Нечёткие модальные логики

А. М. Миронов

В статье введён и изучен класс логических исчислений, называемых **нечёткими модальными логиками**. Описана семантика данных исчислений в классе нечётких моделей Крипке, и доказана теорема полноты минимальной нечёткой модальной логики FK в классе нечётких моделей Крипке.

1. Введение

Математические методы анализа систем заключаются в построении математических моделей исследуемых систем и формальном анализе этих моделей.

Поскольку модели систем не тождественны самим системам, и являются лишь их аппроксимациями, то, следовательно, свойства исследуемых систем и свойства их моделей могут различаться. Данная ситуация приводит к существенным трудностям при предсказании свойств реальных систем на основе информации о свойствах их моделей.

Один способ нахождения точных свойств анализируемых систем заключается в построении как можно более точных и детальных их математических моделей. Во многих ситуациях данный путь приводит к большим трудностям, по причине того, что большая сложность детальных моделей может вызывать существенные вычислительные проблемы при их формальном анализе.

Другой путь исследования свойств реальных систем заключается в построении таких их приближённых математических моделей, которые, хотя и являются грубыми подобиями исследуемых систем, но имеют приемлемую вычислительную сложность. Основная возникающая здесь проблема заключается в оценке меры расхождения между свойствами реальной системы и свойствами её приближённой модели.

Для точного оценивания данного расхождения необходим точный учёт в математической модели анализируемой системы всех предположений о нечёткости, недостоверности и неопределённости при построении данной модели, меры точности измерения параметров анализируемой системы, и т. п.

Все нечёткие компоненты математической модели анализируемой системы можно условно сгруппировать в следующие две категории.

1) Нечёткие компоненты, возникающие по причине *эффекта случайности*. Данный эффект имеет место например тогда, когда нечёткость в процессе измерения значения некоторого параметра анализируемой системы носит вероятностный характер, и измеряемые значения данного параметра подчиняются некоторым статистическим закономерностям.
   Данный вид нечёткости исследуется методами теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов.
2) Нечёткие компоненты, возникающие по причине *концептуальной нечёткости*. Данные компоненты могут быть связаны с неполным и недостоверным знанием об изучаемой системе.

Настоящая статья посвящена построению нового математического аппарата для исследования нечётких компонентов, относящихся ко второй категории.

Математические подходы к представлению и анализу нечётких знаний были рассмотрены во многих работах, в частности, в статьях [3]–[14]. Однако во всех них не рассматривались математические методы для анализа концептуальной нечёткости в поведении динамических систем. Настоящая работа в некоторой степени восполняет данный пробел.

Наше представление нечёткости в поведении динамических систем основывается на понятии меры близости между состояниями динамических систем. Мы представляем поведение динамических систем нечёткими моделями Крипке, которые являются обобщением известных в модальной логике моделей Крипке, широко используемых в компьютерной науке для моделирования поведения дискретных динамических систем (см., например, [2]). Основная задача статьи заключается в построении формальных логических систем, предназначенных для разработки на их основе языков спецификации поведения нечётких динамических систем. Данные формальные системы называются в статье **нечёткими модальными логиками**. В работе описана семантика нечётких модальных логик в классе нечётких моделей Крипке, и доказана теорема полноты минимальной нечёткой модальной логики в классе нечётких моделей Крипке.

2. Нечёткие модальные логики

2.1. Шкала оценок

Напомним, что **полной решёткой** называется частично упорядоченное множество $(\mathcal{B}, \leqslant)$, такое, что для каждого подмножества $Q \subseteq \mathcal{B}$ существуют его точная нижняя грань и точная верхняя грань, то есть такие элементы $\inf(Q)$ и $\sup(Q)$ множества $\mathcal{B}$, что для каждого $b \in \mathcal{B}$ имеют место соотношения

$$\begin{array}{lcl} (\forall q \in Q \quad b \leqslant q) & \leftrightarrow & b \leqslant \inf(Q), \\ (\forall q \in Q \quad q \leqslant b) & \leftrightarrow & \sup(Q) \leqslant b. \end{array}$$

Ниже элементы $\inf(\mathcal{B})$ и $\sup(\mathcal{B})$ обозначаются символами 0 и 1 соответственно.

Для произвольного конечного подмножества

$$Q = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \mathcal{B}$$

элементы $\inf(Q)$ и $\sup(Q)$ будут обозначаться знакосочетаниями

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \quad \text{и} \quad a_1 \vee \ldots \vee a_n$$

соответственно. Для данных элементов также будут использоваться обозначения

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{array} \right\} \quad \text{и} \quad \left[\begin{array}{c} a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{array} \right]$$

соответственно.

Шкалой оценок называется полная решётка $\mathcal{B}$, в которой для каждой пары $a, b \in \mathcal{B}$ определён элемент

$$a \to b \tag{1}$$

обладающий следующим свойством: для каждого $c \in \mathcal{B}$

$$c \leqslant (a \to b) \quad \leftrightarrow \quad (c \wedge a) \leqslant b \tag{2}$$

Элемент (1) можно интерпретировать как меру истинности высказывания

$$«a \leqslant b»$$

В нижеследующем тексте символ $\mathcal{B}$ обозначает некоторую фиксированную шкалу оценок.

Для каждой пары $a, b \in \mathcal{B}$ символом $a \leftrightarrow b$ будет ниже обозначаться элемент $(a \to b) \wedge (b \to a)$.

2.2. Нечёткие модальные формулы

Пусть задано некоторое множество PV, элементы которого называются **пропозициональными переменными**.

Множество Fm **нечётких модальных формул** (называемых ниже просто **формулами**) определяется индуктивно следующим образом:

- Каждый элемент множества PV является формулой.
- Каждый элемент шкалы $\mathcal{B}$ является формулой.
- Если A и B — формулы, то знакосочетания $A \wedge B$, $A \vee B$, и $A \to B$ являются формулами.
- Если A — формула, и $a \in \mathcal{B}$, то знакосочетание $\Box_a A$ является формулой.

Модальные связки вида $\Box_a$ называются **нечёткими модальными операторами**.

При некоторых интерпретациях формул и оценок формулу вида $\Box_a A$ можно интерпретировать как высказывание

мера убедительности факта,
выражаемого формулой A, равна a.

Для произвольного списка $A_1, \ldots, A_n$ формул из Fm знакосочетания

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \ \text{ и } \ A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$$

являются сокращённой записью формул

$$A_1 \wedge (A_2 \wedge (\ldots \wedge A_n) \ldots) \ \text{ и } \ A_1 \vee (A_2 \vee (\ldots \vee A_n) \ldots)$$

соответственно. Данные формулы также будут обозначаться знакосочетаниями

$$\left\{ \begin{array}{c} A_1 \\ \ldots \\ A_n \end{array} \right\} \quad \text{и} \quad \left[\begin{array}{c} A_1 \\ \ldots \\ A_n \end{array} \right]$$

соответственно.

Для каждой пары $A, B \in Fm$ знакосочетание $A \leftrightarrow B$ является сокращённым обозначением формулы

$$(A \to B) \wedge (B \to A).$$

2.3. Операторы подстановки

Оператором подстановки на множестве Fm называется пара

$$\theta \ = \ ((p_1, \ldots, p_n),\ (A_1, \ldots, A_n)) \tag{3}$$

где $n \geqslant 1$ и

- $(p_1, \ldots, p_n)$ — список различных пропозициональных переменных,
- $(A_1, \ldots, A_n)$ — список формул.

Оператор θ индуцирует отображение множества Fm в себя, обозначаемое тем же символом θ, и определяемое индуктивно следующим образом: для каждой формулы $A \in Fm$

- если $A = p_i \in \{p_1, \ldots, p_n\}$, то

$$\theta(A) \stackrel{\text{def}}{=} A_i,$$

- если $A \in PV \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$, или $A = a \in \mathcal{B}$, то

$$\theta(A) \stackrel{\text{def}}{=} A,$$

- если A имеет вид

$$B \wedge C, \quad B \vee C, \quad B \to C, \quad \text{или} \quad \Box_a B$$

то $\theta(A)$ имеет вид

$$\theta(B) \wedge \theta(C), \quad \theta(B) \vee \theta(C), \quad \theta(B) \to \theta(C), \quad \Box_a \theta(B)$$

соответственно.

2.4. Тавтологии

Пусть A и B — некоторые формулы из Fm. Мы будем говорить, что B **получена из A эквивалентным преобразованием**, если

- A содержит подформулу вида

$$a \wedge b, \quad a \vee b, \quad \text{или} \quad a \to b$$

где $a, b \in \mathcal{B}$, и

- B получается из A путём замены данной подформулы на элемент шкалы $\mathcal{B}$, являющийся результатом применения соответствующей операции к паре a, b.

Две формулы из Fm называются **эквивалентными**, если одну из них можно получить из другой путём нескольких эквивалентных преобразований.

Пусть A — формула, не содержащая модальных операторов, и список всех пропозициональных переменных, входящих в A, имеет вид

$$(p_1, \ldots, p_n).$$

Формула A называется **тавтологией**, если для каждого оператора подстановки θ вида (3), такого, что

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad A_i = a_i \in \mathcal{B}$$

формула $\theta(A)$ эквивалентна элементу $1 \in \mathcal{B}$.

2.5. Нечёткие модальные логики

Нечёткой модальной логикой называется произвольное подмножество L множества Fm, обладающее следующими свойствами:

- каждая тавтология принадлежит L
- для всех $A, B \in Fm$ и каждого $a \in \mathcal{B}$

$$\Box_a \left\{ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \Box_a A \\ \Box_a B \end{array} \right\} \quad \in L, \tag{4}$$

- для каждого $a \in \mathcal{B}$

$$a \to \Box_a 1 \quad \in L, \tag{5}$$

- для каждой формулы $A \in Fm$ и каждого $a \in \mathcal{B}$

$$\Box_a A \to a \quad \in L, \tag{6}$$

- для всех $A, B \in Fm$

$$\begin{array}{ll} \textbf{если} & A \ \in L \quad \textbf{и} \quad A \to B \ \in L \\ \textbf{то} & B \ \in L \end{array} \tag{7}$$

- для каждой формулы $A \in Fm$ и каждого оператора подстановки θ

$$\begin{array}{ll} \textbf{если} & A \in L \\ \textbf{то} & \theta(A) \in L \end{array} \tag{8}$$

- для всех $A, B \in Fm$ и всех $a, b \in \mathcal{B}$

$$\begin{array}{ll} \textbf{если} & a \to (A \to B) \ \in L \\ \textbf{то} & a \to (\Box_b A \to \Box_b B) \ \in L \end{array} \tag{9}$$

- для каждой формулы $A \in Fm$ и каждого подмножества $\{a_i \mid i \in \Im\} \subseteq \mathcal{B}$

$$\begin{array}{ll} \textbf{если} & \forall i \in \Im \quad a_i \to A \ \in L \\ \textbf{то} & (\sup\limits_{i \in \Im} a_i) \to A \quad \in L. \end{array} \tag{10}$$

Из данного определения вытекает, что существует минимальная (относительно включения) нечёткая модальная логика, которую мы будем обозначать знакосочетанием FK (которое является аббревиатурой словосочетания *Fuzzy Kripke*).

Нетрудно доказать, что для каждой нечёткой модальной логики L имеет место следующее правило вывода:

$$\begin{array}{ll} \textbf{если} & a_1 \to A_1 \ \in L, \ \ldots, \ a_n \to A_n \ \in L \\ & \left(\begin{array}{ll} \text{где} & a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{B}, \quad \text{и} \\ & A_1, \ldots, A_n \in Fm \end{array} \right) \\ \textbf{то} & \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{c} A_1 \\ \ldots \\ A_n \end{array} \right\} \in L. \end{array} \tag{11}$$

Ниже вместо термина «нечёткая модальная логика» будет использоваться эквивалентный ему в данной статье термин «логика».

Для каждой формулы A и каждой логики L символ

$$[\![A]\!]_L$$

обозначает точную верхнюю грань множества

$$\{a \in \mathcal{B} \mid a \to A \quad \in L\}. \tag{12}$$

Из данного определения и из свойства (10) следует соотношение

$$\forall a \in \mathcal{B} \qquad a \to A \ \in L \quad \leftrightarrow \quad a \leqslant [\![A]\!]_L.$$

3. Нечёткие модели Крипке

Рассматриваемые в настоящей статье

- понятие нечёткого множества, и
- связанные с ним понятия и конструкции

аналогичны

- понятию гейтингозначного множества, и
- связанным с ним понятиям и конструкциям,

введённым в [1].

3.1. Нечёткие множества

Нечётким множеством называется пара

$$W = (X, \mu) \tag{13}$$

где

- X — множество (называемое **носителем** W), и
- μ — отображение вида

$$\mu : X \times X \to \mathcal{B}$$

  обладающее следующими свойствами:

$$\forall x, y \in X \qquad \mu(x, y) = \mu(y, x) \tag{14}$$

$$\forall x, y, z \in X \qquad \left\{ \begin{array}{c} \mu(x, y) \\ \mu(y, z) \end{array} \right\} \leqslant \mu(x, z) \tag{15}$$

Для каждой пары $x, y \in X$ элемент $\mu(x, y)$ называется **мерой близости x и y**. Для каждого $x \in X$ элемент $\mu(x, x)$ называется **мерой принадлежности** элемента x нечёткому множеству (13).

Бинарным отношением на (13) называется произвольное отображение R вида

$$R : X \times X \to \mathcal{B}$$

удовлетворяющее следующим условиям:

$$\forall x, y, x', y' \in X \qquad \left\{ \begin{array}{c} R(x, y) \\ \mu(x, x') \\ \mu(y, y') \end{array} \right\} \leqslant R(x', y'), \tag{16}$$

$$\forall x, y \in X \qquad R(x, y) \leqslant \left\{ \begin{array}{c} \mu(x, x) \\ \mu(y, y) \end{array} \right\}. \tag{17}$$

Для каждой пары $(x, y) \in X \times X$ элемент $R(x, y)$ можно интерпретировать как **меру принадлежности** данной пары бинарному отношению R.

Подмножеством нечёткого множества (13) называется произвольное отображение s вида

$$s : X \to \mathcal{B}$$

удовлетворяющее следующим условиям:

$$\forall x, x' \in X \qquad \left\{ \begin{array}{l} s(x) \\ \mu(x, x') \end{array} \right\} \leqslant s(x'), \tag{18}$$

$$\forall x \in X \qquad s(x) \leqslant \mu(x, x). \tag{19}$$

Для каждого $x \in X$ элемент $s(x)$ можно интерпретировать как **меру принадлежности** элемента x подмножеству s.

Совокупность всех подмножеств нечёткого множества (13) обозначается символом $Sub(W)$.

Ниже для каждого нечёткого множества W его носитель будет обозначаться тем же самым символом W, и для каждой пары x, y элементов носителя мера близости x и y будет обозначаться символом $W(x, y)$. Кроме того, для каждого $x \in W$ символ $W(x)$ по определению обозначает меру принадлежности элемента x нечёткому множеству W.

3.2. Определение нечёткой модели Крипке

Нечёткой моделью Крипке называется произвольная тройка M вида

$$M = (W, \{R_a \mid a \in \mathcal{B}\}, \xi) \tag{20}$$

компоненты которой определяются следующим образом:

1) W — это некоторое нечёткое множество, элементы которого называются **точками**,
2) $\{R_a \mid a \in \mathcal{B}\}$ — это $\mathcal{B}$-индексированная совокупность бинарных отношений на W, называемых **отношениями достижимости**,
3) ξ — это отображение вида
$$\xi : PV \to Sub(W) \tag{21}$$
называемое **оценкой пропозициональных переменных**.

Ниже вместо термина «нечёткая модель Крипке» будет использоваться эквивалентный ему в данной статье термин «модель».

3.3. Оценка формул в моделях

Для каждой формулы $A \in Fm$ и каждой модели (20) **оценкой** A **в** M называется отображение

$$[\![A]\!]_M : W \to \mathcal{B},$$

которое сопоставляет каждому $x \in W$ оценку $[\![A]\!]_x \in \mathcal{B}$, определяемую следующим образом:

- для всех $p \in PV$
$$[\![p]\!]_x \stackrel{\text{def}}{=} \xi(p)(x), \tag{22}$$
- для всех $a \in \mathcal{B}$
$$[\![a]\!]_x \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} a \\ W(x) \end{array} \right\}, \tag{23}$$
-
$$[\![A \wedge B]\!]_x \stackrel{\text{def}}{=} [\![A]\!]_x \wedge [\![B]\!]_x, \tag{24}$$
-
$$[\![A \vee B]\!]_x \stackrel{\text{def}}{=} [\![A]\!]_x \vee [\![B]\!]_x, \tag{25}$$
-
$$[\![A \to B]\!]_x \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} [\![A]\!]_x \to [\![B]\!]_x \\ W(x) \end{array} \right\}, \tag{26}$$
-
$$[\![\Box_a A]\!]_x \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} a \\ \inf\limits_{y \in W} (R_a(x,y) \to [\![A]\!]_y) \\ W(x) \end{array} \right\}. \tag{27}$$

Нетрудно доказать, что отображение $[\![A]\!]_M$ является подмножеством нечёткого множества W.

3.4. Истинность формул в моделях

Формула $A \in Fm$ называется **истинной в точке** x модели (20), если имеет место соотношение

$$[\![A]\!]_x = W(x). \tag{28}$$

Формула $A \in Fm$ называется **истинной в модели** (20), если она истинна в каждой точке этой модели.

Нетрудно доказать, что каждая формула логики FK истинна в каждой модели. Это следует из того, что

- каждая тавтология истинна в любой модели,
- формулы из соотношений (4), (5) и (6) истинны в произвольной модели, и
- правила вывода (7), (8), (9) и (10) сохраняют свойство истинности в произвольной модели.

Оставшая часть статьи посвящена доказательству обратного утверждения: если формула истинна в каждой модели, то она принадлежит логике FK.

4. L-совместимые множества

4.1. Непротиворечивые логики

Логика $L \subseteq Fm$ называется **непротиворечивой**, если

$$\forall a \in \mathcal{B} \qquad a \in L \quad \Rightarrow \quad a = 1. \tag{29}$$

Докажем, что логика FK непротиворечива.

Как было отмечено в параграфе 3.4, для каждого $a \in \mathcal{B}$, из соотношения $a \in FK$ следует, что формула a истинна в каждой модели, в частности, в модели вида (20), где W состоит из одного элемента x, и

$$W(x) = 1. \tag{30}$$

Соотношение (29) следует из (23), (28) и (30). Утверждение доказано.

Ниже под логикой понимается непротиворечивая логика.

4.2. Определение L-совместимого множества

Пусть

- L — некоторая непротиворечивая логика, и

- u — некоторое подмножество Fm.

Множество u называется L-**совместимым**, если для

- каждого конечного подмножества множества u, имеющего вид

$$\begin{aligned}&\{a_1 \to A_1, \ldots, a_n \to A_n\} \\ &(\text{где }\ a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{B},\ \ A_1, \ldots, A_n \in Fm)\end{aligned} \tag{31}$$

  и

- каждого $b \in \mathcal{B}$

из соотношения

$$\left\{\begin{array}{c} A_1 \\ \ldots \\ A_n \end{array}\right\} \to b \quad \in L \tag{32}$$

следует соотношение

$$\left\{\begin{array}{c} a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{array}\right\} \leqslant b. \tag{33}$$

4.3. Свойства L-совместимых множеств

Для каждой пары u_1, u_2 подмножеств Fm неравенство

$$u_1 \leqslant u_2$$

означает, что

$$\begin{aligned}&\text{для каждой формулы вида }\ a \to A\ \in u_1 \\ &a = 0\ \text{ или }\ \exists\, b \geqslant a:\ b \to A\ \in u_2.\end{aligned}$$

Теорема 1. *Для каждой пары u_1, u_2 подмножеств Fm из неравенства*

$$u_1 \leqslant u_2$$

следует, что если u_2 — L-совместимо, то u_1 тоже L-совместимо.

Теорема 2. *Каждая непротиворечивая логика L является L-совместимым множеством.*

Доказательство. Применяя правило вывода (11) к подмножеству (31) множества L, получаем соотношение

$$\left\{\begin{array}{c} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{c} A_1 \\ \dots \\ A_n \end{array}\right\} \quad \in L. \tag{34}$$

Из (32), (34) и (7) следует соотношение

$$\left\{\begin{array}{c} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{array}\right\} \to b \quad \in L \tag{35}$$

Из (35) и (29) следует (33). Теорема доказана.

Ниже символ L обозначает произвольную непротиворечивую логику.

Теорема 3. *Пусть*

- u *— некоторое* L*-совместимое множество,*
- A *— некоторая формула, и*
- Q *— множество всех элементов* $a \in \mathcal{B}$*, таких, что*

$$u \cup \{a \to A\} \quad L\text{-совместимо.} \tag{36}$$

Тогда для каждого $a \in \mathcal{B}$ *имеет место соотношение*

$$a \leqslant \sup(Q) \quad \leftrightarrow \quad a \in Q.$$

Доказательство. Заметим, что $Q \neq \varnothing$, так как $0 \in Q$.

Импликация

$$a \in Q \quad \Rightarrow \quad a \leqslant \sup(Q)$$

очевидна.

Импликация

$$a \leqslant \sup(Q) \quad \Rightarrow \quad a \in Q$$

эквивалентна следующей паре утверждений:

1) множество
$$u \cup \{\sup(Q) \to A\} \tag{37}$$
является L-совместимым

2) если множество
$$u \cup \{a \to A\}$$
L-совместимо, то для каждого $a' \leqslant a$ множество
$$u \cup \{a' \to A\}$$
тоже L-совместимо.

Утверждение 2 следует из теоремы 1.

Докажем утверждение 1: для

- каждого подмножества (31) множества (37), и
- каждого $b \in \mathcal{B}$

из (32) следует (33).

Так как u по предположению L-совместимо, то для доказательства импликации
$$(32) \quad \Rightarrow \quad (33)$$
достаточно рассмотреть лишь случай, когда множество (31) имеет следующий вид:

- $(a_1 \to A_1) = (\sup(Q) \to A)$
- $\forall\, i = 2, \ldots, n \quad (a_i \to A_i) \in u$.

В этом случае (33) имеет следующий вид:
$$\left\{ \begin{array}{l} \sup(Q) \\ a_2 \wedge \ldots \wedge a_n \end{array} \right\} \leqslant b \tag{38}$$

(38) эквивалентно соотношению
$$\forall\, a \in Q \quad \left\{ \begin{array}{l} a \\ a_2 \wedge \ldots \wedge a_n \end{array} \right\} \leqslant b \tag{39}$$

(39) следует из (36). Теорема доказана.

Элемент $\sup(Q)$, который однозначно определяется по A и u, обозначается ниже символом

$$[\![A]\!]_u \tag{40}$$

Из определения элемента $[\![A]\!]_u$ вытекает, что для каждого $u \subseteq Fm$ имеет место импликация

$$\begin{array}{l} u \quad L\text{-совместимо} \quad \Rightarrow \quad \forall\, A \in Fm \\ u \cup \{[\![A]\!]_u \to A\} \quad L\text{-совместимо} \end{array} \tag{41}$$

Теорема 4. *Пусть u_1 и u_2 — L-совместимые множества, такие, что*

$$u_1 \leqslant u_2.$$

Тогда для каждой формулы A

$$[\![A]\!]_{u_2} \leqslant [\![A]\!]_{u_1}. \tag{42}$$

Доказательство. Так как

- множество
$$u_2 \cup \{[\![A]\!]_{u_2} \to A\}$$
L-совместимо, и
- $u_1 \cup \{[\![A]\!]_{u_2} \to A\} \leqslant u_2 \cup \{[\![A]\!]_{u_2} \to A\}$

то из теоремы 1 следует, что множество

$$u_1 \cup \{[\![A]\!]_{u_2} \to A\} \tag{43}$$

L-совместимо.

Из L-совместимости (43) и из определения элемента $[\![A]\!]_{u_1}$ следует неравенство (42). Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть*

- *$u \subseteq Fm$ — некоторое L-совместимое множество, и*
- *A, B — пара формул, таких, что*

$$A \to B \quad \in L \tag{44}$$

Тогда имеет место неравенство

$$[\![A]\!]_u \leqslant [\![B]\!]_u \tag{45}$$

Доказательство. (45) эквивалентно L-совместимости множества

$$u \cup \{[\![A]\!]_u \to B\} \tag{46}$$

то есть утверждению о том, что для

- каждого подмножества (31) множества (46), и
- каждого $b \in \mathcal{B}$

из (32) следует (33).

Так как u по предположению L-совместимо, то для доказательства импликации

$$(32) \quad \Rightarrow \quad (33)$$

достаточно рассмотреть лишь тот случай, когда (31) имеет следующий вид:

- $(a_1 \to A_1) = ([\![A]\!]_u \to B)$
- для каждого $i = 2, \ldots, n$

$$a_i \to A_i \quad \in u \tag{47}$$

В этом случае (32) эквивалентно соотношению

$$B \to (\left\{\begin{array}{c} A_2 \\ \ldots \\ A_n \end{array}\right\} \to b) \quad \in L \tag{48}$$

Из (44) и (48) следует соотношение

$$A \to (\left\{\begin{array}{c} A_2 \\ \ldots \\ A_n \end{array}\right\} \to b) \quad \in L \tag{49}$$

которое эквивалентно соотношению

$$\left\{\begin{array}{c} A \\ A_2 \\ \ldots \\ A_n \end{array}\right\} \to b \quad \in L \tag{50}$$

Так как множество

$$u \cup \{[\![A]\!]_u \to A\}$$

является L-совместимым, то из (47) и (50) следует неравенство

$$\left\{\begin{array}{l} [\![A]\!]_u \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{array}\right\} \leqslant b \tag{51}$$

которое эквивалентно (33) для данного случая. Теорема доказана.

Теорема 6. *Для*

- *каждого L-совместимого множества u, и*
- *каждой формулы $A \in Fm$*

имеет место неравенство:

$$[\![A]\!]_L \leqslant [\![A]\!]_u \tag{52}$$

Доказательство. (52) эквивалентно L-совместимости множества

$$u \cup \{[\![A]\!]_L \to A\} \tag{53}$$

то есть утверждению о том, что для

- каждого подмножества (31) множества (53), и
- каждого $b \in \mathcal{B}$

из (32) следует (33).

Так как u по предположению L-совместимо, то для доказательства импликации

$$(32) \quad \Rightarrow \quad (33)$$

достаточно рассмотреть лишь тот случай, когда (31) имеет следующий вид:

- $(a_1 \to A_1) = ([\![A]\!]_L \to A)$

- для каждого $i = 2, \ldots, n$

$$a_i \to A_i \quad \in u \tag{54}$$

В этом случае (32) эквивалентно соотношению

$$A \to (\left\{\begin{array}{c} A_2 \\ \ldots \\ A_n \end{array}\right\} \to b) \quad \in L \tag{55}$$

Из соотношений

$$[\![A]\!]_L \to A \quad \in L$$

и (55) следует соотношение

$$[\![A]\!]_L \to (\left\{\begin{array}{c} A_2 \\ \ldots \\ A_n \end{array}\right\} \to b) \quad \in L \tag{56}$$

Из (56) следует соотношение

$$\left\{\begin{array}{c} A_2 \\ \ldots \\ A_n \end{array}\right\} \to ([\![A]\!]_L \to b) \quad \in L \tag{57}$$

Так как u по предположению L-совместимо, то из (54) и (57) следует неравенство

$$\left\{\begin{array}{c} a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{array}\right\} \leqslant [\![A]\!]_L \to b \tag{58}$$

Из (58) следует (33). Теорема доказана.

5. L-полные множества

5.1. Определение L-полного множества

Пусть x — некоторое подмножество множества Fm.
Множество x называется **L-полным**, если

- x является L-совместимым,
- для каждой формулы $A \in Fm$

$$[\![A]\!]_x \to A \quad \in x. \tag{59}$$

5.2. Пополнение L-совместимых множеств

Пусть

- u — некоторое L-совместимое множество, и
- x — некоторое L-полное множество.

x называется **пополнением** u, если

$$u \leqslant x \tag{60}$$

Теорема 7. *Для каждого L-совместимого множества u существует пополнение x.*

Доказательство. Пусть последовательность

$$B_1, B_2, \ldots \tag{61}$$

есть некоторое перечисление всех формул из Fm.

Определим последовательность

$$u_1, u_2, \ldots$$

подмножеств множества Fm следующим образом:

- $u_1 \stackrel{\text{def}}{=} u$,
- для каждого $k \geqslant 1$

$$u_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} u_k \cup \{[\![B_k]\!]_{u_k} \to B_k\}$$

Из данного определения и из утверждения (41) следует, что для каждого $k \geqslant 1$ верно утверждение:

$$\begin{array}{l} \text{если } u_k \quad L\text{-совместимо,} \\ \text{то } u_{k+1} \text{ тоже } L\text{-совместимо.} \end{array} \tag{62}$$

Так как u_1 по предположению L-совместимо, то из (62) следует, что

$$\forall k \geqslant 1 \quad u_k \quad L\text{-совместимо}$$

Определим искомое множество x следующим образом:

$$x \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k \geqslant 1} u_k$$

Множество x является L-совместимым, поскольку для каждого его конечного подмножества вида (31) существует номер $k \geqslant 1$, такой, что данное подмножество содержится в множестве u_k (которое, как было отмечено выше, является L-совместимым).

Докажем, что для каждой формулы $A \in Fm$ верно свойство (59).

По определению последовательности (61), существует номер k, такой, что $A = B_k$.

Поскольку

$$[\![B_k]\!]_{u_k} \to B_k \quad \in x$$

то

$$[\![B_k]\!]_{u_k} \leqslant [\![B_k]\!]_x. \tag{63}$$

Поскольку $u_k \subseteq x$, то из теоремы 4 следует, что

$$[\![B_k]\!]_x \leqslant [\![B_k]\!]_{u_k}. \tag{64}$$

Объединяя (63) и (64), получаем равенство

$$[\![B_k]\!]_x = [\![B_k]\!]_{u_k}. \tag{65}$$

Следовательно,

$$[\![B_k]\!]_x \to B_k \;\; = \;\; [\![B_k]\!]_{u_k} \to B_k \;\; \in u_{k+1} \subseteq x. \tag{66}$$

Из (66) вытекает (59) (при $A = B_k$).

Таким образом, множество x является L-полным.

Докажем, что x является пополнением множества u, то есть

$$\forall\, (a \to A) \in u \qquad a \leqslant [\![A]\!]_x.$$

По определению x,

$$\exists k \geqslant 1 : \quad A = B_k.$$

Так как
$$(a \to B_k) \in u \subseteq u_k$$
то
$$u_k \cup \{a \to B_k\} \quad L\text{-совместимо.} \tag{67}$$
Из (67) и (65) получаем:
$$a \leqslant [\![B_k]\!]_{u_k} = [\![B_k]\!]_x = A_x.$$
Теорема доказана.

6. Свойства L-полных множеств

Теорема 8. *Пусть x — L-полное множество, и $a \in \mathcal{B}$. Тогда*
$$[\![a]\!]_x = a. \tag{68}$$

Доказательство. Поскольку x является L-совместимым, то его одноэлементное подмножество $\{[\![a]\!]_x \to a\}$ обладает следующим свойством: для каждого $b \in \mathcal{B}$ из соотношения
$$a \to b \quad \in L \tag{69}$$
следует неравенство
$$[\![a]\!]_x \leqslant b \tag{70}$$
Поскольку (69) верно для $b = a$, то (70) тоже должно быть верно для $b = a$, то есть
$$[\![a]\!]_x \leqslant a. \tag{71}$$

Для доказательства обратного неравенства докажем L-совместимость множества
$$x \cup \{a \to a\}. \tag{72}$$
Для этого необходимо доказать, что для

- каждого подмножества (31) множества (72), и
- каждого $b \in \mathcal{B}$

из (32) следует (33).

Так как x по предположению L-совместимо, то для доказательства импликации

$$(32) \quad \Rightarrow \quad (33)$$

достаточно рассмотреть лишь тот случай, когда (31) удовлетворяет следующим условиям:

$$(a_1 \to A_1) = (a \to a)$$

$$\forall i = 2, \dots, n \qquad a_i \to A_i \quad \in x \tag{73}$$

В этом случае (32) эквивалентно соотношению

$$\left\{ \begin{array}{l} a \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{array} \right\} \to b \quad \in L \tag{74}$$

а (33) эквивалентно неравенству

$$\left\{ \begin{array}{l} a \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{array} \right\} \leqslant b \tag{75}$$

(74) эквивалентно соотношению

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 \\ \dots \\ A_n \end{array} \right\} \to (a \to b) \quad \in L \tag{76}$$

Из (76) и из L-совместимости x следует неравенство

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 \\ \dots \\ a_n \end{array} \right\} \leqslant a \to b \tag{77}$$

(75) следует из (77). Теорема доказана.

Во всех нижеследующих рассуждениях мы будем предполагать, что шкала $\mathcal{B}$ обладает следующим свойством:

$$\forall a \in \mathcal{B} \qquad (a \to 0) \to 0 = a. \tag{78}$$

Нетрудно доказать, что данное свойство эквивалентно тому, что $\mathcal{B}$ является булевой алгеброй, операции в которой определяются следующим образом: для всех $a, b \in \mathcal{B}$

$$a \wedge b \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{a, b\}, \quad a \vee b \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{a, b\}, \quad \neg a \stackrel{\text{def}}{=} a \to 0.$$

Теорема 9. *Для*

- *каждого L-полного множества x, и*
- *каждой пары формул A, B*

имеет место равенство

$$[\![A \to B]\!]_x = [\![A]\!]_x \to [\![B]\!]_x. \tag{79}$$

Доказательство. Для доказательства равенства (79) достаточно доказать неравенства

$$[\![A \to B]\!]_x \leqslant [\![A]\!]_x \to [\![B]\!]_x \tag{80}$$

и

$$[\![A]\!]_x \to [\![B]\!]_x \leqslant [\![A \to B]\!]_x \tag{81}$$

Докажем неравенство (80). Данное неравенство эквивалентно неравенству

$$\left\{ \begin{array}{l} [\![A \to B]\!]_x \\ [\![A]\!]_x \end{array} \right\} \leqslant [\![B]\!]_x \tag{82}$$

Неравенство (82) эквивалентно L-совместимости множества

$$x \cup \{\left\{ \begin{array}{l} [\![A \to B]\!]_x \\ [\![A]\!]_x \end{array} \right\} \to B\} \tag{83}$$

то есть утверждению о том, что для

- каждого подмножества (31) множества (83), и

- каждого $b \in \mathcal{B}$

из (32) следует (33).

Так как x по предположению L-совместимо, то для доказательства импликации

$$(32) \quad \Rightarrow \quad (33)$$

достаточно рассмотреть лишь тот случай, когда (31) имеет следующий вид:

- $a_1 \to A_1 \quad = \quad \left\{ \begin{array}{l} [\![A \to B]\!]_x \\ [\![A]\!]_x \end{array} \right\} \to B$
- для каждого $i = 2, \ldots, n$

$$a_i \to A_i \quad \in x \tag{84}$$

В этом случае (32) эквивалентно соотношению

$$B \to (\left\{ \begin{array}{c} A_2 \\ \ldots \\ A_n \end{array} \right\} \to b) \quad \in L \tag{85}$$

а (33) эквивалентно неравенству

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} [\![A \to B]\!]_x \\ [\![A]\!]_x \end{array} \right\} \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{array} \right\} \leqslant b \tag{86}$$

Поскольку формула

$$\left\{ \begin{array}{l} A \\ A \to B \end{array} \right\} \to B$$

является тавтологией, то

$$\left\{ \begin{array}{l} A \\ A \to B \end{array} \right\} \to B \quad \in L \tag{87}$$

Из (85) и (87) следует, что

$$\left\{\begin{array}{l} A \\ A \to B \end{array}\right\} \to (\left\{\begin{array}{l} A_2 \\ \ldots \\ A_n \end{array}\right\} \to b) \quad \in L \tag{88}$$

Соотношение (88) эквивалентно соотношению

$$\left\{\begin{array}{l} A \\ A \to B \\ A_2 \\ \ldots \\ A_n \end{array}\right\} \to b \quad \in L \tag{89}$$

Поскольку множество x по предположению является L-полным, то

$$[\![A]\!]_x \to A \quad \in x \tag{90}$$

и

$$[\![A \to B]\!]_x \to (A \to B) \quad \in x \tag{91}$$

Из (89), (90), (91), (84) и свойства L-совместимости множества x вытекает требуемое неравенство (86).

Теперь докажем неравенство (81). Данное неравенство эквивалентно L-совместимости множества

$$x \cup \{([\![A]\!]_x \to [\![B]\!]_x) \to (A \to B)\} \tag{92}$$

то есть утверждению о том, что для

- каждого подмножества (31) множества (92), и
- каждого $b \in \mathcal{B}$

из (32) следует (33).

Так как x по предположению L-совместимо, то для доказательства импликации

$$(32) \quad \Rightarrow \quad (33)$$

достаточно рассмотреть лишь тот случай, когда (31) имеет следующий вид:

- $a_1 \to A_1 \quad = \quad ([\![A]\!]_x \to [\![B]\!]_x) \to (A \to B)$
- для каждого $i = 2, \dots, n$

$$a_i \to A_i \quad \in x \tag{93}$$

В этом случае (32) эквивалентно соотношению

$$(A \to B) \to (\left\{ \begin{array}{c} A_2 \\ \dots \\ A_n \end{array} \right\} \to b) \quad \in L \tag{94}$$

а (33) эквивалентно неравенству

$$\left\{ \begin{array}{l} [\![A]\!]_x \to [\![B]\!]_x \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{array} \right\} \leqslant b \tag{95}$$

Для доказательства неравенства (95) достаточно доказать эквивалентное ему неравенство

$$\left\{ \begin{array}{l} b \to 0 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{array} \right\} \leqslant \left\{ \begin{array}{l} [\![A]\!]_x \\ [\![B]\!]_x \to 0 \end{array} \right\} \tag{96}$$

Для того, чтобы доказать неравенство (96), достаточно доказать пару неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} b \to 0 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{array} \right\} \leqslant [\![A]\!]_x \tag{97}$$

и

$$\left\{ \begin{array}{l} b \to 0 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{array} \right\} \leqslant [\![B]\!]_x \to 0 \tag{98}$$

Докажем неравенство (97). Данное неравенство эквивалентно L-совместимости множества

$$x \cup \{\left\{\begin{array}{l} b\to 0\\ a_2\\ \dots\\ a_n\end{array}\right\} \to A\} \tag{99}$$

то есть утверждению о том, что для

- каждого конечного подмножества множества (99) вида

$$\{c_1 \to C_1, \dots, c_m \to C_m\}$$

такого, что

$$\begin{array}{rcl} c_1 \to C_1 & = & \left\{\begin{array}{l} b\to 0\\ a_2\\ \dots\\ a_n\end{array}\right\} \to A\\ \forall i=2,\dots,m \qquad c_i \to C_i & \in & x \end{array} \tag{100}$$

и

- каждого $d \in \mathcal{B}$

из соотношения

$$\left\{\begin{array}{l} A\\ C_2\\ \dots\\ C_m\end{array}\right\} \to d \quad \in L \tag{101}$$

следует неравенство

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} b\to 0\\ a_2\\ \dots\\ a_n\end{array}\right\}\\ c_2\\ \dots\\ c_m\end{array}\right\} \leqslant d \tag{102}$$

Для доказательства неравенства (102) достаточно доказать эквивалентное ему неравенство

$$\left\{\begin{array}{l} a_2 \wedge \ldots \wedge a_n \\ c_2 \wedge \ldots \wedge c_m \end{array}\right\} \leqslant (b \to 0) \to d \tag{103}$$

Из соотношения (101) вытекает соотношение

$$A \to (\left\{\begin{array}{c} C_2 \\ \ldots \\ C_m \end{array}\right\} \to d) \quad \in L,$$

из которого следует соотношению

$$((\left\{\begin{array}{c} C_2 \\ \ldots \\ C_m \end{array}\right\} \to d) \to B) \to (A \to B) \quad \in L \tag{104}$$

Из (104) и (94) следует соотношение

$$((\left\{\begin{array}{c} C_2 \\ \ldots \\ C_m \end{array}\right\} \to d) \to B) \to (\left\{\begin{array}{c} A_2 \\ \ldots \\ A_n \end{array}\right\} \to b) \quad \in L \tag{105}$$

Поскольку формула

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{c} C_2 \\ \ldots \\ C_m \end{array}\right\} \\ d \to B \end{array}\right\} \to ((\left\{\begin{array}{c} C_2 \\ \ldots \\ C_m \end{array}\right\} \to d) \to B)$$

является тавтологией, то она принадлежит L. Отсюда и из (105) следует соотношение

$$\left\{\begin{array}{l} d \to B \\ A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \\ C_2 \wedge \ldots \wedge C_m \end{array}\right\} \to b \quad \in L \tag{106}$$

Из (106), (93), (100) и из L-совместимости множества x вытекает неравенство

$$\left\{\begin{array}{l} [\![d \to B]\!]_x \\ a_2 \wedge \ldots \wedge a_n \\ c_2 \wedge \ldots \wedge c_m \end{array}\right\} \leqslant b$$

которое эквивалентно неравенству

$$\left\{\begin{array}{l} a_2 \wedge \ldots \wedge a_n \\ c_2 \wedge \ldots \wedge c_m \end{array}\right\} \leqslant [\![d \to B]\!]_x \to b \tag{107}$$

Докажем, что имеет место неравенство

$$[\![d \to B]\!]_x \to b \leqslant (b \to 0) \to d \tag{108}$$

(108) эквивалентно неравенству

$$\left\{\begin{array}{l} [\![d \to B]\!]_x \to b \\ b \to 0 \end{array}\right\} \leqslant d \tag{109}$$

Так как имеет место неравенство

$$\left\{\begin{array}{l} [\![d \to B]\!]_x \to b \\ b \to 0 \end{array}\right\} \leqslant [\![d \to B]\!]_x \to 0$$

то для доказательства (109) достаточно доказать неравенство

$$[\![d \to B]\!]_x \to 0 \leqslant d \tag{110}$$

(110) эквивалентно неравенству

$$d \to 0 \leqslant [\![d \to B]\!]_x \tag{111}$$

Докажем неравенство (111). Поскольку формула

$$(d \to 0) \to (d \to B)$$

является тавтологией, то, следовательно,

$$(d \to 0) \to (d \to B) \quad \in L \tag{112}$$

Из (112) и из теоремы 5 следует неравенство

$$[\![d \to 0]\!]_x \leqslant [\![d \to B]\!]_x \tag{113}$$

Из (113) и из теоремы 8 следует неравенство (111).

Из истинности неравенства (111) следует истинность неравенства (108), а из истинности неравенств (107) и (108) следует истинность неравенства (103).

Таким образом, L-совместимость множества (99) установлена, и, следовательно, неравенство (97) доказано.

Теперь докажем неравенство (98). Данное неравенство эквивалентно неравенству

$$\left\{\begin{array}{l} [\![B]\!]_x \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{array}\right\} \leqslant b \tag{114}$$

(114) имеет место потому, что

1) из (94) и из соотношения

$$B \to (A \to B) \quad \in L$$

следует соотношение

$$B \to (\left\{\begin{array}{c} A_2 \\ \dots \\ A_n \end{array}\right\} \to b) \quad \in L,$$

которое эквивалентно соотношению

$$\left\{\begin{array}{l} B \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{array}\right\} \to b \quad \in L,$$

2) $\{([\![B]\!]_x \to B), (a_2 \to A_2), \dots, (a_n \to A_n)\} \subseteq x$, и

3) x является L-совместимым.

Теорема доказана.

Теорема 10. *Пусть*

- x *— некоторое* L*-полное множество, и*
- A, B *— пара формул.*

Тогда имеет место равенство

$$[\![A \wedge B]\!]_x = [\![A]\!]_x \wedge [\![B]\!]_x \tag{115}$$

Доказательство. Для доказательства равенства (115) достаточно доказать неравенства

$$[\![A \wedge B]\!]_x \leqslant [\![A]\!]_x, \qquad [\![A \wedge B]\!]_x \leqslant [\![B]\!]_x, \tag{116}$$

и

$$[\![A]\!]_x \wedge [\![B]\!]_x \leqslant [\![A \wedge B]\!]_x \tag{117}$$

Неравенства (116) следуют из соотношений

$$\begin{array}{ll} (A \wedge B) \to A & \in L \\ (A \wedge B) \to B & \in L \end{array}$$

и из теоремы 5.

Неравенство (117) следует из L-совместимости множества

$$x \cup \{([\![A]\!]_x \wedge [\![B]\!]_x) \to (A \wedge B)\}.$$

Теорема доказана.

Теорема 11. *Пусть*

- x — *некоторое L-полное множество, и*
- A, B — *пара формул.*

Тогда имеет место равенство

$$[\![A \vee B]\!]_x = [\![A]\!]_x \vee [\![B]\!]_x. \tag{118}$$

Доказательство. Равенство (118) эквивалентно равенству

$$([\![A]\!]_x \vee [\![B]\!]_x) \to 0 = [\![A \vee B]\!]_x \to 0 \tag{119}$$

(119) вытекает из следующих соотношений:

$$([\![A]\!]_x \vee [\![B]\!]_x) \to 0 \;=\; \left\{ \begin{array}{c} [\![A]\!]_x \to 0 \\ [\![B]\!]_x \to 0 \end{array} \right\} \;=\; \left\{ \begin{array}{c} [\![A]\!]_x \to [\![0]\!]_x \\ [\![B]\!]_x \to [\![0]\!]_x \end{array} \right\} \;=$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} [\![A \to 0]\!]_x \\ [\![B \to 0]\!]_x \end{array} \right\} \quad = \; [\![\left\{ \begin{array}{c} A \to 0 \\ B \to 0 \end{array} \right\}]\!]_x \;=\; [\![(A \vee B) \to 0]\!]_x \quad =$$

$$= \; [\![A \vee B]\!]_x \to [\![0]\!]_x \quad = \; [\![A \vee B]\!]_x \to 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 12. *Пусть x — некоторое L-полное множество.*

Для каждой формулы $A \in Fm$ и каждого элемента $a \in \mathcal{B}$ имеет место неравенство

$$[\![\Box_a A]\!]_x \leqslant a. \tag{120}$$

Доказательство. Из (6) следует соотношение

$$(a \to 0) \to (\Box_a A \to 0) \quad \in L \tag{121}$$

из которого, согласно теоремам 5 и 8, следует неравенство

$$a \to 0 \ \leqslant \ [\![\Box_a A \to 0]\!]_x \tag{122}$$

Поскольку, согласно теоремам 9 и 8,

$$[\![\Box_a A \to 0]\!]_x = [\![\Box_a A]\!]_x \to [\![0]\!]_x = [\![\Box_a A]\!]_x \to 0 \tag{123}$$

то из (122) и (123) следует неравенство

$$a \to 0 \ \leqslant \ [\![\Box_a A]\!]_x \to 0, \tag{124}$$

которое эквивалентно (120). Теорема доказана.

7. Канонические модели

7.1. Определение канонической модели

Канонической моделью логики L называется модель

$$M_L \stackrel{\text{def}}{=} (W_L, \{(R_L)_a \mid a \in \mathcal{B}\}, \xi_L)$$

компоненты которой определяются следующим образом:

- W_L состоит из всех L-полных множеств.
  Для каждой пары $x, y \in W_L$

  $$W_L(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{A \in Fm}([\![A]\!]_x \leftrightarrow [\![A]\!]_y) \tag{125}$$

  Заметим, что из данного определения вытекает соотношение

  $$\forall x \in W_L \qquad W_L(x) = 1. \tag{126}$$

  Нетрудно доказать, что определение W_L удовлетворяет условиям (14) и (15).

- Для каждого $a \in \mathcal{B}$ символ $(R_L)_a$ обозначает нечёткое бинарное отношение на W_L

$$(R_L)_a : W_L \times W_L \to \mathcal{B}$$

определяемое следующим образом:

$$\begin{gathered} \forall x, y \in W_L \\ (R_L)_a(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{A \in Fm} ([\![\Box_a A]\!]_x \to [\![A]\!]_y) \end{gathered} \tag{127}$$

Нетрудно доказать, что определение $(R_L)_a$ удовлетворяет условиям (16) и (17).

- ξ_L — это отображение вида

$$\xi_L : PV \to Sub(W_L)$$

где для каждого $p \in PV$ нечёткое подмножество

$$\xi_L(p) : W_L \to \mathcal{B}$$

определяется следующим образом:

$$\forall x \in W_L \qquad \xi_L(p)(x) \stackrel{\text{def}}{=} [\![p]\!]_x. \tag{128}$$

Нетрудно доказать, что для каждого $p \in PV$ отображение $\xi_L(p)$ удовлетворяет условиям (18) и (19).

7.2. Основное свойство канонических моделей

Теорема 13. *Для каждой формулы $A \in Fm$ и каждого $x \in W_L$*

$$[\![A]\!](x) = [\![A]\!]_x \tag{129}$$

Доказательство. Докажем данную теорему индукцией по структуре формулы A.

$A = p \in PV$

В этом случае равенство (129) следует из (128).

$A = a \in \mathcal{B}$

Из (23), (126) и (68) следуют соотношения

$$[\![a]\!](x) = \left\{ \begin{array}{l} a \\ W_L(x) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} a \\ 1 \end{array} \right\} = a = [\![a]\!]_x$$

$A = B \wedge C,\ A = B \vee C,\ A = B \to C$

По индуктивному предположению,

$$\forall x \in W_L \qquad [\![B]\!](x) = [\![B]\!]_x, \quad [\![C]\!](x) = [\![C]\!]_x.$$

Согласно теореме 10, из L-полноты множества x следует соотношение

$$[\![B]\!]_x \wedge [\![C]\!]_x = [\![B \wedge C]\!]_x.$$

Следовательно,

$$[\![A]\!](x) = [\![B \wedge C]\!](x) \stackrel{\text{def}}{=} [\![B]\!](x) \wedge [\![C]\!](x) = \\ = [\![B]\!]_x \wedge [\![C]\!]_x = [\![B \wedge C]\!]_x = [\![A]\!]_x.$$

Случаи $A = B \vee C$ и $A = B \to C$ разбираются аналогично.

$A = \Box_a B$

По индуктивному предположению,

$$\forall y \in W_L \qquad [\![B]\!](y) = [\![B]\!]_y. \tag{130}$$

Докажем, что элемент

$$[\![\Box_a B]\!](x) \tag{131}$$

совпадает с элементом

$$[\![\Box_a B]\!]_x. \tag{132}$$

Из (130), (126), и (27) следует, что элемент (131) совпадает с элементом

$$\left\{ \begin{array}{l} a \\ \inf\limits_{y \in W_L} ((R_L)_a(x,y) \to [\![B]\!]_y) \end{array} \right\}. \tag{133}$$

Для доказательства равенства (132) = (133) мы докажем, что

- (132) $\leqslant$ (133), и
- (132) $\geqslant$ (133).

Неравенство (132) $\leqslant$ (133) следует из (120) и из неравенства

$$[\![\Box_a B]\!]_x \leqslant \inf_{y \in W_L} ((R_L)_a(x,y) \to [\![B]\!]_y) \tag{134}$$

Для доказательства неравенства (134) достаточно доказать, что для каждого $y \in W_L$

$$\left\{ \begin{array}{l} (R_L)_a(x,y) \\ [\![\Box_a B]\!]_x \end{array} \right\} \leqslant [\![B]\!]_y \tag{135}$$

Неравенство (135) следует из соотношения (127).
Теперь докажем неравенство (132) $\geqslant$ (133). Для доказательства данного неравенства будет достаточно построить элемент $y \in W_L$, такой, что

$$\left\{ \begin{array}{l} a \\ (R_L)_a(x,y) \to [\![B]\!]_y \end{array} \right\} \leqslant [\![\Box_a B]\!]_x \tag{136}$$

Обозначим символом u множество, состоящее из всех формул вида

$$\left\{ \begin{array}{l} [\![\Box_a A]\!]_x \\ [\![\Box_a B]\!]_x \to 0 \end{array} \right\} \to A \tag{137}$$

а также из формулы

$$([\![\Box_a B]\!]_x \to 0) \to (B \to 0) \tag{138}$$

Лемма 1. *Множество u является L-совместимым.*

Доказательство. Докажем, что для

- каждого конечного подмножества (31) множества u, и
- каждого $b \in \mathcal{B}$

из (32) следует (33).
Сначала рассмотрим случай, когда

$$(138) \in (31).$$

Пусть (31) имеет следующий вид:

- $a_1 \to A_1 \ = \ (138)$

- для каждого $i = 2, \ldots, n$

$$a_i = \left\{ \begin{array}{l} [\![\Box_a A_i]\!]_x \\ [\![\Box_a B]\!]_x \to 0 \end{array} \right\} \tag{139}$$

В этом случае (32) имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} B \to 0 \\ A_2 \\ \ldots \\ A_n \end{array} \right\} \to b \quad \in L \tag{140}$$

Из (140) вытекают соотношения

$$(b \to 0) \to (\left\{ \begin{array}{l} B \to 0 \\ A_2 \\ \ldots \\ A_n \end{array} \right\} \to 0) \quad \in L \qquad \Rightarrow$$

$$(b \to 0) \to (\left\{ \begin{array}{l} A_2 \\ \ldots \\ A_n \end{array} \right\} \to B) \quad \in L \qquad \Rightarrow$$

$$(b \to 0) \to (\left\{ \begin{array}{l} \Box_a A_2 \\ \ldots \\ \Box_a A_n \end{array} \right\} \to \Box_a B) \quad \in L \qquad \Rightarrow$$

$$b \to 0 \leqslant \left\{ \begin{array}{l} [\![\Box_a A_2]\!]_x \\ \ldots \\ [\![\Box_a A_n]\!]_x \end{array} \right\} \to [\![\Box_a B]\!]_x$$

Последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$\left\{ \begin{array}{l} b \to 0 \\ [\![\Box_a A_2]\!]_x \\ \ldots \\ [\![\Box_a A_n]\!]_x \end{array} \right\} \leqslant [\![\Box_a B]\!]_x. \tag{141}$$

Из (141) следует неравенство

$$\left\{\begin{array}{l} [\![\Box_a B]\!]_x \to 0 \\ [\![\Box_a A_2]\!]_x \\ \dots \\ [\![\Box_a A_n]\!]_x \end{array}\right\} \leqslant b. \tag{142}$$

Неравенство (142) эквивалентно искомому неравенству (33) для данного случая.

Теперь рассмотрим случай, когда (138) $\notin$ (31).

Так как формула

$$\left\{\begin{array}{l} B \to 0 \\ A_1 \\ \dots \\ A_n \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} A_1 \\ \dots \\ A_n \end{array}\right\}$$

является тавтологией, то из (32) следует соотношение

$$\left\{\begin{array}{l} B \to 0 \\ A_1 \\ \dots \\ A_n \end{array}\right\} \to b \quad \in L \tag{143}$$

Как уже было показано выше в данном доказательстве, из последнего соотношения вытекает неравенство

$$\left\{\begin{array}{l} [\![\Box_a B]\!]_x \to 0 \\ [\![\Box_a A_1]\!]_x \\ \dots \\ [\![\Box_a A_n]\!]_x \end{array}\right\} \leqslant b. \tag{144}$$

Неравенство (144) эквивалентно искомому неравенству (33) для данного случая. Лемма доказана.

Пусть символ y обозначает L-пополнение множества u.

Из определения множеств u и y следует, что

$$[\![\Box_a B]\!]_x \to 0 \leqslant [\![B \to 0]\!]_y = [\![B]\!]_y \to 0 \tag{145}$$

и для каждой формулы $A \in Fm$

$$\left\{ \begin{array}{l} [\![\Box_a A]\!]_x \\ [\![\Box_a B]\!]_x \to 0 \end{array} \right\} \leqslant [\![A]\!]_y. \tag{146}$$

Из (145) следует неравенство

$$[\![B]\!]_y \leqslant [\![\Box_a B]\!]_x. \tag{147}$$

Из (146) следует, что $\forall A \in Fm$

$$[\![\Box_a B]\!]_x \to 0 \ \leqslant \ [\![\Box_a A]\!]_x \to [\![A]\!]_y \tag{148}$$

Из (148) и (127) следует неравенство

$$\left\{ \begin{array}{l} a \\ [\![\Box_a B]\!]_x \to 0 \end{array} \right\} \leqslant (R_L)_a(x,y). \tag{149}$$

Искомое неравенство (136) следует из (147), (149), и из неравенства

$$\left\{ \begin{array}{l} a \\ \left\{ \begin{array}{l} a \\ c \to 0 \end{array} \right\} \to c \end{array} \right\} \leqslant c \tag{150}$$

где $c \overset{\text{def}}{=} [\![\Box_a B]\!]_x$.
Докажем неравенство (150). Данное неравенство эквивалентно неравенству

$$c \to 0 \ \leqslant \ \left\{ \begin{array}{l} a \\ \left\{ \begin{array}{l} a \\ c \to 0 \end{array} \right\} \to c \end{array} \right\} \to 0, \tag{151}$$

то есть

$$\left\{ \begin{array}{l} c \to 0 \\ a \\ \left\{ \begin{array}{l} a \\ c \to 0 \end{array} \right\} \to c \end{array} \right\} \leqslant 0, \tag{152}$$

которое, очевидно, истинно. Теорема доказана.

8. Полнота логики FK

Теорема 14. *Для каждой формулы $A \in Fm$ следующие условия эквивалентны:*

$$A \in FK \tag{153}$$

$$A \text{ истинна в каждой модели.} \tag{154}$$

Доказательство. Импликация

$$(153) \quad \Rightarrow \quad (154)$$

была обоснована в параграфе 3.4.

Докажем, что если $A \notin FK$, то A не является истинной в некоторой точке канонической модели логики FK.

Лемма 2. *Множество*

$$\{(\llbracket A \rrbracket_{FK} \to 0) \to (A \to 0)\} \tag{155}$$

является FK-совместимым.

Доказательство. Докажем, что для каждого $b \in \mathcal{B}$ из соотношения

$$(A \to 0) \to b \quad \in FK \tag{156}$$

следует неравенство

$$\llbracket A \rrbracket_{FK} \to 0 \leqslant b \tag{157}$$

Из (156) следуют соотношения

$$\begin{array}{ll} (b \to 0) \to A \quad \in FK & \Rightarrow \\ b \to 0 \ \leqslant \ \llbracket A \rrbracket_{FK} & \Rightarrow \\ \llbracket A \rrbracket_{FK} \to 0 \ \leqslant \ b. & \end{array}$$

Таким образом, множество (155) FK-совместимо. Лемма доказана.

Согласно теореме 7, из FK-совместимости множества (155) следует, что

$$\exists x \in W_{FK}: \quad \llbracket A \rrbracket_{FK} \to 0 \ \leqslant \ \llbracket A \to 0 \rrbracket_x \tag{158}$$

Так как множество x является FK-полным, то согласно теореме 9 из (158) следует, что

$$[\![A \to 0]\!]_x = [\![A]\!]_x \to [\![0]\!]_x = [\![A]\!]_x \to 0 \tag{159}$$

Из (129), (158) и (159) вытекает соотношение

$$[\![A]\!]_{FK} \to 0 \ \leqslant\ [\![A]\!](x) \to 0 \tag{160}$$

которое эквивалентно соотношению

$$[\![A]\!](x) \ \leqslant\ [\![A]\!]_{FK} \tag{161}$$

Докажем, что формула A не является истинной в точке x.

Если A истинна в x, то из (28) и (126) следует что

$$[\![A]\!](x) = 1 \tag{162}$$

Из (161) и (162) следует равенство $[\![A]\!]_{FK} = 1$, из которого вытекает соотношение $A \in FK$, которое противоречит предположению о том, что $A \notin FK$. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Goldblatt R. Topoi. The categorial analysis of logic // Studies in Logic and the Foundation of Mathematics. Vol. 98. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publishing Company, 1979.

[2] Clarke E. M., Grumberg O., Peled D. Model Checking. MIT Press, 1999.

[3] Bendová K., Hájek P. Possibilistic logic as a tense logic // Proceedings of QUARDET'93. Barcelona, 1993.

[4] Boutilier C. Modal logics for qualitative possibility and beliefs // Uncertainty in Artificial Intelligence VIII / D. Dubois et al., eds. Morgan Kaufmann, 1992. 17–24.

[5] Dubois D., Lang J., Prade H. Possibilistic logic // Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming. Vol. 3: Nonmonotonic Reasoning and Uncertain Reasoning / D. M. Gabbay, C. J. Hogger, J. A. Robinson, eds. Oxford U. P., 1994. 439–513.

[6] Farinas del Cerro L., Herzig A. A modal analysis of possibility theory // Symbolic and Qualitative Approaches to Uncertainty. Lecture Notes in Comput. Sci. 548 / R. Kruse, P. Siegel, eds. Springer–Verlag, 1991. 58–62.

[7] Fitting M. Many-valued modal logics // Fund. Inform. 15. 1992. 235–254.

[8] Fitting M. Many-valued modal logics II // Fund. Inform. 17. 1992. 55–73.

[9] Godo L., Lopez de Mantaras R. Fuzzy logic // Encyclopaedia of Computer Science. 1993.

[10] Hájek P. On logics of approximate reasoning // Neural Network Word. 6. 1993. 733–744.

[11] Hájek P., Harmancová D. A comparative fuzzy modal logic // Fuzzy Logic in Artificial Intelligence / E. P. Klement, W. Slany, eds. Springer-Verlag, 1993. 27–34.

[12] Hájek P., Harmancová D., Esteva F., Garcia P., Godo L. On modal logics for qualitative possibility in a fuzzy setting // Uncertainty in Artificial Intelligence: Proceedings of the Tenth Conference / R. Lopez de Mantaras, D. Poole, eds. Seattle, WA, 1994.

[13] Hájek P., Harmancová D., Verbrugge R. A qualitative fuzzy possibilistic logic // International Journal of Approximate Reasoning. 12. North–Holland, 1995. 1–19.

[14] Ostermann P. Many-valued modal propositional calculi // Z. Math. Logik Grundlag. Math. 34. 1988. 343–354.