k, \tag{11}$$

и $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ — некоторое событие. Тогда в (10)

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Pr_i(A) = \sum_{s=1}^{k} (n_s/n) \overset{s}{\Pr}(A) \triangleq \Pr_{(n)}(A), \tag{12}$$

где n_s/n — частота, с которой вероятность $\Pr^s$ встречается в последовательности $\Pr_1, \ldots, \Pr_n$, $s = 1, \ldots, k$, $n_1/n + \cdots + n_k/n = 1$. Поскольку при $n = 1, 2, \ldots$ частоты n_s/n, $s = 1, \ldots, k$, изменяются, вообще говоря, произвольно, оставаясь в пределах отрезка $[0,\, 1]$, значение $\Pr_{(n)}(A)$ (12) произвольно «блуждает» по отрезку $[\min\limits_{1\leqslant s\leqslant k} \Pr^s(A), \max\limits_{1\leqslant s\leqslant k} \Pr^s(A)]$, и за ним при $n \to \infty$ согласно З.Б.Ч. (10) все более точно следует частота $\nu^{(n)}(A)$.

В этом случае знание вероятностей $\Pr^1(A), \ldots, \Pr^k(A)$ *не позволяет оценить частоту* $\nu^{(n)}(A)$*, а наблюдение за частотами* $\nu^{(n)}(A)$*,* $n = 1, 2, \ldots$*, не позволяет восстановить стохастическую модель наблюдений.*

Вместе с тем, если вероятности $\Pr^1, \ldots, \Pr^k$ *таковы, что существует возможность* P*, максимально согласованная с каждой вероятностью*[6] $\Pr^1, \ldots, \Pr^k$ *(то есть* $\Pr^s \approx> \P$*,* $s = 1, \ldots, k$*; возможность* $\P$ *называется* $\Pr^1$*-*$, \ldots,$ $\Pr^k$*- стохастически измеримой), то при дополнительном условии* (16) *регулярности* $\Pr^1, \ldots, \Pr^k$ *класс* $\mathbb{P}_{(e)}$ *эквивалентных* $\P$ *возможностей можно восстановить п. н. безошибочно на основе конечного числа наблюдений и любой возможности из класса* $\mathbb{P}_{(e)}$ *дать следующую событийно-частотную*

[6]Иначе говоря, существует $e = 0.e_1e_2\ldots \in (0,\, 1)$, такое, что $\Pr^1 \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}, \ldots, \Pr^s \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, речь идет о $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$, см. (6), (9).

интерпретацию: если $P(A) > P(B)$, то существует число $N(A,B)$, такое, что $\nu^{(n)}(A) \overset{п.\,н.}{>} \nu^{(n)}(B)$ для всех $n \geqslant N(A,B)$.

Рассмотрим вначале событийно-частотную интерпретацию возможности. Заметим, что в последовательности n независимых испытаний частота события A

$$\nu^{(n)}(A) = \sum_{s=1}^{k} (n_s/n)\nu^{(n_s)}(A), \tag{13}$$

где $\nu^{(n_s)}(A)$ — частота события A в подпоследовательности последовательности n испытаний, в которой исход контролируется вероятностью Pr^s. Согласно усиленному З.Б.Ч. (2) при $n \to \infty$

$$\nu^{(n_s)}(A) \xrightarrow{\text{п. н.}} \overset{s}{\mathrm{Pr}}(A),\ s = 1,\dots,k. \tag{$*$}$$

Условие максимальной согласованности ¶ с $\mathrm{Pr}^1,\dots,\mathrm{Pr}^k$ означает, что существует $e = 0.e_1e_2\dots$, такое, что распределение в (5) возможности ¶ и распределения вероятностей $\mathrm{Pr}^1,\dots,\mathrm{Pr}^k$ в (11) должны удовлетворять условиям[7]

$$\begin{aligned} &e_j = 1 \Longleftrightarrow p_j > p_{j+1}, \Longleftrightarrow f_j^s \triangleq \mathrm{pr}_1^s + \dots + \mathrm{pr}_{j-1}^s + 2\mathrm{pr}_j^s > 1,\\ &e_j = 0 \Longleftrightarrow p_j = p_{j+1}, \Longleftrightarrow f_j^s \leqslant 1,\ j = 1,2,\dots,\ s = 1,\dots,k, \end{aligned} \tag{14}$$

для каждого $s = 1,\dots,k$, означающим, что $¶ \in \mathbb{P}_{(e)}$ и $\mathrm{Pr}^s \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, то есть что $\mathrm{Pr}^s \approx> ¶$, $s = 1,\dots,k$. Следовательно, существуют функции $\tilde{\gamma}_s(\cdot) \in \tilde{\Gamma}(\mathrm{Pr}^s)$, $s = 1,\dots,k$, такие, что для любого $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $P(A) = \tilde{\gamma}_1(\mathrm{Pr}^1(A)) = \dots = \tilde{\gamma}_k(\mathrm{Pr}^k(A))$. Поэтому согласно сходимости в $(*)$ при $n \to \infty$ $\tilde{\gamma}_s(\nu^{(n_s)}(A)) \xrightarrow{\text{п. н.}} \tilde{\gamma}_s(\mathrm{Pr}^s(A)) = P(A)$, $s = 1,\dots,k$, и, следовательно, если $P(A) > P(B)$, то $\mathrm{Pr}^s(A) > \mathrm{Pr}^s(B)$, $s = 1,\dots,k$, а это означает, что существует число $N(A,B)$, такое, что с вероятностью единица $\nu^{(n_s)}(A) > \nu^{(n_s)}(B)$ для всех $n > N(A,B)$ и $s = 1,\dots,k$. Отсюда согласно равенству (13) следует, что *и в рассматриваемом случае изменяющейся вероятности неравенство $P(A) > P(B)$ п. н. влечет неравенство $\nu^{(n)}(A) > \nu^{(n)}(B)$ для всех $n > N(A,B)$.*

[7]Условия (14) означают, что возможность ¶ Pr^s-стохастически измерима для всех $s = 1,\dots,k$, [9].

Рассмотрим задачу эмпирического восстановления возможности, которая, как легко видеть, эквивалентна задаче эмпирического определения $e \in (0,1)$, для которого $\mathrm{Pr}^s \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, $s = 1, \ldots, k$.

Выберем в качестве A в равенствах (12) и (13) $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots, \{\omega_m\}$ и перепишем их в виде

$$\underset{(n)}{\mathrm{Pr}}(\{\omega_j\}) \triangleq \mathrm{pr}_j^{(n)} = \sum_{s=1}^{k} (n_s/n)\mathrm{pr}_j^s \ , j = 1, \ldots, m, \qquad (12^*)$$

$$\nu^{(n)}(\{\omega_j\}) \triangleq \nu_j^{(n)} = \sum_{s=1}^{k} (n_s/n)\nu_j^{(n_s)} \ , j = 1, \ldots, m. \qquad (13^*)$$

Так как при $n \to \infty$ для всех $s = 1, \ldots, k$ и любого $m = 1, 2, \ldots$ $\big(\nu_1^{(n_s)}, \ldots, \nu_m^{(n_s)}\big) \xrightarrow{\text{п. н.}} (\mathrm{pr}_1^s, \ldots, \mathrm{pr}_m^s)$, то согласно (12*), (13*) при $n \to \infty$ $\nu_j^{(n)} - \mathrm{pr}_j^{(n)} \xrightarrow{\text{п. н.}} 0$, $j = 1, 2, \ldots$, и, следовательно,

$$\hat{f}_j^{(n)} - f_j^{(n)} \xrightarrow{\text{п. н.}} 0, \ j = 1, 2, \ldots, \qquad (15)$$

где $f_j^{(n)} \triangleq \mathrm{pr}_1^{(n)} + \cdots + \mathrm{pr}_{j-1}^{(n)} + 2\mathrm{pr}_j^{(n)}$, $\hat{f}_j^{(n)} \triangleq \nu_1^{(n)} + \cdots + \nu_{j-1}^{(n)} + 2\nu_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \ldots$, причем согласно (14) и (12*) для всех $n = 1, 2, \ldots$, если в (14) $f_j^s \leqslant 1 (f_j^s > 1,)$ то в (15) $f_j^{(n)} \leqslant 1$ $(f_j^{(n)} > 1)$, $j = 1, 2, \ldots$

Пусть выполнено *условие регулярности* вероятностей $\mathrm{Pr}^1, \ldots, \mathrm{Pr}^k$, то есть пусть в (14)

$$f_j^s \neq 1, \ s = 1, \ldots, k, \ j = 1, 2, \ldots. \qquad (16)$$

Тогда в силу сходимости (15) для любого $m = 1, 2, \ldots$ $\exists \overline{n} = n(m)$ $\forall n \geqslant \overline{n}$ $f_j^{(n)} < 1$ $(f_j^{(n)} > 1) \overset{\text{п. н.}}{\Longrightarrow} \hat{f}_j^{(n)} < 1$ $(\hat{f}_j^{(n)} > 1)$, $j = 1, \ldots, m$. Следовательно, на основе конечного (зависящего от m) числа наблюдений п. н. безошибочно определяются значения $e_1, \ldots, e_m$ в $e = 0.e_1 e_2 \ldots$ то есть – конкретная упорядоченность в $1 = \mathrm{p}_1 \geqslant \mathrm{p}_2 \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{p}_m$. Этого достаточно для восстановления упорядоченности возможностей $¶(A)$ и $¶(B)$ любых событий $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$. Действительно, пусть $i(A) \triangleq \min\limits_{\omega_i \in A} i$, $i(B) = \min\limits_{\omega_i \in B} i$, тогда $¶(A) = ¶(B)$, если $i(A) = i(B)$, а если, скажем, $i(A) < i(B)$, то $¶(A) \geqslant ¶(B)$, и на основе $n(i(B))$ наблюдений п. н. безошибочно можно выбрать одну из альтернатив $¶(A) = ¶(B)$, или $¶(A) > ¶(B)$.

2. Алгоритмы эмпирического упорядочения и оценивания вероятностей элементарных событий

В задачах эмпирического упорядочения вероятностей элементарных событий моделью последовательности n взаимно независимых испытаний является вероятностное пространство $(\Omega^n, \mathcal{P}(\Omega^n), \mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}) = (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_1) \times \ldots \times (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_n)$, в котором $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, $\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n} = \mathrm{Pr}_1 \times \ldots \times \mathrm{Pr}_n$ и $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_j)$ — модель j-го испытания. Результатом n испытаний является совокупность частот элементарных событий

$$\nu_i^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \chi_i(\omega^{(j)}),\ i = 1, 2 \ldots, \tag{17}$$

где $\omega^{(j)}$ — исход j-го испытания, $\chi_i(\omega) = \begin{cases} 1,\ \omega = \omega_i, \\ 0,\ \omega \neq \omega_i, \end{cases}$ — индикаторная функция элементарного события $\{\omega_i\}$, и все слагаемые $\chi_i(\omega^{(1)}) + \ldots + \chi_i(\omega^{(n)})$ взаимно независимы, $i = 1, 2, \ldots$ Вероятности элементарных событий $\mathrm{Pr}_j(\{\omega_i\}), i = 1, \ldots, n$, попарно различны и одинаково упорядочены при всех испытанииях $j = 1, 2, \ldots$, то есть для каждой пары $\omega_i,\ \omega_k,\ i \neq k$, либо $\mathrm{Pr}_j(\{\omega_i\}) > \mathrm{Pr}_j(\{\omega_k\})$, либо $\mathrm{Pr}_j(\{\omega_i\}) < \mathrm{Pr}_j(\{\omega_k\})$, для всех $j = 1, 2, \ldots$ Значения $\mathrm{Pr}_j(\{\omega_i\}),\ i = 1, 2, \ldots,\ j = 1, 2, \ldots$, разумеется, неизвестны и не важны, представляет интерес лишь их упорядоченность, определяемая знаками всех разностей $\mathrm{Pr}_j(\{\omega_i\}) - \mathrm{Pr}_j(\{\omega_k\}),\ i \neq k,\ i, k = 1, 2, \ldots$, которая и подлежит определению на основе наблюдения значений частот (17).

Для построения алгоритмов эмпирического упорядочения вероятностей $\mathrm{Pr}_j(\omega_1), \mathrm{Pr}_j(\omega_2), \ldots, j = 1, 2, \ldots$, воспользуемся следующими фактами.

Лемма 1 (Хёфдинг, [19, 20]). *Если случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ взаимно независимы и $\mathrm{Pr}(a_k \leqslant \xi_k \leqslant b_k) = 1,\ k = 1, \ldots, n$, то для любого $\varepsilon > 0$*

$$\Pr(\{Z_n - \mathbf{E}Z_n > n\varepsilon\}) \leqslant \exp(-2n^2\varepsilon^2/\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k)^2), \tag{18}$$

где $Z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$.

При условиях леммы 1

$$\Pr(\{Z_n - \mathbf{E}Z_n < -n\varepsilon\}) \leqslant \exp(-2n^2\varepsilon^2/\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k)^2) \tag{19}$$

и

$$\Pr(\{|Z_n - \mathbf{E}Z_n| > n\varepsilon\}) \leqslant 2\exp(-2n^2\varepsilon^2/\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k)^2). \tag{20}$$

Действительно, для $\widetilde{\xi}_k = -\xi_k \quad - b_k \leqslant \widetilde{\xi}_k \leqslant -a_k$, $k = 1, \ldots, n$, и $\widetilde{Z}_n - \mathbf{E}\widetilde{Z}_n > n\varepsilon \leftrightarrow Z_n - \mathbf{E}Z_n < -n\varepsilon$; неравенство (20) следует из неравенств (18) и (19).

Если в (18) $\xi_k = \chi_i(\omega^{(k)})$, где $\omega^{(k)}$ — исход k-го испытания, модель которого $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \Pr_k)$, $k = 1, \ldots, n$, то

$$\overset{(n)}{\underset{1,\ldots,n}{\Pr}}(\{\nu_i^{(n)} - \mathbf{E}_{1,\ldots,n}^{(n)}\nu_i^{(n)} > \varepsilon\}) \leqslant \exp(-2n\varepsilon^2), \tag{21}$$

$$\overset{(n)}{\underset{1,\ldots,n}{\Pr}}(\{\nu_i^{(n)} - \mathbf{E}_{1,\ldots,n}^{(n)}\nu_i^{(n)} < -\varepsilon\}) \leqslant \exp(-2n\varepsilon^2), \tag{22}$$

$$\overset{(n)}{\underset{1,\ldots,n}{\Pr}}(\{|\nu_i^{(n)} - \mathbf{E}_{1,\ldots,n}^{(n)}\nu_i^{(n)}| > \varepsilon\}) \leqslant 2\exp(-2n\varepsilon^2),\ i = 1, 2, \ldots \tag{23}$$

Неравенства (21), (22), (23) позволяют получить следующие интервальные оценки для «эмпирических вероятностей»[8] $\mathrm{pr}_i^{(n)} \triangleq$

[8]При каждом n, $\mathrm{pr}_i^{(n)} \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots$, и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{pr}_i^{(n)} = 1$. Так как при $n \to \infty$ $\nu_i^{(n)} - \mathrm{pr}_i^{(n)} \xrightarrow{\text{п. н.}} 0$, то «эмпирические вероятности» $\mathrm{pr}_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \ldots$, могут быть восстановлены эмпирически

$\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\mathrm{Pr}_j(\{\omega_i\}) = \mathbf{E}^{(n)}_{1,\ldots,n}\nu_i^{(n)},\ i=1,2,\ldots,$:

$$\underset{1,\ldots,n}{\overset{(n)}{\mathrm{Pr}}}\left(\left\{\mathrm{pr}_i^{(n)} \geqslant \nu_i^{(n)} - \left(\frac{1}{2n}\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{1/2}\right\}\right) \geqslant 1-\alpha,\ i=1,2,\ldots, \tag{24}$$

если в (21) $\exp(-2n\varepsilon^2)=\alpha$,

$$\underset{1,\ldots,n}{\overset{(n)}{\mathrm{Pr}}}\left(\left\{\mathrm{pr}_i^{(n)} \leqslant \nu_i^{(n)} + \left(\frac{1}{2n}\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{1/2}\right\}\right) \geqslant 1-\alpha,\ i=1,2,\ldots, \tag{25}$$

если в (22) $\exp(-2n\varepsilon^2)=\alpha$, и

$$\underset{1,\ldots,n}{\overset{(n)}{\mathrm{Pr}}}\left(\left\{\nu_i^{(n)} - \left(\frac{1}{2n}\ln\frac{2}{\alpha}\right)^{1/2} \leqslant \mathrm{pr}_i^{(n)} \leqslant \nu_i^{(n)} + \left(\frac{1}{2n}\ln\frac{2}{\alpha}\right)^{1/2}\right\}\right) \geqslant$$
$$\geqslant 1-\alpha,\ i=1,2,\ldots, \tag{26}$$

если в (23) $2\exp(-2n\varepsilon^2)=\alpha$, характеризующие ошибки приближения «эмпирической вероятности» $\mathrm{pr}_i^{(n)}$ частотой $\nu_i^{(n)}$, $i=1,2,\ldots,$ $n=1,2,\ldots$ Заметим, что согласно (23) при $n\to\infty$, $\nu_i^{(n)}-\mathrm{pr}_i^{(n)} \xrightarrow{\text{п. н.}} 0$, ибо при любом $\varepsilon>0$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\exp(-2n\varepsilon^2)<\infty$, и, следовательно, при любом $\varepsilon>0$ согласно лемме Бореля-Кантелли[9] может произойти лишь п. н. конечное число событий $\{|\nu_i^{(n)}-\mathrm{pr}_i^{(n)}|>\varepsilon\},\ n=1,2,\ldots$

2.1. Алгоритм эмпирического упорядочения вероятностей элементарных событий, не изменяющихся в процессе испытаний

Моделью последовательности n взаимно независимых испытаний в рассматриваемом случае является вероятностное пространство

[9] Действительно, событие $A=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k\geqslant n}A_k$ происходит тогда и только тогда, когда происходит бесконечно много событий последовательности $A_1,A_2,\ldots$ Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{Pr}(A_k)<\infty$, то $\mathrm{Pr}(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{Pr}(\bigcup\limits_{k\geqslant n}A_k)\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k\geqslant n}\mathrm{Pr}(A_k)=0$.

$(\Omega^n, \mathcal{P}(\Omega^n),\ \Pr^{(n)}) = (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \Pr) \times \ldots \times (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \Pr)$, в котором $\Pr^{(n)} = \underbrace{\Pr \times \ldots \times \Pr}_{n \text{ раз}}$.

Задача эмпирического упорядочения вероятностей $\mathrm{pr}_i = \Pr(\{\omega_i\})$, $i = 1, \ldots, s$, элементарных событий состоит в том, чтобы на основе результатов наблюдений частот $\nu_1^{(n)}, \ldots, \nu_s^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, (17) элементарных событий определить с гарантированной вероятностью правильные отношения $\mathrm{pr}_i > \mathrm{pr}_k$ или $\mathrm{pr}_i < \mathrm{pr}_k$ для $s(s-1)/2$ пар $(i < k) \in \{1, \ldots, s\} \times \{1, \ldots, s\} \equiv \{1, \ldots, s\}^2$, $s = 2, 3, \ldots$

Обозначим

$$\nu_{ik}^{(n)} \triangleq \nu_i^{(n)} - \nu_k^{(n)},\ \mathrm{pr}_{ik} \triangleq \mathrm{pr}_i - \mathrm{pr}_k = \mathbf{E}^{(n)} \nu_{ik}^{(n)},\ i, k = 1, 2, \ldots,\ i < k, \tag{27}$$

и сформулируем задачу эмпирического упорядочения вероятностей $\mathrm{pr}_1, \ldots, \mathrm{pr}_s$ как задачу определения знаков pr_{ik}, $i < k$, на основе наблюденных значений $\nu_{ik}^{(n)}, i < k$, $i, k = 1, \ldots, s$, $n = 1, 2 \ldots$, $s = 2, 3, \ldots$

Так как

$$\nu_{ik}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (\chi_i(\omega^{(j)}) - \chi_k(\omega^{(j)})), \tag{28}$$

где слагаемые для $j = 1, \ldots, n$ взаимно независимы и принимают значения $-1, 0$ и 1, то согласно лемме 1 и подобно оценкам (21), (22) и (23) для любого $\delta > 0$ соответственно

$$\overset{(n)}{\Pr}(\{\nu_{ik}^{(n)} - \mathrm{pr}_{ik} > \delta\}) \leqslant \exp(-n\delta^2/2), \tag{29}$$

$$\overset{(n)}{\Pr}(\{\nu_{ik}^{(n)} - \mathrm{pr}_{ik} < -\delta\}) \leqslant \exp(-n\delta^2/2), \tag{30}$$

$$\overset{(n)}{\Pr}(\{|\nu_{ik}^{(n)} - \mathrm{pr}_{ik}| > \delta\}) \leqslant 2\exp(-n\delta^2/2), \tag{31}$$

и согласно (24), (25) и (26) соответственно

$$\overset{(n)}{\Pr}\left(\left\{\mathrm{pr}_{ik} \geqslant \nu_{ik}^{(n)} - \left(\frac{2}{n} \ln \frac{1}{\alpha}\right)^{1/2}\right\}\right) > 1 - \alpha, \tag{32}$$

$$\overset{(n)}{\Pr}\left(\left\{\mathrm{pr}_{ik} \leqslant \nu_{ik}^{(n)} + \left(\frac{2}{n} \ln \frac{1}{\alpha}\right)^{1/2}\right\}\right) > 1 - \alpha, \tag{33}$$

если в (29), (30) $\exp(-n\delta^2/2)=\alpha$, и

$$\overset{(n)}{\mathrm{Pr}}\left(\left\{\nu_{ik}^{(n)}-\left(\frac{2}{n}\ln\frac{2}{\alpha}\right)^{1/2}\leqslant \mathrm{pr}_{ik}\leqslant \nu_{ik}^{(n)}+\left(\frac{2}{n}\ln\frac{2}{\alpha}\right)^{1/2}\right\}\right)>1-\alpha, \tag{34}$$

если в (31) $2\exp(-n\delta^2/2)=\alpha$.

Условия (32)–(34) определяют случайные множества

$$\left\{\mathrm{pr}_{ik}\in[-1,1],\ \mathrm{pr}_{ik}\geqslant \nu_{ik}^{(n)}-\left(\frac{2}{n}\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{1/2}\right\}, \tag{35}$$

$$\left\{\mathrm{pr}_{ik}\in[-1,1],\ \mathrm{pr}_{ik}\leqslant \nu_{ik}^{(n)}+\left(\frac{2}{n}\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{1/2}\right\}, \tag{36}$$

$$\left\{\mathrm{pr}_{ik}\in[-1,1],\ \nu_{ik}^{(n)}-\left(\frac{2}{n}\ln\frac{2}{\alpha}\right)^{1/2}\leqslant \mathrm{pr}_{ik}\leqslant \nu_{ik}^{(n)}+\left(\frac{2}{n}\ln\frac{2}{\alpha}\right)^{1/2}\right\}, \tag{37}$$

покрывающие истинное значение pr_{ik} с вероятностью, большей $1-\alpha$, $\alpha\in(0,1),\ i<k,\ i,k=1,2,\ldots,\ n=1,2,\ldots$

Поскольку согласно оценкам (29)–(34) для определения знака pr_{ik} требуется тем больше испытаний, чем меньше $|\mathrm{pr}_{ik}|$, алгоритм эмпирического упорядочения вероятностей $\mathrm{pr}_1,\ldots,\mathrm{pr}_s$ должен «распознавать малость» $|\mathrm{pr}_{ik}|$ и «принимать решение» продолжить испытания, если значение $|\nu_{ik}^{(n)}|$ свидетельствует о малости $|\mathrm{pr}_{ik}|$.

Рассмотрим следующий алгоритм статистических решений об упорядоченности вероятностей $\mathrm{pr}_1,\ldots,\mathrm{pr}_s$:

для всех пар $(i<k)\in\{1,\ldots,s\}\times\{1,\ldots,s\}$ и $n=1,2,\ldots$

- если $\nu_{ik}^{(n)}>\delta^{(n,s)}$, то $\square_1$: считать $\mathrm{pr}_{ik}>0$;
- если $\nu_{ik}^{(n)}<-\delta^{(n,s)}$, то $\square_2$: считать $\mathrm{pr}_{ik}<0$; (38)
- если $|\nu_{ik}^{(n)}|\leqslant\delta^{(n,s)}$, то $\circlearrowright$: продолжить испытания.

В алгоритме (38) при каждом $n=1,2,\ldots$ проверяются условия решений $\square_1,\square_2$ и $\circlearrowright$ для всех $s(s-1)/2$ пар $i<k, i,k=1,\ldots,s$. Если для всех пар при некотором n приняты только решения $\square_1$ или $\square_2$, то алгоритм (38) завершен, если же хотя бы для одной пары принято

решение $\circlearrowright$, то при каждом следующем испытании проверяются условия решений $\square_1, \square_2$ и $\circlearrowright$, и ранее принятые решения корректируются для всех $s(s-1)/2$ пар $i < k,\ i, k = 1, \ldots, s$. Подчеркнем, что решения $\square_1$ и $\square_2$ относятся к каждой отдельной паре $i < k$, а решение $\circlearrowright$ относится ко всем $s(s-1)/2$ парам.

Задача эмпирического упорядочения вероятностей $\mathrm{pr}_1, \ldots, \mathrm{pr}_s$ будет решена, если на основе наблюденных значений $\nu_{ik}^{(n)}$, $(i < k) \in \{1, \ldots, s\} \times \{1, \ldots, s\}$ будут приняты все $s(s-1)/2$ решений $\square_1$ или $\square_2$ и оценены вероятности сопутствующих ошибок, поскольку это позволит определить упорядоченность $\mathrm{pr}_{i_1} > \ldots > \mathrm{pr}_{i_s}$ вероятностей $\mathrm{pr}_1, \ldots, \mathrm{pr}_s$, с гарантированной вероятностью совпадающую с истинной их упорядоченностью.

Рассмотрим подробнее алгоритм (38) для фиксированной пары $i < k$. В (38), как уже было сказано, $\square_{1,2}$ — символы прекращения испытаний и принятия одного из двух решений $\mathrm{pr}_{ik} > 0$ или $\mathrm{pr}_{ik} < 0$, $\circlearrowright$ — символ продолжения испытаний как реакции на условие $|\nu_{ik}^{(n)}| \leqslant \delta^{(n,s)}$, свидетельствующее о малости $|\mathrm{pr}_{ik}|$ и недостаточности количества n испытаний для определения знака pr_{ik}; $\delta^{(n,s)} > 0,\ n = 1, 2, \ldots$ Далее будет показано, что, если при $n \to \infty \quad \delta^{(n,s)} \to 0$, то решение $\circlearrowright$ для каждой пары $i < k$ может быть принято лишь для п. н. конечного числа n испытаний, и, тем самым, алгоритм принятия одного из решений $\square_1$ или $\square_2$, определяющего знак pr_{ik} для всех пар $i < k,\ i, k = 1, \ldots, s$, будет завершен после п. н. конечного числа испытаний.

Таким образом в алгоритме (38) число испытаний n увеличивается до тех пор, пока для всех $s(s-1)/2$ пар $i < k$ не завершены циклы $\circlearrowright$ и не закончена обусловленная ими ревизия решений, принятых ранее для всех $s(s-1)/2$ пар $i < k,\ i, k = 1, \ldots, s$.

Если n_s — число испытаний, при котором первый раз завершены все $s(s-1)/2$ циклов $\circlearrowright$, то на n_s-ом испытании алгоритм (38) завершен.

Для определения в (38) значений $\delta^{(n,s)},\ n = 1, 2, \ldots$, зададим оценку сверху $\alpha^{(s)}$ вероятности ошибочных решений $\square_1$ и $\square_2$.

Пусть наблюденное значение $\nu_{ik}^{(n)} > \delta^{(n,s)}$, в то время как на самом деле $\mathrm{pr}_{ik} < 0$. В таком случае решение $\square_1$: «считать $\mathrm{pr}_{ik} > 0$» ошибочно, его вероятность[10]

$$\overset{(n)}{\mathrm{Pr}}(\{\nu_{ik}^{(n)} > \delta^{(n,s)}\}|\mathrm{pr}_{ik} < 0) \leqslant \overset{(n)}{\mathrm{Pr}}(\{\nu_{ik}^{(n)} - \mathrm{pr}_{ik} > \delta^{(n,s)}\}|\mathrm{pr}_{ik} < 0) \leqslant \\ \leqslant \exp(-n(\delta^{(n,s)})^2/2) \triangleq \alpha^{(s)}. \quad (39)$$

Первое неравенство в (39) является следствием того, что событие $\nu_{ik}^{(n)} > \delta^{(n,s)}$, в силу неравенства $\mathrm{pr}_{ik} < 0$, характеризующего вероятность $\mathrm{Pr}^{(n)}$, влечет событие $\{\nu_{ik}^{(n)} - \mathrm{pr}_{ik} > \delta^{(n,s)}\}$, второе неравенство есть следствие (29) неравенства Хефдинга. Значение $\alpha^{(s)}$ оценивает сверху вероятность ошибочного решения $\square_1$ и определяет значение

$$\delta^{(n,s)} = \left(\frac{2}{n}\ln\frac{1}{\alpha^{(s)}}\right)^{1/2}, \ n = 1, 2, \ldots, \ s = 2, 3, \ldots \quad (40)$$

В рассматриваемом в этом параграфе случае не изменяющейся в процессе испытаний вероятности и заданном априори s можно выбрать $\alpha^{(s)} = \alpha = \mathrm{const}$, или определить $\alpha^{(s)} \to 0$ при $s \to \infty$, если s априори не фиксировано. В последнем случае результат каждого дополнительного испытания должен быть учтен при принятии решений $\square_1$ или $\square_2$ для всех $s(s-1)/2$ пар $i < k, \ i, k = 1, \ldots, s, \ s = 2, 3, \ldots$, а вероятность того, что хотя бы одно из $s(s-1)/2$ решений $\square_1$ или $\square_2$ окажется неверным, оценивалась сверху заданным априори значением α, одним и тем же для всех $s = 2, 3, \ldots$

Поскольку второе неравенство в (39) верно и при условии $\mathrm{pr}_{ik} > 0$, то есть поскольку и $\mathrm{Pr}^{(n)}(\{\nu_{ik}^{(n)} - \mathrm{pr}_{ik} > \delta^{(n,s)}\}|\mathrm{pr}_{ik} > 0) \leqslant \alpha^{(s)}$, то неравенство

$$\overset{(n)}{\mathrm{Pr}}(\{\mathrm{pr}_{ik} \geqslant \nu_{ik}^{(n)} - \delta^{(n,s)}\}|\mathrm{pr}_{ik} > 0) > 1 - \alpha^{(s)} \quad (41)$$

оценивает снизу значением $1 - \alpha^{(s)}$ вероятность правильного решения $\square_1$.

---

[10] Условие $|\mathrm{pr}_{ik} < 0$ в $\mathrm{Pr}^{(n)}(\cdot|\mathrm{pr}_{ik} < 0)$ записано как характеристика вероятности $\mathrm{Pr}^{(n)}$. Если после вертикальной черты записано условие в фигурных скобках, то, например, $\mathrm{Pr}^{(n)}(\cdot|\{A\})$ — условная при условии $\{A\}$ вероятность.

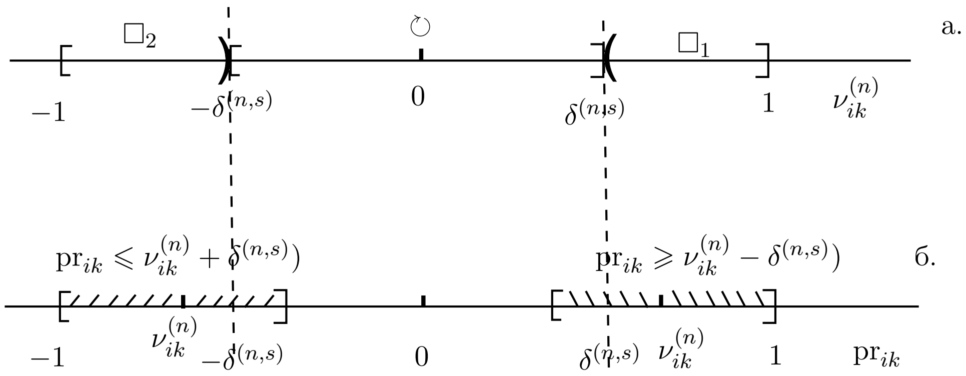

Рис. 2. а. Области наблюденных значений $\nu_{ik}^{(n)}$, при которых принимаются решения $\square_1$, $\square_2$ и $\circlearrowright$ в алгоритме (38). б. случайные интервалы $[-1, \nu_{ik}^{(n)} + \delta^{(n,s)})$ и $(\nu_{ik}^{(n)} - \delta^{(n,s)}, 1]$, $\delta^{(n,s)} = (\frac{2}{n} \ln \frac{1}{\alpha^{(s)}})^{1/2}$, покрывающие истинные значения $\mathrm{pr}_{ik} < 0$ и соответственно $\mathrm{pr}_{ik} > 0$ с вероятностью, большей $1 - \alpha^{(s)}$

Дело в том, что при наблюденном в (38) значении $\nu_{ik}^{(n)} > \delta^{(n,s)} = (\frac{2}{n} \ln \frac{1}{\alpha^{(s)}})^{1/2}$ соответствующая реализация

$$\left\{ \mathrm{pr}_{ik} \in [-1, 1],\ \mathrm{pr}_{ik} \geqslant \nu_{ik}^{(n)} - \left(\frac{2}{n} \ln \frac{1}{\alpha^{(s)}} \right)^{1/2} > 0 \right\} \tag{*}$$

случайного множества (35) и, тем более, содержащий множество (*) интервал $(0, 1]$, согласно оценке (41) накрывают истинное значение pr_{ik}, отвечающее в (38) решению $\mathrm{pr}_{ik} > 0$, с вероятностью, большей $1 - \alpha^{(s)}$, см. рис. 2.

Вероятность ошибочного решения $\square_2$ оценивается сверху тем же значением $\alpha^{(s)}$, ибо

$$\overset{(n)}{\mathrm{Pr}}(\{\nu_{ik}^{(n)} < -\delta^{(n,s)}\}|\mathrm{pr}_{ik} > 0) \leqslant \overset{(n)}{\mathrm{Pr}}(\{\nu_{ik}^{(n)} - \mathrm{pr}_{ik} < -\delta^{(n,s)}\}|\mathrm{pr}_{ik} > 0) \leqslant \\ \leqslant \exp(-n(\delta^{(n,s)})^2/2) = \alpha^{(s)}, \tag{42}$$

а так как и при условии $\mathrm{pr}_{ik} < 0$

$$\overset{(n)}{\mathrm{Pr}}(\{\nu_{ik}^{(n)} - \mathrm{pr}_{ik} < -\delta^{(n,s)}\}|\mathrm{pr}_{ik} < 0) \leqslant \alpha^{(s)}, \tag{43}$$

то неравенство[11]

$$\overset{(n)}{\Pr}(\{\mathrm{pr}_{ik} \leqslant \nu_{ik}^{(n)} + \delta^{(n,s)}\}|\mathrm{pr}_{ik} < 0) > 1 - \alpha^{(s)} \tag{44}$$

оценивает снизу вероятность верного решения $\square_2$ тем же, что и в (41), значением $1 - \alpha^{(n)}$, поскольку при наблюденном значении $\nu_{ik}^{(n)} < -\delta^{(n,s)} = -(\frac{2}{n}\ln\frac{1}{\alpha^{(s)}})^{1/2}$ соответствующая реализация случайного множества (36) согласно оценке (44) покрывает истинное значение $\mathrm{pr}_{ik} < 0$ с вероятностью, большей $1 - \alpha^{(s)}$, см. рис. 2.

Покажем, что событие $\{-\delta^{(n,s)} \leqslant \nu_{ik}^{(n)} \leqslant \delta^{(n,s)}\}$, как в случае $\mathrm{pr}_{ik} > 0$, так и в случае $\mathrm{pr}_{ik} < 0$, для каждого $s = 2, 3, \dots$ может выполняться лишь для п. н. конечного числа испытаний $n = 1, 2, \dots$

Пусть $|\mathrm{pr}_{ik}| \geqslant 2\varepsilon_{ik} > 0$. Тогда при достаточно больших n

$$\begin{aligned}
&\overset{(n)}{\Pr}(\{|\nu_{ik}^{(n)}| \leqslant \delta^{(n,s)}\}|\ |\mathrm{pr}_{ik}| \geqslant 2\varepsilon_{ik}) \leqslant \\
&\qquad \leqslant \overset{(n)}{\Pr}(\{|\mathrm{pr}_{ik}| - |\nu_{ik}^{(n)}| \geqslant 2\varepsilon_{ik} - \delta^{(n,s)}\}|\ |\mathrm{pr}_{ik}| \geqslant 2\varepsilon_{ik}) \leqslant \\
&\qquad \leqslant \overset{(n)}{\Pr}(\{|\mathrm{pr}_{ik} - \nu_{ik}^{(n)}| \geqslant 2\varepsilon_{ik} - \delta^{(n,s)}\}|\ |\mathrm{pr}_{ik}| \geqslant 2\varepsilon_{ik}) \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant \overset{(n)}{\Pr}(\{|\mathrm{pr}_{ik} - \nu_{ik}^{(n)}| \geqslant \varepsilon_{ik}\} \leqslant 2\exp(-n\varepsilon_{ik}^2/2).
\end{aligned} \tag{45}$$

Дело в том, что, если $|\mathrm{pr}_{ik}| \geqslant 2\varepsilon_{ik}$, то событие $\{|\nu_{ik}^{(n)}| \leqslant \delta^{(n,s)}\}$ влечет событие $\{|\mathrm{pr}_{ik}| - |\nu_{ik}^{(n)}| \geqslant 2\varepsilon_{ik} - \delta^{(n,s)}\}$, которое в свою очередь влечет событие $\{|\mathrm{pr}_{ik} - \nu_{ik}^{(n)}| \geqslant 2\varepsilon_{ik} - \delta^{(n,s)}\}$, откуда следуют первое и второе неравенства в (45). Далее, так как согласно (40) для любого $s = 2, 3, \dots$ при $n \to \infty$ $\delta^{(n,s)} \to 0$, то для всех $n > n(s)$ $\varepsilon_{ik} - \delta^{(n,s)} > 0$, и для таких n событие $\{|\mathrm{pr}_{ik} - \nu_{ik}^{(n)}| \geqslant 2\varepsilon_{ik} - \delta^{(n,s)}\}$ влечет событие $\{|\mathrm{pr}_{ik} - \nu_{ik}^{(n)}| \geqslant \varepsilon_{ik}\}$, откуда следует предпоследнее неравенство в (45). Последнее неравенство в (45) является вариантом неравенства Хефдинга, см. лемму 1 и неравенства (31). Поскольку согласно неравенствам в (45)

[11] В (44) $\{\mathrm{pr}_{ik} \leqslant \nu_{ik}^{(n)} + \delta^{(n,s)}\}$ — событие, противоположное событию $\{\nu_{ik}^{(n)} - \mathrm{pr}_{ik} < -\delta^{(n,s)}\}$ в (43)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overset{(n)}{\Pr}(\{|\nu_{ik}^{(n)}| \leqslant \delta^{(n,s)}\}||\mathrm{pr}_{ik}| \geqslant 2\varepsilon_{ik} > 0) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \overset{(\infty)}{\Pr}(\{|\nu_{ik}^{(n)}| \leqslant \delta^{(n,s)}\}||\mathrm{pr}_{ik}| \geqslant 2\varepsilon_{ik}) \leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n\varepsilon_{ik}^2/2) < \infty,$$

то согласно лемме Бореля-Кантелли для любого $s = 2, 3, \dots$ может поизойти лишь п. н. конечное число событий $\{-\delta^{(n,s)} \leqslant \nu_{ik}^{(n)} \leqslant \delta^{(n,s)}\}$, $n = 1, 2, \dots$, после которых будет принято одно из решений $\square_1$ или $\square_2$.

Чтобы оценить фактическую вероятность хотя бы одной ошибки в $s(s-1)/2$ решениях $\square_1$ и $\square_2$, принятых по завершении алгоритма (38), представим себе, что алгоритм исчерпан на $n = n_s$-ом испытании,

$$\nu_{i_1}^{(n)} > \nu_{i_2}^{(n)} > \dots > \nu_{i_s}^{(n)},\ n = n_s, \tag{46}$$

— полученная в результате n_s испытаний упорядоченность по убыванию частот i_1-го, i_2-го, $\dots, i_s$-го элементарных событий[12] и

$$\nu_{i_1,i_2}^{(n)} > \delta^{(n,s)}, \dots, \nu_{i_{s-1},i_s}^{(n)} > \delta^{(n,s)},\ n = n_s, \tag{47}$$

— $(s-1)$ условие, обеспечившее принятие $(s-1)$ решений $\square_1$ или[13] $\square_2$, согласно которым $\mathrm{pr}_{i_1,i_2} > 0, \dots, \mathrm{pr}_{i_{s-1},i_s} > 0$; при этом вероятность хотя бы одной ошибки среди этих $(s-1)$ решений не превосходит $(s-1)\alpha^{(s)}$.

Последнее замечание требует разъяснений, поскольку $(i_1, \dots, i_s)$ — *реализация случайной последовательности* $(\iota_1, \dots, \iota_s)$, упорядочивающей частоты $\nu_{\iota_1}^{(n)} \geqslant \nu_{\iota_2}^{(n)} \geqslant \dots \geqslant \nu_{\iota_s}^{(n)}$ для каждого $n = 1, 2 \dots$, а n_s — реализация случайного числа испытаний, при котором первый раз приняты все $s(s-1)/2$ решений $\square_1$ и $\square_2$. Тем не менее

$$\overset{(n_s)}{\Pr}(\{\nu_{\iota_t,\iota_{t+1}}^{(n_s)} > \delta^{(n_s,s)}\}|\{\mathrm{pr}_{\iota_t,\iota_{t+1}} < 0\} \leqslant$$

[12]Строгие неравенства в (46) следуют из условий (47) принятия решений $\square_1$ или $\square_2$, согласно которым $\nu_{i_t}^{(n)} - \nu_{i_{t+1}}^{(n)} = \nu_{i_t,i_{t+1}}^{(n)} > \delta^{(n,s)},\ t = 1, \dots, s-1$.

[13]Дело в том, что, возможно, как $i_t < i_{t+1}$, так и $i_t > i_{t+1},\ t = 1, \dots, s-1$.

$$\leqslant \sum_{(i_t,i_{t+1})} \overset{(n_s)}{\Pr}(\{\nu^{(n_s)}_{\iota_t,\iota_{t+1}} - \mathrm{pr}_{\iota_t,\iota_{t+1}} > \delta^{(n_s,s)}\}|\{\mathrm{pr}_{\iota_t,\iota_{t+1}} < 0\}) \leqslant$$
$$\leqslant (-n(\delta^{(n_s,s)})^2/2) = \alpha^{(s)}, \quad (48)$$

поскольку неравенства (48) выполняются для любой реализации $\iota_t = i_t$, $t = 1, \dots, s$, удовлетворяющей условиям (46) и (47).

Что касается остальных $s(s-1)/2-(s-1) = (s-1)(s-2)/2$ решений, то, поскольку в силу неравенств (46), (47) для $q > t$ выполнено неравенство $\nu^{(n_s)}_{i_t,i_q} = \nu^{(n_s)}_{i_t,i_{t+1}} + \nu^{(n_s)}_{i_{t+1},i_{t+2}} + \dots + \nu^{(n_s)}_{i_{q-1},i_q} > (q-t)\delta^{(n_s,s)}$, то вероятность ошибочности фактического решения в этом случае

$$\overset{(n_s)}{\Pr}(\{\nu^{(n_s)}_{i_t,i_q} > (q-t)\delta^{(n_s,s)}\}|\mathrm{pr}_{i_t,i_q} < 0) \leqslant$$
$$\leqslant \exp(-n(q-t)^2(\delta^{(n_s,s)})^2/2) = (\alpha^{(s)})^{(q-t)^2}. \quad (49)$$

Поэтому вероятность хотя бы одной ошибки во всех $s(s-1)/2$ решениях не больше, чем[14] вероятность хотя бы одной ошибки в фактически принятых: $(s-1)$ решениях $\nu_{i_t,i_{t+1}} > \delta^{(n_s,s)}$, $t = 1, \dots, s-1$, $(s-2)$ решениях $\nu_{i_t,i_{t+2}} > 2\delta^{(n_s,s)}$, $t = 1, \dots, s-2, \dots$, $(s-(s-1))$ решениях $\nu_{i_t,i_s} > (\delta^{(n_s,s)})^{s-1}$, то есть не больше, чем $\frac{(s-1)\alpha}{1-\alpha} - \frac{\alpha^2(1-\alpha^{s-1})}{(1-\alpha)^2}|_{\alpha=\alpha^{(s)}} = (s-1)\alpha^{(s)} + (s-2)(\alpha^{(s)})^2 + \dots + 2(\alpha^{(s)})^{s-2} + (\alpha^{(s)})^{s-1} = (s-1)\alpha^{(s)} + o(\alpha^{(s)})$.

Теорема 1. *Пусть в алгоритме* (38) *эмпирического упорядочения вероятностей элементарных событий* $\mathrm{pr}_1, \dots \mathrm{pr}_s$, $\alpha^{(s)} \in (0,1)$ *оценивает сверху вероятность ошибочного решения* $\square_1$ *или* $\square_2$. *Тогда все* $s(s-1)/2$ *решений будут приняты на основе п. н. конечного числа испытаний, и если* n_s — *число испытаний, при котором первый раз приняты все* $s(s-1)/2$ *решений, и* $\nu^{(n_s)}_{i_1} > \nu^{(n_s)}_{i_2} > \dots > \nu^{(n_s)}_{i_s}$ — *полученная упорядоченность частот, то искомая упорядоченность вероятностей элементарных событий есть* $\mathrm{pr}_{i_1} > \mathrm{pr}_{i_2} > \dots > \mathrm{pr}_{i_s}$, *и вероятность того, что найденная упорядоченность вероятностей элементарных событий совпадает с их истинной упорядоченностью, больше, чем* $\frac{1-s\alpha}{1-\alpha} + \frac{\alpha^2(1-\alpha^{s-1})}{(1-\alpha)^2}|_{\alpha=\alpha^{(s)}} = 1-(s-1)\alpha^{(s)} + o(\alpha^{(s)})$.

[14] $\sum_{j=1}^{s-1}(s-j)\alpha^j = -\alpha^{s+1}\frac{d}{d\alpha}\sum_{j=1}^{s-1}\alpha^{j-s} = (s-1)\frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{\alpha^2(1-\alpha^{s-1})}{(1-\alpha)^2}$

Замечание 1. Если число s упорядочиваемых в алгоритме (38) вероятностей элементарных событий априори любое, то оценки вероятностей ошибочных решений целесообразно выбрать согласно условию $\alpha^{(s)} = \alpha/(s-1)$, $s = 2, 3, \ldots$, где α — априорная оценка вероятности ошибочного упорядочения вероятностей s элементарных событий. При таком определении $\alpha^{(s)}$, $s = 2, 3, \ldots$, вероятность ошибочного упорядочения вероятностей любого конечного числа элементарных событий оценивается сверху значением $\alpha + o(\alpha)$.

Замечание 2. Алгоритм (38) эмпирического упорядочения вероятностей элементарных событий позволит оценить и их значения, если упорядоченность частот (46) получить как результат $(s-1)$ решений, обусловленных событием

$$\mathrm{Q}_s \stackrel{\triangle}{=} \bigcap_{k=1}^{s-1} \left\{ \nu^{(n_s)}_{i_k, i_{k+1}} > 2\delta^{(n_s, s)} \right\}, \tag{47*}$$

для которого согласно теореме 1 $\mathrm{Pr}^{(n_s)}(\mathrm{Q}_s) > 1 - (s-1)\alpha^{(s)} + o(\alpha^{(s)})$, где $\alpha^{(s)} = \exp(-n(2\delta^{(n_s,s)})^2/2) = \exp(-2n(\delta^{(n_s,s)})^2)$, и учесть, что при этом вероятность события $\mathrm{R}_s \stackrel{\triangle}{=} \bigcap\limits_{k=1}^{s} \left\{ \nu^{(n_s)}_{i_k} - \delta^{(n_s,s)} \leqslant \mathrm{pr}_{i_k} \leqslant \nu^{(n_s)}_{i_k} + \delta^{(n_s,s)} \right\}$ больше[15], чем $1 - 2s\alpha^{(s)}$. Дело в том, что событие $\Big\{ \nu^{(n_s)}_{i_1} + \delta^{(n_s,s)} \geqslant \mathrm{pr}_{i_1} \geqslant \nu^{(n_s)}_{i_1} - \delta^{(n_s,s)} > \nu^{(n_s)}_{i_2} + \delta^{(n_s,s)} \geqslant \mathrm{pr}_{i_2} \geqslant \nu^{(n_s)}_{i_2} - \delta^{(n_s,s)} > \ldots > \nu^{(n_s)}_{i_s} + \delta^{(n_s,s)} \geqslant \mathrm{pr}_{i_s} \geqslant \nu^{(n_s)}_{i_s} - \delta^{(n_s,s)} \Big\}$, интервально оценивающее вероятности $\mathrm{pr}_{i_1} > \mathrm{pr}_{i_2} > \ldots > \mathrm{pr}_{i_s}$, является следствием события $\mathrm{Q}_s \cap \mathrm{R}_s$, и, следовательно, его вероятность больше, чем $1 - (3s-1)\alpha^{(s)} + o(\alpha^{(s)})$.

2.2. Алгоритм эмпирического упорядочения вероятностей элементарных событий, изменяющихся в процессе испытаний

В этом параграфе моделью последовательности n взаимно независимых испытаний является вероятностное пространство $(\Omega^n, \mathcal{P}(\Omega^n),$

[15] Если $\mathrm{Pr}(A_i) \geqslant 1 - \alpha_i$, то $\mathrm{Pr}(\bigcap\limits_{i=1}^{s} A_i) \geqslant 1 - \sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i$.

$\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}) = (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_1) \times \ldots \times (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_n)$, в котором $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, $\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n} = \mathrm{Pr}_1 \times \ldots \times \mathrm{Pr}_n$, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_j)$ — модель j-го испытания, вероятности $\mathrm{Pr}_j(\{\omega_1\})$, $\mathrm{Pr}_j(\{\omega_2\}), \ldots$ при любом $j = 1, 2, \ldots$ попарно различны и одинаково упорядочены, то есть для любой пары $i \neq k$, $i, k = 1, 2, \ldots$, либо $\mathrm{Pr}_j(\{\omega_i\}) > \mathrm{Pr}_j(\{\omega_k\})$, либо $\mathrm{Pr}_j(\{\omega_i\}) < \mathrm{Pr}_j(\{\omega_k\})$ для всех $j = 1, 2, \ldots$

Определим «эмпирические вероятности» элементарных событий и оценивающие их частоты равенствами

$$\mathrm{pr}^{(n)}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \underset{j}{\mathrm{Pr}}(\omega_i),\ \nu^{(n)}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \chi_i(\omega^{(j)}),\ i = 1, 2 \ldots,\ n = 1, 2, \ldots, \tag{50}$$

в которых $\chi_i(\cdot)$ — индикаторная функция элементарного события $\{\omega_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, и, разумеется, $\mathbf{E}^{(n)}_{(1,\ldots,n)}\nu^{(n)}_i = \mathrm{pr}^{(n)}_i$, причем при $n \to \infty$ $\nu^{(n)}_i - \mathrm{pr}^{(n)}_i \xrightarrow{\text{п. н.}} 0$. Поскольку упорядоченности как вероятностей $\mathrm{Pr}_j(\{\omega_1\})$, $\mathrm{Pr}_j(\{\omega_2\})$, $\ldots$ для всех $j = 1, 2, \ldots$, так и «эмпирических вероятностей» $\mathrm{pr}^{(n)}_1, \mathrm{pr}^{(n)}_2, \ldots$ для любого $n = 1, 2, \ldots$ одинаковы, а упорядоченность последних может быть определена эмпирически, то эмпирически может быть определена и упорядоченность $\mathrm{Pr}_j(\{\omega_1\}), \mathrm{Pr}_j(\{\omega_2\}), \ldots$

Рассмотрим аналогичный алгоритму (38) алгоритм эмпирического упорядочения «эмпирических вероятностей» $\mathrm{pr}^{(n)}_1, \mathrm{pr}^{(n)}_2, \ldots$, согласно которому для всех $i < k$, $i, k \in \{1, \ldots, s\}$, $n = 1, 2, \ldots$ и $s = 2, 3, \ldots$:

- если $\nu^{(n)}_{ik} > \delta^{(n,s)}$, то $\square_1$: считать $\mathrm{pr}^{(n)}_{ik} > 0$;
- если $\nu^{(n)}_{ik} < -\delta^{(n,s)}$, то $\square_2$: считать $\mathrm{pr}^{(n)}_{ik} < 0$; (51)
- если $|\nu^{(n)}_{ik}| \leqslant \delta^{(n,s)}$, то $\circlearrowright$: продолжить испытания.

В (51)

$$\mathrm{pr}^{(n)}_{ik} = \mathrm{pr}^{(n)}_i - \mathrm{pr}^{(n)}_k,\ \nu^{(n)}_{ik} = \nu^{(n)}_i - \nu^{(n)}_k,\ 1 \leqslant i < k \leqslant s,\ n = 1, 2, \ldots \tag{52}$$

Свойства алгоритма (51) подобны свойствам алгоритма (38). Для определения значений $\delta^{(n,s)}$ зададим оценки сверху $\alpha^{(s)}$, $s = 1, 2, \ldots$, вероятностей ошибочных решений $\square_1$ и $\square_2$. Пусть выполнено событие $\{\nu_{ik}^{(n)} > \delta^{(n,s)}\}$ и принято решение $\mathrm{pr}_{ik}^{(n)} > 0$, в то время как на самом деле $\mathrm{pr}_{ik}^{(n)} < 0$. Вероятность такого ошибочного решения $\square_1$

$$\underset{1,\dots,n}{\overset{(n)}{\mathrm{Pr}}}(\{\nu_{ik}^{(n)} > \delta^{(n,s)}\}|\mathrm{pr}_{ik}^{(n)} < 0) \leqslant \leqslant \underset{1,\dots,n}{\overset{(n)}{\mathrm{Pr}}}(\{\nu_{ik}^{(n)} - \mathrm{pr}_{ik}^{(n)} > \delta^{(n,s)}\}|\mathrm{pr}_{ik}^{(n)} < 0) \leqslant \leqslant \exp(-n(\delta^{(n,s)})^2/2) \stackrel{\triangle}{=} \alpha^{(s)}. \quad (53)$$

В (53) заданное априори значение $\alpha^{(s)}$ оценивает сверху вероятность ошибочного решения $\square_1$ и определяет значение

$$\delta^{(n,s)} = \left(\frac{2}{n}\ln\frac{1}{\alpha^{(s)}}\right)^{1/2}, \ n = 1, 2, \dots, \ s = 2, 3, \dots, \quad (54)$$

такое же, как и в (40). Так как и в том случае, когда на самом деле $\mathrm{pr}_{ik}^{(n)} > 0$,

$$\underset{1,\dots,n}{\overset{(n)}{\mathrm{Pr}}}(\{\nu_{ik}^{(n)} - \mathrm{pr}_{ik}^{(n)} > \delta^{(n,s)}\}|\mathrm{pr}_{ik}^{(n)} > 0) \leqslant \alpha^{(s)}, \quad (55)$$

то подобно неравенству (41) неравенство

$$\underset{1,\dots,n}{\overset{(n)}{\mathrm{Pr}}}(\{\mathrm{pr}_{ik} \geqslant \nu_{ik}^{(n)} - \delta^{(n,s)}\}|\mathrm{pr}_{ik}^{(n)} > 0) > 1 - \alpha^{(s)} \quad (56)$$

оценивает снизу вероятность верного решения $\square_1$.

Дело в том, что при наблюденном событии $\{\nu_{ik}^{(n)} > \delta^{(n,s)}\}$ случайное множество $\{\mathrm{pr}_{ik}^{(n)} \in [-1, 1], \ \mathrm{pr}_{ik}^{(n)} \geqslant \nu_{ik}^{(n)} - \delta^{(n,s)}\}$ (35) покрывает истинное значение $\mathrm{pr}_{ik}^{(n)} > 0$ с вероятностью, большей $1 - \alpha^{(s)}$.

Аналогично, если вероятность ошибочного решения $\square_2$

$$\underset{1,\dots,n}{\overset{(n)}{\mathrm{Pr}}}(\{\nu_{ik}^{(n)} < -\delta^{(n,s)}\}|\mathrm{pr}_{ik}^{(n)} > 0) \leqslant \exp(-n(\delta^{(n,s)})^2/2) = \alpha^{(s)}, \quad (57)$$

то неравенство

$$\underset{1,\ldots,n}{\overset{(n)}{\Pr}}(\{\mathrm{pr}_{ik}^{(n)} \leqslant \nu_{ik}^{(n)} + \delta^{(n,s)}\}|\mathrm{pr}_{ik}^{(n)} < 0) > 1 - \alpha^{(s)} \tag{58}$$

оценивает снизу вероятность верного решения $\square_2$.

Наконец, что касается событий $\{|\nu_{ik}^{(n)}| \leqslant \delta^{(n,s)}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, приводящих к решению ↻ продолжить испытания, то, в отличие от рассмотренного в параграфе 2.1 случая неизменной вероятности, контролирующей исходы испытаний, при изменяющейся вероятности условие, при котором будет выполняться п. н. конечное число таких событий, не может быть выполнено без дополнительных предположений о модели испытаний.

Речь, разумеется, идет о моделях, в которых при $n \to \infty$ для некоторых[16] $i \neq k$ $\mathrm{pr}_{ik}^{(n)} \to 0$. В следующей лемме показано, что если при $n \to \infty$ $\mathrm{pr}_{ik}^{(n)} \to 0$, но «не слишком быстро», то решение ↻ в (51) всякий раз будет принято лишь для п. н. конечного числа испытаний.

Лемма 2. *Если при всех достаточно больших n и всех $i, k = 1, \ldots, s$ $|\mathrm{pr}_{ik}^{(n)}| \geqslant (1 + \varepsilon_{n,s})\delta^{(n,s)}$, где $\delta^{(n,s)}$ определены в (54), $\varepsilon_{n,s} > 0$ и удовлетворяют условиям $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha^{(s)})^{\varepsilon_{n,s}^2} < \infty$, в которых $\alpha^{(s)} = \alpha/(s-1)$, $s = 2, 3, \ldots$, то с вероятностью единица для каждого $s = 2, 3, \ldots$ происходит лишь конечное число событий*[17] $\{|\nu_{ik}^{(n)}| \leqslant \delta^{(n,s)}\}$, $n = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Если $|\mathrm{pr}_{ik}^{(n)}| \geqslant (1 + \varepsilon_{n,s})\delta^{(n,s)}$, то событие $\{|\nu_{ik}^{(n)}| \leqslant \delta^{(n,s)}\}$ влечет событие $\{|\nu_{ik}^{(n)} - \mathrm{pr}_{ik}^{(n)}| \geqslant \varepsilon_{n,s}\delta^{(n,s)}\}$, ибо $|\nu_{ik}^{(n)} - \mathrm{pr}_{ik}^{(n)}| \geqslant |\mathrm{pr}_{ik}^{(n)}| - |\nu_{ik}^{(n)}| \geqslant (1 + \varepsilon_{n,s})\delta^{(n,s)} - \delta^{(n,s)} = \varepsilon_{n,s}\delta^{(n,s)}$. Следовательно, $\mathrm{Pr}_{1,\ldots,n}^{(n)}(\{|\nu_{ik}^{(n)}| \leqslant \delta^{(n,s)}\}|\ |\mathrm{pr}_{ik}^{(n)}| \geqslant (1 + \varepsilon_{n,s})\delta^{(n,s)}) \leqslant \mathrm{Pr}_{1,\ldots,n}^{(n)}(\{|\nu_{ik}^{(n)} - \mathrm{pr}_{ik}^{(n)}| \geqslant \varepsilon_{n,s}\delta^{(n,s)}\}|\ |\mathrm{pr}_{ik}^{(n)}| \geqslant (1 +$

---

[16]Если для всех $(i < k) \in \{1, \ldots, s\}^2$ $|\mathrm{pr}_{ik}^{(n)}| > \mathrm{pr}_{ik} > 0$ при любом $n = 1, 2, \ldots$, в частности, если среди вероятностей $\mathrm{Pr}_1, \mathrm{Pr}_2, \ldots$ конечное число различных, то ситуация не отличается от рассмотренной в параграфе 2.1.

[17]Условие леммы можно сформулировать как требование к модели испытаний, а именно: для всех $j = 1, \ldots, n$ при всех достаточно больших n $|\mathrm{Pr}_j(\{\omega_i\}) - \mathrm{Pr}_j(\{\omega_k\})| > (1 + \varepsilon_{n,s})\delta^{(n,s)} \Rightarrow |\mathrm{pr}_{ik}^{(n)}| \geqslant (1 + \varepsilon_{n,s})\delta^{(n,s)}$, $i, k = 1, \ldots, s$, $n = 1, 2, \ldots$, $s = 2, 3, \ldots$

$\varepsilon_{n,s})\delta^{(n,s)}) \leqslant 2\exp(-n(\varepsilon_{n,s}\delta^{(n,s)})^2/2) = 2(\alpha^{(s)})^{\varepsilon^2_{n,s}}$, и, в силу условий леммы, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}(\{|\nu^{(n)}_{ik}| \leqslant \delta^{(n,s)}\}|\mathrm{pr}^{(n)}_{ik} \geqslant (1+\varepsilon_{n,s})\delta^{(n,s)}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Pr}^{(\infty)}_{1,2,\ldots}(\{|\nu^{(n)}_{ik}| \leqslant \delta^{(n,s)}\}|\mathrm{pr}^{(n)}_{ik} \geqslant (1+\varepsilon_{n,s})\delta^{(n,s)}) \leqslant 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha^{(s)})^{\varepsilon^2_{n,s}} < \infty,\ s = 2,3,\ldots$

Согласно лемме Бореля-Кантелли это означает, что происходит п. н. конечное число событий в последовательности $\{|\nu^{(n)}_{ik}| \leqslant \delta^{(n,s)}\},\ i,k = 1,\ldots,s,\ n = 1,2,\ldots,\ s = 2,3,\ldots$

В этом состоит единственное, но существенное, отличие эмпиричесского упорядочения вероятностей элементарных событий при изменяющейся от испытания к испытанию вероятности от рассмотренного в параграфе 2.1 упорядочения при неизменной вероятности. Но при условиях, сформулированных в лемме 2, теорема 1 верна и в случае изменяющейся вероятности.

3. Алгоритмы эмпирического восстановления стохастически измеримой возможности

3.1. Алгоритм эмпирического восстановления возможности, максимально согласованной с вероятностью, не изменяющейся в процессе испытаний

В этом параграфе рассмотрен алгоритм эмпирического восстановления возможности P, максимально согласованной с вероятностью[18] $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$, основанный на результатах n взаимно независимых испытаний, в модели которых

$$(\Omega^n, \mathcal{P}(\Omega^n), \mathrm{Pr}^{(n)}) \overset{\triangle}{=} (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}) \times \ldots \times (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}) \qquad (59)$$

[18]Возможность P называется Pr-стохастически измеримой.

вероятность $\mathrm{Pr}^{(n)} = \mathrm{Pr} \times \ldots \times \mathrm{Pr}$ неизвестна, но включение $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$ означает, что априори задана упорядоченность[19]

$$\mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \ldots$$

вероятностей элементарных событий $\mathrm{pr}_i = \mathrm{Pr}(\{\omega_i\}), i = 1, 2, \ldots$

Речь идет о задаче эмпирического восстановления класса[20] $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)} \subset \mathbb{P}\mathrm{r}$ вероятностей, содержащего вероятность Pr, определяющую модель испытаний (59), поскольку класс $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ в свою очередь определяет класс $\mathbb{P}_{(e)}$ взаимно эквивалентных возможностей P, каждая из которых максимально согласована с любой вероятностью $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$.

Так как для любой возможности $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$, максимально согласованной с вероятностью[21] $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, упорядоченность возможностей элементарных событий $\mathrm{p}_i = \mathrm{P}(\{\omega_i\}),\ i = 1, 2, \ldots$, определяется условиями

$$\text{либо } e_i = 1 \leftrightarrow \mathrm{p}_i > \mathrm{p}_{i+1} \leftrightarrow f_i \overset{\triangle}{=} \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1} + 2\mathrm{pr}_i > 1, \tag{60}$$

$$\text{либо } e_i = 0 \leftrightarrow \mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1} \leftrightarrow f_i < 1,\ \ i = 1, 2, \ldots, s, \tag{61}$$

то вопрос об эмпирическом восстановлении возможности[22] сводится к задаче теории статистических решений, в которой на основе значений частот $\nu_i^{(n)},\ i = 1, 2, \ldots, s$, элементарных событий $\{\omega_i\},\ i = 1, 2, \ldots, s$, наблюденных в последовательности n взаимно независимых испытаний, модель которых определена в (59), для всех $i = 1, \ldots, s$ требуется принять одну из гипотез (60) или (61).

В связи с этой задачей рассмотрим следующий алгоритм проверки гипотез (60), (61). Для всех $i = 1, \ldots, s$ и каждого $n = 1, 2, \ldots$

- если $\hat{f}_i^{(n)} > 1 + \delta^{(n,s)}$, то $\square_1$: считать $f_i > 1$;
- если $\hat{f}_i^{(n)} < 1 - \delta^{(n,s)}$, то $\square_2$: считать $f_i < 1$; (62)
- если $|\hat{f}_i^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n,s)}$, то $\circlearrowright$: продолжить испытания,

[19] Упорядоченность может быть восстановлена эмпирически методами, рассмотренными в параграфе 2.

[20] Напомним, что $e = 0.e_1e_2\ldots$ — двоичная запись числа из $(0, 1)$, определяющего упорядоченность возможностей элементарных событий по правилу: $e_i = 1 \leftrightarrow \mathrm{p}_i > \mathrm{p}_{i+1},\ e_i = 0 \leftrightarrow \mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1},\ i = 1, 2, \ldots$

[21] Вероятность Pr предполагается регулярной, то есть $f_i \neq 1,\ i = 1, 2, \ldots$

[22] Напомним, что возможность $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$ определяется (с точностью до эквивалентности) упорядоченностью ее значений на элементарных событиях [9].

где
$$\hat{f}_i^{(n)} \triangleq \nu_1^{(n)} + \ldots + \nu_{i-1}^{(n)} + 2\nu_i^{(n)},\ i = 1, 2, \ldots \quad (63)$$

В алгоритме (62) при каждом $n = 1, 2, \ldots$ проверяются условия решений $\square_1$, $\square_2$ и $\circlearrowright$ для всех $i = 1, \ldots, s$; если для всех $i = 1, \ldots, s$ приняты только решения $\square_1$ или $\square_2$, то алгоритм завершен, если же хотя бы для одного i принято решение $\circlearrowright$ продолжить испытания, то после каждого дополнительного испытания для всех $i = 1, \ldots, s$ проверяются условия решений $\square_1$, $\square_2$ и $\circlearrowright$ и ранее принятые решения корректируются, ..., и так — до тех пор, пока, наконец, алгоритм будет завершен.

Значения $\delta^{(n,s)}$, $n = 1, 2, \ldots,$ в алгоритме (62) определим, задав верхние границы $\alpha^{(s)}$, $s = 2, 3, \ldots,$ вероятностей ошибочных решений $\square_1$ и $\square_2$. Вероятность ошибочного решения $\square_1$, при котором наблюдено значение $\hat{f}_i^{(n)} > 1 + \delta^{(n,s)}$, но на самом деле $f_i < 1$,

$$\Pr^{(n)}(\{\hat{f}_i^{(n)} > 1 + \delta^{(n,s)}\} | f_i < 1) \leqslant \Pr^{(n)}(\{\hat{f}_i^{(n)} - f_i > \delta^{(n,s)}\} | f_i < 1) \leqslant \\ \leqslant \exp(-n(\delta^{(n,s)})^2/2) \triangleq \alpha^{(s)},\ i = 1, \ldots, s. \quad (64)$$

Первое неравенство в (64) обусловлено тем, что событие $\{\hat{f}_i^{(n)} - f_i > \delta^{(n,s)}\}$ является следствием события $\{\hat{f}_i^{(n)} > 1 + \delta^{(n,s)}\}$ при условии $f_i < 1$, второе неравенство является вариантом неравенства Хёфдинга, см. лемму 1, поскольку

$$\hat{f}_i^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (\chi_1(\omega^{(j)}) + \ldots + \chi_{i-1}(\omega^{(j)}) + 2\chi_i(\omega^{(j)})),$$

где все слагаемые при $j = 1, 2, \ldots, n$ взаимно независимы, принимают значения 0, 1 или 2, и при этом $\mathbf{E}^{(n)} \hat{f}_i^{(n)} = f_i$, $i = 1, 2, \ldots$ Значение $\alpha^{(s)}$ в (64) оценивает сверху вероятность ошибочного решения $\square_1$ и определяет значение

$$\delta^{(n,s)} = \left(\frac{2}{n} \ln \frac{1}{\alpha^{(s)}} \right)^{\frac{1}{2}},\ n = 1, 2, \ldots,\ s = 1, 2, \ldots \quad (65)$$

Поскольку приведенная в (64) оценка вероятности события $\{\hat{f}_i^{(n)} - f_i > \delta^{(n,s)}\}$ верна и в том случае, когда на самом деле $f_i > 1$, а именно, так как и $\Pr^{(n)}(\{\hat{f}_i^{(n)} - f_i > \delta^{(n,s)}\}|f_i > 1) \leqslant \exp(-n(\delta^{(n,s)})^2/2) = \alpha^{(s)}$, то вероятность события $\{f_i \geqslant \hat{f}_i^{(n)} - \delta^{(n,s)}\}$, противоположного $\{\hat{f}_i^{(n)} - f_i > \delta^{(n,s)}\}$,

$$\Pr^{(n)}(\{f_i \geqslant \hat{f}_i^{(n)} - \delta^{(n,s)}\}|f_i > 1) > 1 - \alpha^{(s)},\ i = 1, \ldots, s. \qquad (66)$$

Правая часть в (66) оценивает снизу вероятность правильного решения $\Box_1$ в алгоритме (62), поскольку при наблюдении $\hat{f}_i^{(n)} > 1 + \delta^{(n,s)}$, согласно неравенству (66), истинное значение f_i с вероятностью, большей $1 - \alpha^{(s)}$, оказывается в интервале[23] $(1, 1/i)$, $i = 1, \ldots, s$.

Поскольку как вероятность неверного решения $\Box_2$

$$\begin{aligned} \Pr^{(n)}(\{\hat{f}_i^{(n)} < 1 - \delta^{(n,s)}\}|f_i > 1) \leqslant \\ \leqslant \Pr^{(n)}(\{\hat{f}_i^{(n)} - f_i < -\delta^{(n,s)}\}|f_i > 1) \leqslant \\ \leqslant \exp(-n(\delta^{(n,s)})^2/2) = \alpha^{(s)}, \end{aligned}$$

так и вероятность

$$\Pr^{(n)}(\{\hat{f}_i^{(n)} - f_i < -\delta^{(n,s)}\}|f_i < 1) \leqslant \exp(-n(\delta^{(n,s)})^2/2) = \alpha^{(s)},$$

то вероятность правильного решения $\Box_2$

$$\Pr^{(n)}(\{f_i \leqslant \hat{f}_i^{(n)} + \delta^{(n,s)}\}|f_i < 1) > 1 - \alpha^{(s)}. \qquad (67)$$

Действительно, если наблюденное значение $\hat{f}_i^{(n)} < 1 - \delta^{(n,s)}$, то, согласно неравенству (67), с вероятностью, большей $1 - \alpha^{(s)}$, истинное значение $f_i \leqslant \hat{f}_i^{(n)} + \delta^{(n,s)} < 1$, в чем и состоит решение $\Box_2$ в алгоритме (62), $i = 1, \ldots, s$.

Покажем, что событие $\{1 - \delta^{(n,s)} \leqslant \hat{f}_i^{(n)} \leqslant 1 + \delta^{(n,s)}\}$, приводящее в алгоритме (62) к решению $\circlearrowright$ о продолжении испытаний, при любом условии $f_i > 1$ или $f_i < 1$, $i = 1, \ldots, s$, для каждого $s = 1, 2, \ldots$ может выполняться лишь для п. н. конечного числа n испытаний.

---

[23] $\max\{f_i = \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1} + 2\mathrm{pr}_i \,|\, \mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{pr}_i \geqslant 0,\ \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \ldots + \mathrm{pr}_i \leqslant 1\} = 1 + 1/i$

Действительно, пусть $|f_i - 1| \geqslant 2\varepsilon_i > 0,\ i = 1, \ldots, s$. Тогда для каждого $s = 1, 2, \ldots$ и всех n, при которых $\delta^{(n,s)} \leqslant \varepsilon_i$,

$$\begin{aligned}
&\Pr{}^{(n)}(\{|\hat f_i^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n,s)}\} \mid |f_i - 1| \geqslant 2\varepsilon_i) \leqslant\\
&\leqslant \Pr{}^{(n)}(\{|f_i - 1| - |\hat f_i^{(n)} - 1| \geqslant 2\varepsilon_i - \delta^{(n,s)}\} \mid |f_i - 1| \geqslant 2\varepsilon_i) \leqslant\\
&\leqslant \Pr{}^{(n)}(\{|\hat f_i^{(n)} - f_i| \geqslant 2\varepsilon_i - \delta^{(n,s)}\}) \leqslant\\
&\leqslant \Pr{}^{(n)}(\{|\hat f_i^{(n)} - f_i| \geqslant \varepsilon_i\}) = \Pr{}^{(\infty)}(\{|\hat f_i^{(n)} - f_i| \geqslant \varepsilon_i\}) \leqslant\\
&\leqslant 2\exp(-n\varepsilon_i^2/2),
\end{aligned}$$

и утверждение, согласно которому для каждого $s = 1, 2, \ldots$ происходит п. н. конечное число событий $\{1 - \delta^{(n,s)} \leqslant \hat f_i^{(n)} \leqslant 1 + \delta^{(n,s)}\} = \{|\hat f_i^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n,s)}\},\ n = 1, 2, \ldots,$ следует теперь из леммы Бореля-Кантелли, так как $2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \exp(-n\varepsilon_i^2/2) < \infty,\ i = 1, \ldots, s$.

Сказанное означает, что по истечении п. н. конечного числа n испытаний статистика $\hat f_i^{(n)}$ покинет интервал $[1 - \delta^{(n,s)}, 1 + \delta^{(n,s)}]$, и в (62) будет принято одно из решений[24] $\square_1$ или $\square_2$, $i = 1, \ldots, s$.

Этот вывод позволяет заключить, что алгоритм (62) проверки любого конечного числа $2s$ гипотез (60), (61) будет завершен на основе данных п. н. конечного числа испытаний.

Подведем итоги.

Теорема 2. *Для любого* $s = 1, 2, \ldots$ *алгоритм* (62) *согласно условиям* (60), (61) *на основе п. н. конечного числа испытаний восстанавливает упорядоченность возможностей элементарных событий*

---

[24] Заметим, что, если, например, $f_i \geqslant 1 + 2\varepsilon_i$, $\varepsilon_i > 0$, то для всех n, при которых $\delta^{(n,s)} < \varepsilon_i$, $\Pr^{(n)}(\{1 - \delta^{(n,s)} \leqslant \hat f_i^{(n)} \leqslant 1 + \delta^{(n,s)}\} | f_i \geqslant 1 + 2\varepsilon_i) \leqslant \Pr^{(n)}(\{\hat f_i^{(n)} \leqslant 1 + \delta^{(n,s)}\} | f_i \geqslant 1 + 2\varepsilon_i) \leqslant \Pr^{(n)}(\{\hat f_i^{(n)} - f_i \leqslant \delta^{(n,s)} - 2\varepsilon_i\} | f_i \geqslant 1 + 2\varepsilon_i) \leqslant \Pr^{(n)}(\{\hat f_i^{(n)} - f_i < -\varepsilon_i\} | f_i \geqslant 1 + 2\varepsilon_i) \leqslant \beta_i = \exp(-n\varepsilon_i^2/2)$. Это означает, что при конечном n $\hat f_i^{(n)}$ почти наверное покинет интервал $[1 - \delta^{(n,s)}, 1 + \delta^{(n,s)}]$ через его правую границу, и, согласно алгоритму (62), будет принято правильное решение $\square_1$. В этой ситуации вероятность ошибочно принять решение $\square_2$

$$\begin{aligned}
&\Pr{}^{(n)}(\{\hat f_i^{(n)} < 1 - \delta_i^{(n,s)}\} | f_i \geqslant 1 + 2\varepsilon_i) \leqslant\\
&\qquad\qquad \leqslant \Pr{}^{(n)}(\{\hat f_i^{(n)} - f_i < -\delta_i^{(n,s)} - 2\varepsilon_i\}) < \exp(-2n\varepsilon_i^2) = \beta_i^4.
\end{aligned}$$

$p_1, \ldots, p_s$, *совпадающую с истинной их упорядоченностью с вероятностью, большей* $1 - s\,\alpha^{(s)} = 1 - \alpha$, *если* $\alpha^{(s)} = \alpha/s$, $s = 1, 2, \ldots$, *где* α *— априорная оценка вероятности ошибочного упорядочения возможностей* s *элементарных событий.*

3.2. Алгоритм эмпирического восстановления возможности, максимально согласованной с вероятностью, изменяющейся в процессе испытаний

В этом параграфе модель n взаимно независимых испытаний, в отличие от модели (59), определена как вероятностное пространство

$$(\Omega^{(n)}, \mathcal{P}(\Omega^{(n)}), \mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}) = (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_1) \times \ldots \times (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_n), \quad (68)$$

в котором $\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n} = \mathrm{Pr}_1 \times \ldots \times \mathrm{Pr}_n$, для каждого $j = 1, 2, \ldots, n$ $\mathrm{Pr}_j \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ и, следовательно, выполнено условие $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$-измеримости восстанавливаемой возможности, согласно которому для каждого $i = 1, 2, \ldots$

$$\text{либо } e_i = 1 \leftrightarrow p_i > p_{i+1} \leftrightarrow \mathrm{F}_i^{(j)} = \mathrm{Pr}_j(\{\omega_1\}) + \ldots + \mathrm{Pr}_j(\{\omega_{i-1}\}) + 2\mathrm{Pr}_j(\{\omega_i\}) > 1, \quad (69)$$

$$\text{либо } e_i = 0 \leftrightarrow p_i = p_{i+1} \leftrightarrow \mathrm{F}_i^{(j)} < 1, \quad (70)$$

для всех $j = 1, 2, \ldots$ Значение $e = 0.e_1 e_2 \ldots$, определяющее упорядоченность возможностей элементарных событий $p_i = \mathrm{P}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, разумеется, не известно и должно быть определено на основе результатов испытаний.

В рассматриваемом случае проверяемые гипотезы определяются следующими условиями:

$$\text{либо } e_i = 1 \leftrightarrow p_i > p_{i+1} \leftrightarrow f_i^{(n)} \triangleq \mathrm{pr}_1^{(n)} + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1}^{(n)} + 2\mathrm{pr}_i^{(n)} > 1, \quad (71)$$

$$\text{либо } e_i = 0 \leftrightarrow p_i = p_{i+1} \leftrightarrow f_i^{(n)} < 1, \quad i = 1, \ldots, s, \quad (72)$$

где

$$\mathrm{pr}_i^{(n)} \triangleq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Pr}_j(\{\omega_i\}), \quad i = 1, \ldots, s,$$

— «эмпирические вероятности» элементарных событий.

Так как модель испытаний такова, что условия (69), (70) $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$-измеримости восстанавливаемой возможности выполнены для каждого $i = 1, 2, \ldots$ и всех $j = 1, 2, \ldots$, то гипотезы (71), (72), по существу, эквивалентны условиям (69), (70), но, в отличие от последних, могут быть проверены эмпирически, поскольку при $n \to \infty$ $\hat{f}_i^{(n)} - f_i^{(n)} \xrightarrow{\text{п. н.}} 0$, где $\hat{f}_i^{(n)} \triangleq \nu_1^{(n)} + \ldots + \nu_{i-1}^{(n)} + 2\nu_i^{(n)}$, $\nu_i^{(n)}$ — частота элементарного события $\{\omega_i\}$ в последовательности n взаимно независимых испытаний, $i = 1, 2, \ldots$

Рассмотрим следующий алгоритм решения задач проверки гипотез (71), (72): для всех $i = 1, \ldots, s$ и каждого $n = 1, 2, \ldots$

- если $\hat{f}_i^{(n)} > 1 + \delta^{(n,s)}$, то $\square_1$: считать $f_i^{(n)} > 1$,
- если $\hat{f}_i^{(n)} < 1 - \delta^{(n,s)}$, то $\square_2$: считать $f_i^{(n)} < 1$, (73)
- если $|\hat{f}_i^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n,s)}$, то $\circlearrowright$: продолжить испытания.

Значения $\delta^{(n,s)}$, $n = 1, 2, \ldots,$ $s = 1, 2, \ldots$ в (73) определим, как и в параграфе 3.1, задав соответственно верхние границы $\alpha^{(s)}$, $s = 1, 2, \ldots$, вероятностей ошибочных решений $\square_1$ и $\square_2$. Так как

$$\hat{f}_i^{(n)} \triangleq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (\chi_1(\omega^{(j)}) + \ldots + \chi_{i-1}(\omega^{(j)}) + 2\chi_i(\omega^{(j)})),$$

где слагаемые при $j = 1, 2, \ldots, n$ взаимно независимы, принимают значения 0, 1 или 2 и $\mathbf{E}_{1,\ldots,n}^{(n)} \hat{f}_i^{(n)} = f_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \ldots$, то, как и в параграфе 3.1, вероятность ошибочно принять решение $\square_1$

$$\mathrm{Pr}_{1,\ldots,n}^{(n)}(\{\hat{f}_i^{(n)} > 1 + \delta^{(n,s)}\} | f_i^{(n)} < 1) \leqslant \mathrm{Pr}_{1,\ldots,n}^{(n)}(\{\hat{f}_i^{(n)} - f_i^{(n)} > \\ > \delta^{(n,s)}\} | f_i < 1) \leqslant \exp(-n(\delta^{(n,s)})^2/2) \triangleq \alpha^{(s)}. \quad (74)$$

Поэтому и связь между $\alpha^{(s)}$ и $\delta^{(n,s)}$ определена, как и при неизменяющейся вероятности, равенством (65).

Так как такая же оценка вероятности события $\{\hat{f}_i^{(n)} - f_i > \delta^{(n,s)}\}$ верна и в том случае, когда решение $\square_1$ — верное, то есть когда $f_i > 1$, а именно, так как

$$\mathrm{Pr}_{1,\ldots,n}^{(n)}(\{\hat{f}_i^{(n)} - f_i^{(n)} > \delta^{(n,s)}\} | f_i > 1) \leqslant \exp(-n(\delta^{(n,s)})^2/2) = \alpha^{(s)},$$

то вероятность безошибочно принять решение $\square_1$

$$\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\dots,n}\left(\left\{f^{(n)}_i \geqslant \hat f^{(n)}_i - \left(\frac{2}{n}\ln\frac{1}{\alpha^{(s)}}\right)^{\frac12}\right\}|f_i > 1\right) > 1-\alpha^{(s)}, \qquad (75)$$

где $(\frac{2}{n}\ln\frac{1}{\alpha^{(s)}})^{\frac12} = \delta^{(n,s)}$ — найденное согласно равенству в (74) значение $\delta^{(n,s)}$. Действительно, если, как в (73), наблюденное значение $\hat f^{(n)}_i > 1+\delta^{(n,s)}$, то, согласно (75), истинное значение $f^{(n)}_i$ с вероятностью, большей $1-\alpha^{(s)}$, содержится в интервале $(1, 1+1/i)$, и с этой же вероятностью безошибочно принимается решение $\square_1$ в алгоритме (73). Далее, поскольку вероятность ошибочно принять решение $\square_2$

$$\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\dots,n}(\{\hat f^{(n)}_i < 1-\delta^{(n,s)}\}|f^{(n)}_i > 1) \leqslant \mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\dots,n}(\{\hat f^{(n)}_i - f^{(n)}_i < \\ < -\delta^{(n,s)}\}|f_i > 1) \leqslant \exp(-n(\delta^{(n,s)})^2/2) = \alpha^{(s)}$$

и, разумеется,

$$\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\dots,n}(\{\hat f^{(n)}_i - f_i < -\delta^{(n,s)}\}|f^{(n)}_i < 1) \leqslant \alpha^{(s)},$$

то вероятность безошибочно принять решение $\square_2$

$$\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\dots,n}(\{f^{(n)}_i \leqslant \hat f^{(n)}_i + \delta^{(n,s)}\}|f^{(n)}_i < 1) > 1-\alpha^{(s)}, \qquad (76)$$

где $\delta^{(n,s)} = (\frac{2}{n}\ln\frac{1}{\alpha^{(s)}})^{\frac12}$ определено согласно равенству в (74). Действительно, если, как в (73), наблюденное значение $\hat f^{(n)}_i < 1-\delta^{(n,s)}$, то, согласно неравенству (76), с вероятностью, большей $1-\alpha^{(s)}$, истинное значение $f^{(n)}_i$ покрыто интервалом (0, 1) и, следовательно, с этой же вероятностью будет принято правильное решение $\square_2$, $i = 1,\dots,s$.

Наконец, если наблюденное значение

$$\hat f^{(n)}_i \in \left[1-\left(\frac{2}{n}\ln\frac{1}{\alpha^{(s)}}\right)^{\frac12}, 1+\left(\frac{2}{n}\ln\frac{1}{\alpha^{(s)}}\right)^{\frac12}\right] \triangleq \mathrm{I}^{(n,s)},$$

то, согласно алгоритму (73), принимается решение $\circlearrowright$, и испытания должны быть продолжены, причем в случае изменяющейся вероятности событие $\{\hat f^{(n)}_i \in \mathrm{I}^{(n,s)}\}$, вообще говоря, может выполняться для бесконечно многих $n = 1, 2, \dots$

Сформулируем дополнительные требования к модели испытаний (68), гарантирующие, что произойдет п. н. конечное число событий

$$\{\hat{f}_i^{(n)} \in \mathrm{I}^{(n,s)}\} = \{|\hat{f}_i^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n,s)}\},\ n = 1, 2, \dots \tag{77}$$

Лемма 3. *Пусть при всех достаточно больших* n *и всех* $i = 1, \dots, s$ $|f_i^{(n)} - 1| \geqslant \delta^{(n,s)}(1 + \varepsilon_{n,s})$, *где* $\delta^{(n,s)}$ *определены в* (65), $\varepsilon_{n,s} > 0$ *и удовлетворяют условиям* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha^{(s)})^{\varepsilon_{n,s}^2} < \infty$, *в которых* $\alpha^{(s)} = \alpha/s,\ s = 1, 2, \dots$ *Тогда для каждого* $s = 1, 2, \dots$ *происходит п. н. конечное число событий* (77).

Доказательство. Так как при условии $|f_i^{(n)} - 1| \geqslant \delta^{(n,s)}(1 + \varepsilon_{n,s})$, $\varepsilon_{n,s} > 0$, выполнены следующие включения событий

$$\{|\hat{f}_i^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n,s)}\} \subset \{|f_i^{(n)} - 1| - |\hat{f}_i^{(n)} - 1| \geqslant \\ \geqslant \delta^{(n,s)}(1 + \varepsilon_{n,s}) - \delta^{(n,s)} = \varepsilon_{n,s}\delta^{(n,s)}\} \subset \{|\hat{f}_i^{(n)} - f_i^{(n)}| \geqslant \varepsilon_{n,s}\delta^{(n,s)}\},$$

то

$$\mathrm{Pr}_{1,\dots,n}^{(n)}(\{|\hat{f}_i^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n,s)}\}|\ |f_i^{(n)} - 1| \geqslant \delta^{(n,s)}(1 + \varepsilon_{n,s})) \leqslant \\ \leqslant \mathrm{Pr}^{(n)}(\{|\hat{f}_i^{(n)} - f_i^{(n)}| \geqslant \varepsilon_n \delta^{(n,s)}\}) \leqslant \\ \leqslant 2\exp(-n(\varepsilon_{n,s}\delta^{(n,s)})^2/2) = 2(\alpha^{(s)})^{\varepsilon_{n,s}^2}$$

и, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Pr}_{1,2,\dots}^{(\infty)}(\{|\hat{f}_i^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n,s)}\}) \leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha^{(s)})^{\varepsilon_{n,s}^2} < \infty.$$

Последнее неравенство гарантирует, что происходит п. н. конечное число событий (77).

Если модель испытаний удовлетворяет условиям, сформулированным в лемме 3, то формулировка теоремы 2 верна и в случае вероятности, изменяющейся от испытания к испытанию, если существует $e = 0.e_1e_2\dots$, для которого условия (69), (70) выполнены для всех $j = 1, 2, \dots$

4. Алгоритмы эмпирического построения стохастически измеримой возможности и σ-алгебры, максимально согласующей вероятность с возможностью

При эмпирическом восстановлении возможности может так случиться, что восстановленная возможность любого непустого подмножества Ω окажется равной единице. Эта ситуация, непосредственно не связанная с рассмотренной в параграфе 3 проблемой эмпирического восстановления возможности, обусловлена свойствами вероятности $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$, контролирующей исходы испытаний, свойствами, при наличии которых возможность P, даже максимально согласованная с вероятностью Pr, не «может передать» вероятностных отличий между событиями из $\mathcal{P}(\Omega)$. В такой ситуации класс $\mathcal{P}(\Omega)$ всех подмножеств Ω следует сузить до σ-подалгебры $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ подмножеств Ω, вероятности которых достаточно «контрастны», чтобы их отличия могла «передать» возможность P, максимально согласованная с вероятностью Pr на $\mathcal{A}$.

В этом параграфе рассмотрен алгоритм эмпирического построения стохастически измеримой возможности и (почти) максимальной (по включению) σ-подалгебры $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, на которой вероятность и возможность максимально согласованы между собой в том смысле, что возможность максимально согласована на $\mathcal{A}$ с вероятностью и $\mathcal{A}$ — в известном смысле максимальная σ-подалгебра $\mathcal{P}(\Omega)$, на которой возможность «максимально передает вероятностные отличия» событий из $\mathcal{A}$.

Такую σ-алгебру $\mathcal{A}$ можно построить, представив Ω в виде разбиения $\mathrm{G}_1 \cup \mathrm{G}_2 \cup \ldots$ на взаимно непересекающиеся гранулы $\mathrm{G}_1 = \{\omega_1, \ldots, \omega_{q_1}\}, \mathrm{G}_2 = \{\omega_{q_1+1}, \ldots, \omega_{q_2}\}, \ldots$ и определив $\mathcal{A}$ как минимальную σ-алгебру, содержащую все гранулы G_1, G_2, …, при минимальных значениях $q_1, q_2, \ldots$, удовлетворяющие условиям[25]

$$\Pr(\mathrm{G}_1) > \Pr(\mathrm{G}_2) > \ldots, \ \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(\mathrm{G}_i) = 1, \qquad (78)$$
$$1 = \mathrm{P}(\mathrm{G}_1) > \mathrm{P}(\mathrm{G}_2) > \ldots$$

При этом эмпирическое построение возможности P и максимальной σ-алгебры $\mathcal{A}$, на которой вероятность Pr и возможность P максимально согласованы между собой, сводится к задаче эмпирического гранулирования $\Omega = \mathrm{G}_1 \cup \mathrm{G}_2 \cup \ldots$, удовлетворяющего условиям (78).

4.1. Эмпирическое гранулирование Ω. Вероятность $\Pr \in \mathbb{P}\mathrm{r}$ и неизменна при испытаниях

Первая гранула $\mathrm{G}_1 = \{\omega_1, \ldots, \omega_t\}$ согласно равенству (60) при $i = 1$ определяется следующими условиями:

$$2S_{t-1} < 1, \ 2S_t > 1, \qquad (79)$$

где

$$S_t \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_t, \ t = 1, 2, \ldots$$

Задачу эмпирического построения первой гранулы рассмотрим как задачу теории статистических решений, в которой на основе наблюдения результатов взаимно независимых испытаний требуется принять одну из следующих гипотез:

$$\mathrm{H}_1 : \ 2S_1 > 1; \ \mathrm{H}_2 : \ 2S_1 < 1, \ 2S_2 > 1; \ \ldots; \ \mathrm{H}_t : \ 2S_{t-1} < 1, \ 2S_t > 1; \ \ldots \qquad (80)$$

Если в (80) верна гипотеза H_t, то $\mathrm{G}_1 = \{\omega_1, \ldots, \omega_t\}$.

Рассмотрим (первый) сценарий эмпирического построения первой гранулы, состоящий из последовательности актов принятия решений,

[25] Так как $\Pr \in \mathbb{P}\mathrm{r}$, то всюду речь идет об априори упорядоченных вероятностях элементарных событий $\mathrm{pr}_i \stackrel{\triangle}{=} \Pr(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, $\mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \ldots$; согласно условиям (78) возможность P «максимально передает вероятностные отличия» гранул как атомов $\mathcal{A}$.

в каждом из которых принимается одно из трех решений:
для каждого $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} 2\mathrm{N}_1^{(n)} < 1 - \delta^{(n,1)} & \Longrightarrow \\ 2\mathrm{N}_1^{(n)} > 1 + \delta^{(n,1)} & \square \\ |2\mathrm{N}_1^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n,1)} & \circlearrowright \\ \text{первый акт решения} & \end{cases} \quad \begin{cases} 2\mathrm{N}_2^{(n)} < 1 - \delta^{(n,2)} & \Longrightarrow \\ 2\mathrm{N}_2^{(n)} > 1 + \delta^{(n,2)} & \square \\ |2\mathrm{N}_2^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n,2)} & \circlearrowright \\ \text{второй акт решения} & \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \dots \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 2\mathrm{N}_q^{(n)} < 1 - \delta^{(n,q)} & \Longrightarrow \quad \dots \\ 2\mathrm{N}_q^{(n)} > 1 + \delta^{(n,q)} & \square \\ |2\mathrm{N}_q^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n,q)} & \circlearrowright \\ q\text{-ый акт решения} & \end{cases} \tag{81}$$

В сценарии (81) построения первой гранулы

$$\mathrm{N}_q^{(n)} \triangleq \nu_1^{(n)} + \dots + \nu_q^{(n)}, \tag{82}$$

где $\nu_i^{(n)}$ — частота i-го элементарного события, n — число испытаний, зависящее от номера акта принятия решений[26], выделенного фигурной скобкой. Алгоритм принятия решений, представленных символами $\Longrightarrow$, $\square$ и $\circlearrowright$, состоит в следующем. Если в q-ом акте, $q = 1, 2, \dots$, наблюдено значение $2\mathrm{N}_q^{(n)} < 1 - \delta^{(n,q)}$, то принимается решение $\Longrightarrow$ «перейти к следующему акту», если наблюдено значение $2\mathrm{N}_q^{(n)} > 1 + \delta^{(n,q)}$, то принимается решение $\square$ «завершить первый сценарий (на q-ом акте) и объявить первой гранулой $\mathrm{G}_1 = \{\omega_1, \dots, \omega_q\}$», если же $1 - \delta^{(n,q)} \leqslant 2\mathrm{N}_q^{(n)} \leqslant 1 + \delta^{(n,q)}$, то принимается решение $\circlearrowright$: «продолжить испытания в q-ом акте и после каждого дополнительного испытания проверить каждое из трех условий принятия решений во всех q актах, должным образом скорректировать решения, то есть во всех q актах принять решения, определенные наблюдением $\mathrm{N}_q^{(n+1)}$». Если при этом хотя бы в одном из q актов будет принято решение $\circlearrowright$, то после дополнительного испытания корректируются решения во всех q актах, $\dots$; коррекции заканчиваются, если либо во всех q актах приняты решения $\Longrightarrow$ о переходе к следующему акту, либо в акте

[26] Это обстоятельство, как обычно, не будет отражаться в обозначениях.

$q_1 \leqslant q$ принято решение $\square$ о завершении первого сценария построением первой гранулы $\mathrm{G}_1 = \{\omega_1, \dots, \omega_{q_1}\}$.

Определим значения $\delta^{(n,q)}$, $n = 1, 2, \dots$, задав значения $\alpha^{(q)}$, $q = 1, 2, \dots$, оценивающие сверху вероятности ошибочных решений $\Longrightarrow$ и $\square$. Пусть наблюдено событие $2\mathrm{N}_q^{(n)} < 1 - \delta^{(n,q)}$ и соответственно принято решение $\Longrightarrow$ о переходе к следующему акту, в то время как на самом деле $2S_q > 1$ и следовало бы завершить первый сценарий и определить $\mathrm{G}_1 = \{\omega_1, \dots, \omega_q\}$. В такой ситуации вероятность ошибочного решения

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Pr}^{(n)}(\{2\mathrm{N}_q^{(n)} < 1 - \delta^{(n,q)}\}|2S_q > 1) \leqslant \\
&\qquad \leqslant \mathrm{Pr}^{(n)}(\{2\mathrm{N}_q^{(n)} - 2S_q < -\delta^{(n,q)}\}|2S_q > 1) \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant \exp(-n(\delta^{(n,q)})^2/2) \stackrel{\triangle}{=} \alpha^{(q)}
\end{aligned} \tag{83}$$

и, как следствие, равенство

$$\delta^{(n,q)} = \left(\frac{2}{n} \ln \frac{1}{\alpha^{(q)}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{84}$$

определит искомую связь $\alpha^{(q)}$ и $\delta^{(n,q)}$, $n = 1, 2, \dots$, такую же, как в (40) и в (65). Поскольку второе неравенство в (83) от условия $2S_q > 1$ не зависит, то и в том случае, когда на самом деле $2S_q < 1$,

$$\mathrm{Pr}^{(n)}(\{2\mathrm{N}_q^{(n)} - 2S_q < -\delta^{(n,q)}\}|2S_q < 1) \leqslant \alpha^{(q)}, \tag{85}$$

и для вероятности события, противоположного $\{2\mathrm{N}_q^{(n)} - 2S_q < -\delta^{(n,q)}\}$, при условии $2S_q < 1$ найдем оценку снизу

$$\mathrm{Pr}^{(n)}(\{2S_q \leqslant 2\mathrm{N}_q^{(n)} + \delta^{(n,q)}\}|2S_q < 1) > 1 - \alpha^{(q)}, \tag{86}$$

где $\delta^{(n,q)}$ определено в (84). В (86) оценена снизу вероятность правильного решения при наблюдении $2\mathrm{N}_q^{(n)} < 1 - \delta^{(n,q)}$, см. q-ый акт в (81). Действительно, при таком наблюдении решение $\Longrightarrow$, согласно которому $2S_q < 1$, будет правильным с вероятностью, большей $1 - \alpha^{(q)}$, ибо с такой вероятностью интервал $(0, 1) \supset (0, 2\mathrm{N}_q^{(n)} + \delta^{(n,q)})$ покрывает истинное значение $2S_q$.

Аналогично, если в q-ом акте наблюдено событие $\{2\mathrm{N}_q^{(n)} > 1 + \delta^{(n,q)}\}$ и принятно решение $\Box$, согласно которому первый сценарий должен быть завершен определением первой гранулы $\mathrm{G}_1 = \{\omega_1, \ldots, \omega_q\}$, а на самом деле $2S_q < 1$ и следовало бы перейти к следующему акту, то вероятность такого ошибочного решения $\Box$

$$\begin{aligned}\Pr{}^{(n)}(\{2\mathrm{N}_q^{(n)} > 1 + \delta^{(n,q)}\}|2S_q < 1) \leqslant \\ \leqslant \Pr{}^{(n)}(\{2\mathrm{N}_q^{(n)} - 2S_p > \delta^{(n,q)}\}|2S_p < 1) \leqslant \\ \leqslant \exp(-n(\delta^{(n,q)})^2/2) = \alpha^{(q)} \quad (87)\end{aligned}$$

оценивается сверху значением $\alpha^{(q)}$ как в (83). А поскольку и в том случае, когда на самом деле $2S_p > 1$,

$$\Pr{}^{(n)}(\{2\mathrm{N}_q^{(n)} - 2S_p > \delta^{(n,q)}\}|2S_p > 1) \leqslant \alpha^{(q)}, \quad (88)$$

то вероятность правильного решения при наблюдении $2\mathrm{N}_q^{(n)} > 1 + \delta^{(n,q)}$ оценивается снизу значением $1 - \alpha^{(q)}$:

$$\Pr{}^{(n)}(\{2S_q \geqslant 2\mathrm{N}_q^{(n)} - \delta^{(n,q)}\}|2S_q > 1) > 1 - \alpha^{(q)}. \quad (89)$$

Действительно, если наблюдено $2\mathrm{N}_q^{(n)} > 1 + \delta^{(n,q)}$, то решение $\Box$, согласно которому $2S_q > 1$ и $\mathrm{G}_1 = \{\omega_1, \ldots, \omega_q\}$, с вероятностью, большей $1 - \alpha^{(q)}$, будет верным, ибо при таком наблюдении событие $\{2S_q \geqslant 2\mathrm{N}_q^{(n)} - \delta^{(n,q)}\}$ в (89) влечет неравенство $2S_q > 1$.

Проверим, что при любом условии $2S_q < 1$ или $2S_q > 1$ события $\{1 - \delta^{(n,q)} \leqslant 2\mathrm{N}_q^{(n)} \leqslant 1 + \delta^{(n,q)}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, могут происходить п. н. для конечного числа испытаний, $q = 1, 2, \ldots$ Действительно, пусть, скажем, $|2S_q - 1| \geqslant 2\varepsilon_q > 0$. Тогда, поскольку для любого q при $n \to \infty$ $\delta^{(n,q)} \to 0$, то для всех (достаточно больших) n, при которых $\varepsilon_q - \delta^{(n,q)} \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\Pr{}^{(n)}(\{|2\mathrm{N}_q^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n,q)}\}|\ |2S_q - 1| \geqslant 2\varepsilon_q) \leqslant \\ \leqslant \Pr{}^{(n)}(\{|2S_q - 1| - |2\mathrm{N}_q^{(n)} - 1| \geqslant 2\varepsilon_q - \delta^{(n,q)}\}|\ |2S_q - 1| \geqslant 2\varepsilon_q) \leqslant \\ \leqslant \Pr{}^{(n)}(\{|2\mathrm{N}_q^{(n)} - 2S_q| \geqslant 2\varepsilon_q - \delta^{(n,q)}\}) \leqslant \\ \leqslant \Pr{}^{(n)}(\{|2\mathrm{N}_q^{(n)} - 2S_q| \geqslant \varepsilon_q\}) \leqslant 2\exp(-n\varepsilon_q^2/2), \quad (90)\end{aligned}$$

где предпоследнее неравенство выполняется для всех n, при которых $\varepsilon_q - \delta^{(n,q)} > 0$. А так как $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n\varepsilon_q^2/2) < \infty$, то в силу леммы Бореля-Кантелли и оценки (90) для любого $q = 1, 2, \ldots$ может произойти п. н. конечное число событий последовательности $\{1 - \delta^{(n,q)} \leqslant \mathrm{N}_q^{(n)} \leqslant 1 + \delta^{(n,q)}\},\ n = 1, 2, \ldots$

Итак, пусть n_1 — число испытаний, при котором в q_1-ом акте первого сценария первый раз решением $\square$ завершена последовательность решений

$$\underset{\substack{\text{в 1-ом}\\ \text{акте}}}{\Longrightarrow} \quad \underset{\substack{\text{во 2-ом}\\ \text{акте}}}{\Longrightarrow} \quad \ldots \quad \underset{\substack{\text{в } (q_1-1)\text{-ом}\\ \text{акте}}}{\Longrightarrow} \quad \underset{\substack{\text{в } q_1\text{-ом}\\ \text{акте}}}{\square.} \tag{$*$}$$

Обозначим $n(q)$ число испытаний, использованных в q актах, $q = 1, 2, \ldots$, зададим оценку сверху $\alpha \in (0, 1)$ вероятности ошибочно построить первую гранулу и определим $\alpha^{(q)} = \alpha/q,\ q = 1, 2, \ldots$ Тогда, учитывая, что все решения, принятые вплоть до q_1-го акта, скорректированы на основе результатов $n_1 = n(q_1)$ испытаний, получим, что каждое решение в последовательности $(*)$ может быть ошибочным с вероятностью, не превосходящей $\alpha^{(q_1)}$, вероятность того, что хотя бы одно из q_1 решений ошибочно, не больше $q_1\alpha^{(q_1)} = \alpha$, наконец, вероятность того, что первая гранула $\mathrm{G}_1 = \{\omega_1, \ldots, \omega_{q_1}\}$ построена верно, больше $1 - q_1\alpha^{(q_1)} = 1 - \alpha$.

Пусть согласно первому сценарию (81) в q_1-ом акте принята гипотеза H_{q_1} и в качестве первой гранулы выбрано множество $\mathrm{G}_1 = \{\omega_1, \ldots, \omega_{q_1}\}$. При этом условии согласно равенству (60) при $i = 2$ вторая гранула $\mathrm{G}_2 = \{\omega_{q_1+1}, \ldots, \omega_{q_2}\}$ должна быть определена условиями

$$\begin{aligned} &S_{q_1} + 2(\mathrm{pr}_{q_1+1} + \ldots + \mathrm{pr}_{q_2-1}) \equiv \\ &\qquad\qquad \equiv S_{q_1} + 2(S_{q_2-1} - S_{q_1}) \equiv 2S_{q_2-1} - S_{q_1} < 1, \\ &2S_{q_2} - S_{q_1} > 1, \end{aligned} \tag{91}$$

и для ее эмпирического построения воспользуемся вторым сценарием: для $n = n(q_1) + 1, n(q_1) + 2, \ldots$

$$\begin{cases} 2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+1}-\mathrm{N}^{(n)}_{q_1}<1-\delta^{(n,q_1+1)} \implies \\ 2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+1}-\mathrm{N}^{(n)}_{q_1}>1+\delta^{(n,q_1+1)} \quad \square \\ |2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+1}-\mathrm{N}^{(n)}_{q_1}-1|\leqslant\delta^{(n,q_1+1)} \circlearrowright \\ \text{первый акт} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+2}-\mathrm{N}^{(n)}_{q_1}<1-\delta^{(n,q_1+2)} \\ 2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+2}-\mathrm{N}^{(n)}_{q_1}>1+\delta^{(n,q_1+2)} \\ |2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+2}-\mathrm{N}^{(n)}_{q_1}-1|\leqslant\delta^{(n,q_1+2)} \\ \text{второй акт} \end{cases}$$

$$\implies \quad \ldots \quad \implies \quad \begin{cases} 2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q}-\mathrm{N}^{(n)}_{q_1}<1-\delta^{(n,q_1+q)} \implies \\ 2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q}-\mathrm{N}^{(n)}_{q_1}>1+\delta^{(n,q_1+q)} \quad \square \\ |2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q}-\mathrm{N}^{(n)}_{q_1}-1|\leqslant\delta^{(n,q_1+q)} \circlearrowright \\ q\text{-ый акт} \end{cases} \quad \ldots \tag{92}$$

Рассмотрим q-ый акт второго сценария. Зададим верхние границы $\alpha^{(q_1+q)}=\alpha/(q_1+q),\ q=1,2,\ldots,$ вероятностей ошибочных решений $\implies$ и $\square$ в сценарии (92), отвечающих событиям $\{2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q}-\mathrm{N}_{q_1}<1-\delta^{(n,q_1+q)}\}$ и, соответственно, $\{2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q}-\mathrm{N}_{q_1}>1+\delta^{(n,q_1+q)}\}$, и определим значение $\delta^{(n,q_1+q)}$. Пусть в q-ом акте наблюдено значение $2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q}-\mathrm{N}^{(n)}_{q_1}<1-\delta^{(n,q_1+q)}$ и принято решение $\implies$ о переходе к следующему акту, в то время как на самом деле $2S_{q_1+q}-S_{q_1}>1$. В таком случае вероятность ошибочного решения $\implies$

$$\begin{aligned}\Pr{}^{(n)}(\{2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q}-\mathrm{N}^{(n)}_{q_1}<1-\delta^{(n,q_1+q)}\}|2S_{q_1+q}-S_{q_1}>1)\leqslant \\ \leqslant\Pr{}^{(n)}(\{2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q}-\mathrm{N}^{(n)}_{q_1}-(2S_{q_1+q}-S_{q_1})<-\delta^{(n,q_1+q)}\}|2S_{q_1+q}- \\ -S_{q_1}>1)\leqslant\exp(-n(\delta^{(n,q_1+q)})^2/2)\overset{\triangle}{=}\alpha^{(q_1+q)}.\end{aligned} \tag{93}$$

Последнее неравенство в (93) есть следствие того, что $\mathbf{E}^{(n)}(2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q}-\mathrm{N}^{(n)}_{q_1})=2S_{q_1+q}-S_{q_1}$ и при этом слагаемые под знаком суммы в правой части равенства

$$\begin{aligned}2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q}-\mathrm{N}^{(n)}_{q_1}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(\chi_1(\omega^{(j)})+\ldots+\chi_{q_1}(\omega^{(j)})+ \\ +2(\chi_{q_1+1}(\omega^{(j)})+\ldots+\chi_{q_1+q}(\omega^{(j)}))\Big)\end{aligned}$$

взаимно независимы и принимают значения 0, 1 или 2.

Согласно равенству в (93) выполняется равенство $\delta^{(n,q_1+q)} = \left(\frac{2}{n}\ln\frac{1}{\alpha^{(q_1+q)}}\right)^{\frac{1}{2}}$, такое же, как равенство (84), связывающее значения $\alpha^{(q)}$ и $\delta^{(n,q)}$ в первом сценарии. Так как последнее неравенство в (93) выполняется и в том случае, когда на самом деле $2S_{q_1+q} - S_{q_1} < 1$, то есть

$$\Pr{}^{(n)}(\{2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q} - \mathrm{N}^{(n)}_{q_1} - (2S_{q_1+q} - S_q) < -\delta^{(n,q_1+q)}\}|2S_{q_1+q} - S_q < 1) \leqslant \\ \leqslant \exp(-n(\delta^{(n,q_1+q)})^2/2) = \alpha^{(q_1+q)}, \quad (94)$$

то

$$\Pr{}^{(n)}(\{2S_{q_1+q} - S_{q_1} \leqslant 2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q} - \mathrm{N}^{(n)}_{q_1} + \delta^{(n,q_1+q)}\}|2S_{q_1+q} - S_{q_1} < 1) > \\ > 1 - \alpha^{(q_1+q)}, \quad (95)$$

а это означает, что если в q-ом акте второго сценария наблюдено значение $2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q} - \mathrm{N}^{(n)}_{q_1} < 1 - \delta^{(n,q_1+q)}$, то с вероятностью, большей $1 - \alpha^{(q_1+q)}$, будет принято правильное решение $\Longrightarrow$ перейти к следующему акту, ибо в этом случае в (95) событие $\{2S_{q_1+q} - S_{q_1} \leqslant 2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q} - \mathrm{N}^{(n)}_{q_1} + \delta^{(n,q_1+q)}\}$ влечет неравенство $2S_{q_1+q} - S_{q_1} < 1$.

Аналогично, если в q-ом акте наблюдено значение $2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q} - \mathrm{N}^{(n)}_{q_1} > 1 + \delta^{(n,q_1+q)}$, в то время как на самом деле $2S_{q_1+q} - S_{q_1} < 1$, то будет принято ошибочное решение $\Box$, вероятность которого

$$\Pr{}^{(n)}(\{2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q} - \mathrm{N}^{(n)}_{q_1} > 1 + \delta^{(n,q_1+q)}\}|2S_{q_1+q} - S_{q_1} < 1) \leqslant \\ \leqslant \Pr{}^{(n)}(\{2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q} - \mathrm{N}^{(n)}_{q_1} - (2S_{q_1+q} - S_{q_1}) > \delta^{(n,q_1+q)}\}|2S_{q_1+q} - S_q < 1) \leqslant \\ \leqslant \exp(-n(\delta^{(n,q_1+q)})^2/2) \stackrel{\triangle}{=} \alpha^{(q_1+q)}. \quad (96)$$

Согласно равенству в (96), выполнено равенство (84), связывающее значения $\alpha^{(q_1+q)}$ и $\delta^{(n,q_1+q)}$, поэтому и в том случае, когда $2S_{q_1+q} - S_q > 1$,

$$\Pr{}^{(n)}(\{2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q} - \mathrm{N}^{(n)}_{q_1} - (2S_{q_1+q} - S_{q_1}) > \delta^{(n,q_1+q)}\}|2S_{q_1+q} - S_{q_1} > 1) \leqslant \\ \leqslant \alpha^{(q_1+q)}, \quad (97)$$

и, как следствие неравенства (97),

$$\Pr^{(n)}(\{2S_{q_1+q}-S_{q_1}\geqslant 2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q}-\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q}+\delta^{(n,q_1+q)}\}|2S_{q_1+q}-S_{q_1}>1)\geqslant \geqslant 1-\alpha^{(q_1+q)}, \quad (98)$$

где $\delta^{(n,q_1+q)} = \left(\frac{2}{n}\ln\frac{1}{\alpha^{(q_1+q)}}\right)^{\frac{1}{2}}$. Последнее неравенство в (98) показывает, что, если в q-ом акте наблюдено значение $2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q}-\mathrm{N}^{(n)}_{q_1} > 1+\delta^{(n,q_1+q)}$, то соответствующее решение $\square$ будет верным с вероятностью, большей $1-\alpha^{(q_1+q)}$, так как в этом случае с такой вероятностью событие $\{2S_{q_1+q}-S_{q_1}\geqslant 2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q}-\mathrm{N}^{(n)}_{q_1}-\delta^{(n,q_1+q)}\}$ влечет неравенство $2S_{q_1+q}-S_{q_1}>1$.

Наконец, что касается события

$$\{1-\delta^{(n,q_1+q)}\leqslant 2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q}-\mathrm{N}^{(n)}_{q}\leqslant 1+\delta^{(n,q_1+q)}\}\equiv$$
$$\equiv\left\{1-\left(\frac{2}{n}\ln\frac{1}{\alpha^{(q_1+q)}}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant 2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q}-\mathrm{N}^{(n)}_{q_1}\leqslant 1+\left(\frac{2}{n}\ln\frac{1}{\alpha^{(q_1+q)}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}, \quad (99)$$

при котором согласно сценарию (92) принимается решение ↻ о продлении испытаний и при каждом дополнительном испытании проверяются и корректируются как все решения, требующиеся для выполнения первого сценария, так и все решения, принятые вплоть до последнего дополнительного испытания во втором сценарии, то при любом из условий $2S_{q_1+q}-S_{q_1}>0$ или $2S_{q_1+q}-S_{q_1}<0$ события (99) могут выполняться лишь для почти наверное конечного числа испытаний. В этом легко убедиться точно так же, как это было показано при анализе первого сценария.

Обозначим $q_1^{(2)}$ номер завершающего акта первого сценария, скорректированного по результатам выполнения второго сценария, и $q_2^{(2)}$ — номер завершающего акта второго сценария, в результате которого первый раз выполнена следующая последовательность решений, в которой акты имеют сквозную нумерацию,

$$\begin{array}{lcc}
\text{решения} & \Longrightarrow\ \ldots\ \Longrightarrow\quad \square & \Longrightarrow\ \ldots\ \Longrightarrow\quad \square \\
\text{акты} & \underbrace{1 \qquad q_1^{(2)}-1 \quad q_1^{(2)}}_{1} & \underbrace{q_1^{(2)}+1 \quad q_2^{(2)}-1 \quad q_2^{(2)}}_{2} \\
\text{сценарии} & &
\end{array}$$

Обозначим $n(q)$ число испытаний, использованных в q актах, $q = 1,\dots,q_2^{(2)}$, зададим оценку сверху $\alpha \in (0,1)$ вероятности ошибки при построении первой и второй гранул и определим $\alpha^{(q)} = \alpha/q$, $q = 1,\dots,q_2^{(2)}$. Учитывая, что все решения в первом и втором сценариях, принятые вплоть до $q_2^{(2)}$-го акта, скорректированы на основе $n(q_2^{(2)})$ испытаний, получим следующую оценку сверху вероятности ошибки при построении 1-ой и 2-ой гранул $\mathrm{G}_1 = \{\omega_1,\dots,\omega_{q_1^{(2)}}\}$, $\mathrm{G}_2 = \{\omega_{q_1^{(2)}+1},\dots,\omega_{q_2^{(2)}}\}$: $q_2^{(2)} \cdot \alpha/q_2^{(2)} = \alpha$.

Если отработано m сценариев и найдены гранулы $\mathrm{G}_1 = \{\omega_1,\dots,\omega_{q_1^{(m)}}\}$, $\mathrm{G}_2 = \{\omega_{q_1^{(m)}+1},\dots,\omega_{q_2^{(m)}}\},\dots,\mathrm{G}_m = \{\omega_{q_{m-1}^{(m)}+1},\dots,\omega_{q_m^{(m)}}\}$, то для отыскания гранулы $\mathrm{G}_{m+1} = \{\omega_{q_m^{(m+1)}+1},\dots,\omega_{q_{m+1}^{(m+1)}}\}$ требуется найти целое положительное q, при котором

$$\begin{aligned} &2S_{\tilde{q}_m^{(m)}+q-1} - S_{\tilde{q}_m^{(m)}} < 1, \\ &2S_{\tilde{q}_m^{(m)}+q} - S_{\tilde{q}_m^{(m)}} > 1 \end{aligned} \tag{100}$$

и определить $q_{m+1}^{(m+1)} = \tilde{q}_m^{(m)} + q$, где волна $\tilde{}$ символизирует возможную коррекцию гранул $\mathrm{G}_1,\dots,\mathrm{G}_m$ в процессе построения $(m+1)$-ой гранулы. В свою очередь, для отыскания q, удовлетворяющего условиям (100), запустим $(m+1)$-ый сценарий, в котором для $n = n(q_m^{(m)})+1, n(q_m^{(m)})+2,\dots$:

$$\left\{\begin{array}{ll} 2\mathrm{N}^{(n)}_{\tilde{q}_m^{(m)}+1} - \mathrm{N}^{(n)}_{\tilde{q}_m^{(m)}} < 1 - \delta^{(n,\tilde{q}_m^{(m)}+1)} & \Longrightarrow \\ 2\mathrm{N}^{(n)}_{\tilde{q}_m^{(m)}+1} - \mathrm{N}^{(n)}_{\tilde{q}_m^{(m)}} > 1 + \delta^{(n,\tilde{q}_m^{(m)}+1)} & \square \\ |2\mathrm{N}^{(n)}_{\tilde{q}_m^{(m)}+1} - \mathrm{N}^{(n)}_{\tilde{q}_m^{(m)}} - 1| \leqslant \delta^{(n,\tilde{q}_m^{(m)}+1)} & \circlearrowright \\ \text{первый акт} & \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} 2\mathrm{N}^{(n)}_{\tilde{q}_m^{(m)}+2} - \mathrm{N}^{(n)}_{\tilde{q}_m^{(m)}} < 1 - \delta^{(n,\tilde{q}_m^{(m)}+2)} & \Longrightarrow \qquad \dots \qquad \Longrightarrow \\ 2\mathrm{N}^{(n)}_{\tilde{q}_m^{(m)}+2} - \mathrm{N}^{(n)}_{\tilde{q}_m^{(m)}} > 1 + \delta^{(n,\tilde{q}_m^{(m)}+2)} & \square \\ |2\mathrm{N}^{(n)}_{\tilde{q}_m^{(m)}+2} - \mathrm{N}^{(n)}_{\tilde{q}_m^{(m)}} - 1| \leqslant \delta^{(n,\tilde{q}_m^{(m)}+2)} & \circlearrowright \\ \text{второй акт} & \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} 2\mathrm{N}^{(n)}_{\tilde{q}^{(m)}_m+q} - \mathrm{N}^{(n)}_{\tilde{q}^{(m)}_m} < 1 - \delta^{(n,\tilde{q}^{(m)}_m+q)} & \Longrightarrow \qquad \ldots \\ 2\mathrm{N}^{(n)}_{\tilde{q}^{(m)}_m+q} - \mathrm{N}^{(n)}_{\tilde{q}^{(m)}_m} > 1 + \delta^{(n,\tilde{q}^{(m)}_m+q)} & \square \\ |2\mathrm{N}^{(n)}_{\tilde{q}^{(m)}_m+q} - \mathrm{N}^{(n)}_{\tilde{q}^{(m)}_m} - 1| \leqslant \delta^{(n,\tilde{q}^{(m)}_m+q)} & \circlearrowright \\ q\text{-ый акт} \end{cases} \tag{101}$$

Здесь, в $(\tilde{q}^{(m)}_m + q)$-ом акте, как и в подобных актах первого, второго, …, m-го сценариев, $\Longrightarrow$ символизирует переход к $(q^{(m)}_m+q+1)$-му акту, $\square$ символизирует окончание $(m + 1)$-го сценария построением G_{m+1}, $\circlearrowright$ символизирует продолжение испытаний в $(q^{(m)}_m+q)$-ом акте, причем по истечении п. н. конечного числа испытаний, в ходе которых проверяется выполнение каждого из трех условий в $(\tilde{q}^{(m)}_m+q)$-ом акте, во всех предшествующих актах этого сценария (что может привести к завершению сценария до $(\tilde{q}^{(m)}_m + q)$-го акта) и во всех актах всех предшествующих сценариев, в $(\tilde{q}^{(m)}_m + q)$-ом акте в конечном счете должно быть реализовано одно из двух условий: либо $2\mathrm{N}^{(n)}_{\tilde{q}^{(m)}_m+q}-\mathrm{N}^{(n)}_{\tilde{q}^{(m)}_m} > 1+\delta^{(n,\tilde{q}^{(m)}_m+q)}$, либо $2\mathrm{N}^{(n)}_{\tilde{q}^{(m)}_m+q}-\mathrm{N}^{(n)}_{\tilde{q}^{(m)}_m} < 1-\delta^{(n,\tilde{q}^{(m)}_m+q)}$.

Если $n(q^{(m+1)}_{m+1})$ — число испытаний, при котором первый раз завершены все $(m+1)$ сценариев, каждый соответственно на $q^{(m+1)}_1$-ом, $q^{(m+1)}_2$-ом, …, $q^{(m+1)}_m$-ом и $q^{(m+1)}_{m+1}$ актах, то построенные гранулы $\mathrm{G}_1 = \{\omega_1, \ldots, \omega_{q^{(m+1)}_1}\}$, …, $\mathrm{G}_{m+1} = \{\omega_{q^{(m+1)}_m+1}, \ldots, \omega_{q^{(m+1)}_{m+1}}\}$ будут определены безошибочно с вероятностью, большей $1 - \alpha$, если вероятность ошибочного решения в q-ом акте оценивается значением $\alpha^{(q)} = \alpha/q,\ q = 1, \ldots, q^{(m+1)}_{m+1}$.

4.2. Эмпирическое гранулирование Ω. Вероятность $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$ и изменяется от испытания к испытанию

В этом параграфе модель n взаимно независимых испытаний определена как вероятностное пространство

$$(\Omega^n, \mathcal{P}(\Omega^n), \mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}) \overset{\triangle}{=} (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_1) \times \ldots \times (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_n), \tag{102}$$

в котором $\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n} = \mathrm{Pr}_1 \times \ldots \times \mathrm{Pr}_n$, $(\Omega, \mathcal{P}(\omega), \mathrm{Pr}_j)$ — модель j-го испытания, и предполагается выполненным *условие гранулируемости*

Ω, согласно которому существуют $k_1 < k_2 < \ldots$, такие, что $\Omega = \mathrm{G}_1 \cup \mathrm{G}_2 \cup \ldots$, где $\mathrm{G}_1 = \{\omega_1, \ldots, \omega_{k_1}\}, \mathrm{G}_2 = \{\omega_{k_1+1}, \ldots, \omega_{k_2}\}, \ldots, \mathrm{G}_t = \{\omega_{k_{t-1}+1}, \ldots, \omega_{k_t}\}, \ldots$ и для всех $j = 1, 2, \ldots$

$$\begin{array}{l} 2\mathrm{Pr}_j(\mathrm{G}_1 \backslash \{\omega_{k_1}\}) < 1, \\ 2\mathrm{Pr}_j(\mathrm{G}_1) > 1; \\ 2\mathrm{Pr}_j(\mathrm{G}_2 \backslash \{\omega_{k_2}\}) < 1 - \mathrm{Pr}(\mathrm{G}_1), \\ 2\mathrm{Pr}_j(\mathrm{G}_2) > 1 - \mathrm{Pr}(\mathrm{G}_1); \\ \ldots \\ 2\mathrm{Pr}_j(\mathrm{G}_t \backslash \{\omega_{k_t}\}) < 1 - \mathrm{Pr}_j(\mathrm{G}_1 \cup \ldots \cup \mathrm{G}_{t-1}), \\ 2\mathrm{Pr}_j(\mathrm{G}_t) > 1 - \mathrm{Pr}_j(\mathrm{G}_1 \cup \ldots \cup \mathrm{G}_{t-1}); \\ \ldots \end{array} \tag{103}$$

Условия (103) гарантируют, что существуют единственная σ-алгебра $\mathcal{A} = \sigma(\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2, \ldots)$, порожденная разбиением $\Omega = \mathrm{G}_1 \cup \mathrm{G}_2 \cup \ldots$, и возможность P, максимально согласованная на $\mathcal{A}$ с каждой вероятностью Pr_j, $j = 1, 2, \ldots$, такие, что для всех $j = 1, 2, \ldots$ $\mathrm{Pr}_j(\mathrm{G}_1) > \mathrm{Pr}_j(\mathrm{G}_2) > \ldots$ и $\mathrm{P}(\mathrm{G}_1) > \mathrm{P}(\mathrm{G}_2) > \ldots$

Условия (103) позволяют решить задачу эмпирического гранулирования Ω на основе наблюдения значений функций $\mathrm{N}_k^{(n)} \triangleq \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{k} \nu_i^{(n)}$, $k = 1, 2, \ldots$, частот $\nu_1^{(n)}, \ldots, \nu_t^{(n)}, \ldots$ элементарных событий, оценивающих соответственно «эмпирические вероятности» $\mathrm{pr}_1^{(n)} \triangleq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{(n)} \mathrm{Pr}_j(\{\omega_1\})$, $\ldots$, $\mathrm{pr}_t^{(n)} \triangleq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{(n)} \mathrm{Pr}_j(\{\omega_t\}), \ldots$, поскольку согласно требованиям (103)

$$\begin{array}{l} 2S_{k_1-1}^{(n)} < 1,\ 2S_{k_1}^{(n)} > 1; \\ 2S_{k_2-1}^{(n)} - S_{k_1}^{(n)} < 1,\ 2S_{k_2}^{(n)} - S_{k_1}^{(n)} > 1; \\ \ldots \\ \ldots \\ 2S_{k_t-1}^{(n)} - S_{k_{t-1}}^{(n)} < 1,\ 2S_{k_t}^{(n)} - S_{k_{t-1}}^{(n)} > 1; \\ \ldots \end{array} \tag{104}$$

где

$$S_k^{(n)} = \mathrm{pr}_1^{(n)} + \ldots + \mathrm{pr}_k^{(n)} = \mathbf{E}_{1,\ldots,n}^{(n)} \mathrm{N}_k^{(n)},\ k = 1, 2, \ldots \tag{105}$$

и при $n \to \infty$ $\mathrm{N}_k^{(n)} - S_k^{(n)} \xrightarrow{\text{п. н.}} 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Речь идет о задаче эмпирического определения значений $k_1 < k_2 < \ldots$, удовлетворяющих условиям (104), при условии, что выполнены требования (103) гранулируемости Ω. Поскольку существуют единственные[27] $k_1 < k_2 < \ldots$, удовлетворяющие требованиям (103), их значения могут быть определены из условий (104).

Сценарии эмпирического гранулирования, позволяющие на основе наблюдения значений статистики

$$\mathrm{N}_k^{(n)} = \nu_1^{(n)} + \ldots + \nu_k^{(n)},\ k = 1, 2, \ldots,\ n = 1, 2, \ldots \tag{106}$$

оценить $k_1 < k_2 < \ldots$ в (104), подобны сценариям (81), (92) и (101), более того, их формальная запись не отличается от записи последних. Минимальные отличия будут лишь в записи условий, определяющих значение $\delta^{(n,q)}$ по заданному значению $\alpha^{(q)}$ вероятности ошибки решения $\Longrightarrow$ или $\square$, а именно, например, в формулах (83), (85), (86) и т. д. вместо $S_q = \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_q$ следует писать $S_q^{(n)} = \mathrm{pr}_1^{(n)} + \ldots + \mathrm{pr}_q^{(n)}$, но при этом связь между $\alpha^{(q)}$ и $\delta^{(n,q)}$ будет такой же, как в (84). Существенные отличия будут лишь при анализе решения $\circlearrowright$ о продолжении испытаний. Дело в том, что при изменяющейся вероятности, контролирующей результаты испытаний, при $n \to \infty$, возможно, $|2S_q^{(n)} - 1| \to 0$ и, как следствие, возможно бесконечно много событий $|2\mathrm{N}_q^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n,q)}$, $n = 1, 2, \ldots$, требующих продолжения испытаний и тем самым не позволяющих завершить первый акт в сценарии (81). Если, однако, при $n \to \infty$ $|2S_q^{(n)} - 1| \to 0$ «не слишком быстро», например, см. лемму 3, так, что для всех достаточно больших n $|2S_q^{(n)} - 1| \geqslant \delta^{(n,q)}(1 + \varepsilon_{n,q})$, $\varepsilon_{n,q} > 0$, и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n(\varepsilon_{n,q}\delta^{(n,q)})^2/2) = \sum (\alpha^{(q)})^{\varepsilon_{n,q}^2} < \infty,\ \text{где } \alpha^{(q)} = \alpha/q,$$

то число событий в последовательности $|2\mathrm{N}_q^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n,q)}$, $n = 1, 2, \ldots$, будет п. н. конечным, $q = 1, 2, \ldots$

[27] Условия (103) гарантируют существование $k_1 < k_2 < \ldots$ и обеспечивают их единственность.

5. Теоретико-возможностное моделирование как расширение теоретико-вероятностного

Приведенные результаты иллюстрируют одно из принципиальных отличий моделирования случайности теоретико-вероятностными и теоретико-возможностными методами: *в то время как при эмпирическом построении теоретико-вероятностной модели* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr})$ *стохастического объекта последняя должна быть неизменна в течении всего времени наблюдений, при эмпирическом построении теоретико-возможностной модели* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \P)$ *этого же объекта его теоретико-вероятностная модель в течении наблюдений может произвольно эволюционировать в пределах одного из классов* $\{(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}),\ \mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}\},\ e \in (0,1)$. *Это отличие*[28] *существенно расширяет класс стохастических объектов, модели которых могут быть построены эмпирически, что наглядно проиллюстрировано на рис. 1 для случая* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

Стохастическая модель объекта, которую можно оценить эмпирически, определяется точкой в треугольнике 1 б), неподвижной в течение всего времени наблюдений. Семь неприводимых нечетких моделей, определяемых классами возможностей $\mathbb{P}_{(e)},\ e = 0.001, \ldots, 0.111$, отмеченными на треугольнике 1 а), определяются семью подмножествами $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)},\ e = 0.001, \ldots, 0.111$, показанными на треугольнике 1 б). При эмпирическом восстановлении любой из семи теоретико-возможностных моделей вероятность, контролирующая результаты наблюдений, может произвольно изменяться от наблюдения к наблюдению, оставаясь в пределах одного из классов $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)},\ e = 0.001, \ldots, 0.111$.

Если выполнены условия (16) регулярности, то в треугольнике 1 б) остаются лишь два множества: класс $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$ и класс $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.011)}$ без его границы с классом $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$. Любая из нечетких моделей, отвечающая классам $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$ и $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.011)}$, определяется п. н. безошибочно на основе конечного числа наблюдений.

Если выполнено более общее, чем в (16), условие регулярности вероятностей $\mathrm{Pr}_1, \mathrm{Pr}_2, \ldots$, а именно, если для некоторого j и всех

[28] Условие «устойчивости частот» для эмпирического восстановления вероятности заменяется на условие $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$-измеримости возможности $\P,\ e \in [0,1]$.

$s = 1, \dots, k$ $f_1^s \neq 1, \dots, f_{j-1}^s \neq 1 = f_j^s = f_{j+1}^s = \dots$, то в треугольнике 1 б) останутся четыре класса: $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}, \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.011)}, \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.100)}$ и $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.110)}$, и любая из нечетких моделей, отвечающих одному из классов $\mathbb{P}_{(0.111)}, \mathbb{P}_{(0.011)}, \mathbb{P}_{(0.100)}$ и $\mathbb{P}_{(0.110)}$ может быть восстановлена безошибочно на основе п. н. конечного числа испытаний.

Заметим, что в случае неизменяющейся от испытания к испытанию вероятности стохастическая модель, вообще говоря, не может быть восстановлена точно на основе любого конечного числа испытаний, см. замечание 2.

Разумеется, не следует думать, что теоретико-возможностное моделирование непременно ориентировано на исследование недоопределенных стохастических объектов. На самом деле теоретико-возможностные модели характерны для нечетких, размытых и т. п. объектов, как раз не имеющих хорошо определенной стохастической компоненты, см., например, [10]. Вместе с тем следует отметить, что теоретико-возможностное моделирование оказалось весьма эффективным и в областях, характерных для стохастических приложений, таких, например, как оптимальные решения, прогнозирование, анализ и интерпретация эксперимента и т. п.[29] [9].

Список литературы

[1] Savage L. J. The Foundations of Statistics. New-York: Dover, 1972.

[2] Dempster A. P. Upper and Lower probabilities induced by a multivalued mapping // Ann. Math. Statist. 1967. **38**. P. 325–339.
Dempster A. P. A generalization of Bayesian inference // J. Roy Statist. Soc. 1968. **B 30**. P. 205–247.

[3] Choquet G. Theory of capacities // Ann. Inst. Fourier. 1953/1954. **5**. 131–295.

[4] Shafer G. A mathematical theory of evidence. Princeton N.J.: Princeton University Press, 1976.

[5] Zadeh L. A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility // Fuzzy Sets and Systems. 1978. N 1. P. 3–28.

[29] Математическая модель возможности, представленная в настоящей работе и в монографии [9], принципиально отличается от известных моделей возможности, см., например, [5, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]

[6] Zadeh L. A. Fuzzy sets // Information and Control. 1965. V. 8. P. 235–350.

[7] Кашьяп Р. Л., Рао А. Р. Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным. М.: Наука, 1983.

[8] Поппер К. Логика и рост научного знания. М., 1983.

[9] Пытьев Ю. П. Возможность как альтернатива вероятности // Математические и эмпирические основы, применения. М.: Физматлит, 2007.

[10] Dubois D., Prade H. Theorie des Possibilites. Paris—Milano—Barcelona—Mexico: MASSON, 1988 / Д. Дюбуа, А. Прад. Теория возможностей. М.: Радио и связь, 1990.

[11] Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука, 1981.

[12] Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / под ред. Д. А. Поспелова. М.: Наука, 1986.

[13] de Cooman G. Possibility Theory I: the measure- and integral-theoretic groundwork // International Journal of General Systems. 25 (1997). P. 291–323.

[14] de Cooman G. Possibility Theory II: Conditional Possibility // International Journal of General Systems. 25 (1997). P. 325–351.

[15] de Cooman G. Possibility Theory III: Possibilistic Independence // International Journal of General Systems. 25 (1997). P. 353–371.

[16] Slowinski R. Handbook of Fuzzy Sets and Possibility Theory. Operations Research and Statistics. Kluwer Academic Publishers, 1998.

[17] Wolkenhauer O. Possibility Theory with Applications to Data Analysis. Research Studies Press, 1998.

[18] Orlovski S. A. Calculus of Decomposable Properties. Fuzzy Sets and Decisions. N.Y.: Alterton Press, Inc, 1994.

[19] Hoeffding W. Probability of sums of bounded random variables // J. Amer. Statist. Assoc. 1963. V. 58. N 301. P. 213–226.

[20] Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, Физматлит, 1987.