О динамике форм в симметрических однородных структурах

А. Г. Данилов

Введение

Однородная структура представляет собой сеть одинаковых автоматов, каждый из которых функционирует в дискретном времени с учетом своего состояния и состояния соседних автоматов. Рассматриваются симметрические пороговые двумерные однородные структуры, имеющие два состояния ячейки 0 и 1. Для конфигураций в этих однородных структурах вводится понятие бесконечного роста и решается задача нахождения асимптотических очертаний бесконечно растущих конфигураций. Утверждается, что в результате получается выпуклое множество, граница которого составлена из частей гиперболы.

1. Основные понятия и результаты

Однородной структурой (сокращенно ОС) σ называется набор

$$(\mathbb{Z}^k, E_n, V, \varphi).$$

Здесь $\mathbb{Z}^k$ — множество k-мерных векторов с целыми координатами. Элементы множества $\mathbb{Z}^k$ называют *ячейками* однородной структуры σ. Элементы множества $E_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ называются *состояниями ячейки* ОС σ. $V = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1})$ — упорядоченный набор попарно различных ненулевых элементов из $\mathbb{Z}^k$ называется *шаблоном соседства* ОС σ. Набор V определяет для каждой ячейки α ОС

σ набор $\vec{V}(\alpha) = (\alpha, \alpha + \alpha_1, \ldots, \alpha + \alpha_{h-1})$, называемый *упорядоченной окрестностью* ячейки α. Множество $\{\alpha, \alpha + \alpha_1, \ldots, \alpha + \alpha_{h-1}\}$ называется *окрестностью ячейки* α и обозначается $V(\alpha)$. Функция $\varphi : (E_n)^h \to E_n$, $\varphi(0, \ldots, 0) = 0$ называется *локальной функцией переходов* ОС σ.

Состоянием однородной структуры σ называется произвольная функция f, определенная на множестве $\mathbb{Z}^k$ и принимающая значения из E_n. Если $\alpha \in \mathbb{Z}^k$ и f состояние ОС σ, то значение $f(\alpha)$ называется *значением ячейки* α, определяемым состоянием f ОС σ. На множестве Σ всех состояний ОС σ определена *глобальная функция переходов* Φ однородной структуры σ, полагая $\Phi(f) = g$, если $f, g \in \Sigma$ и выполняется тождество

$$g(\alpha) = \varphi(f(\alpha), f(\alpha + \alpha_1), \ldots, f(\alpha + \alpha_{h-1})).$$

Выделим подкласс Σ' класса Σ всех состояний ОС σ, полагая $f \in \Sigma'$ тогда и только тогда, когда равенство $f(\alpha) = 0$ выполняется для всех ячеек α, кроме, быть может, конечного их числа. Состояния ОС σ, принадлежащие Σ', называются *конфигурациями* этой ОС. Легко видеть, что если $f \in \Sigma'$, то $\Phi(f) \in \Sigma'$

Конфигурацию f однородной структуры σ, назовем *бесконечно растущей*, если с течением времени число ненулевых ячеек конфигурации бесконечно увеличивается.

Далее в работе рассматриваются только однородные структуры размерности $k = 2$.

Расстоянием $\rho(A, B)$ между двумя замкнутыми множествами A и B точек плоскости называем величину:

$$\max\left(\max_{x\in A}\min_{y\in B}\rho(x,y),\ \max_{y\in B}\min_{x\in A}\rho(x,y)\right).$$

Далее каждой ячейке сопоставим на плоскости единичный квадрат с центром в ней самой и сторонами параллельными главным осям. Для произвольной заданной конфигурации f рассмотрим объединение всех точек плоскости, содержащихся в квадратах ненулевых ячеек конфигурации. Данное множество точек плоскости будем называть *покрытием конфигурации* f и обозначать через $U(f)$.

Рассмотрим два односвязных замкнутых множества G_1 и G_2 точек плоскости, причем $G_1 \subset G_2$. Если для данной бесконечно растущей конфигурации f в ОС σ и некоторых положительных вещественных чисел α, β, υ выполнено:

$$(\alpha + \upsilon t) \cdot G_1 \subset U(\Phi^t(f)) \subset (\beta + \upsilon t) \cdot G_2.$$

при всех t, начиная с некоторого, то говорим, что конфигурация f является (G_1, G_2)-растущей со скоростью υ.

Если теперь в ОС σ каждая бесконечно растущая конфигурация является (G_1, G_2)-растущей со скоростью υ, для некоторых υ, G_1 и G_2, то такую однородную структуру называем *правильной* для данного типа роста конфигураций.

Рассмотрим далее некоторую бесконечную последовательность

$$\{\sigma_m, G'_m, G''_m, \upsilon_m\}_{m=1}^{\infty},$$

где σ_m — однородная структура, υ_m — положительное вещественное число и G'_m, G''_m — односвязные замкнутые множества. Причем, для каждого m и некоторого односвязного замкнутого множества G выполнено:

$$G'_m \subset G \subset G''_m,\ G'_m \subset G'_{m+1},\ G''_{m+1} \subset G''_m,$$
$$\lim_{m\to\infty} \rho(G, G'_m) = 0,\ \lim_{m\to\infty} \rho(G, G''_m) = 0.$$

Пусть также каждая ОС σ_m является правильной для (G'_m, G''_m)-роста конфигураций со скоростью υ_m для всех m, начиная с некоторого m_0. В таком случае называем последовательность ОС $\{\sigma_m\}_{m=1}^{\infty}$ *аппроксимирующей* G-рост.

Далее через $\sigma(2m+1, H)$, $H \in \mathbb{N}$ и $H \leqslant (2m+1)^2$ будем обозначать двумерную однородную структуру, имеющую два состояния ячейки 0 и 1, окрестность ячейки $\alpha = (x_0, y_0)$ в виде квадрата

$$V_m(\alpha) = \big\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 |\, |x - x_0| \leqslant m, |y - y_0| \leqslant m\big\}$$

и симметрическую пороговую локальную функцию перехода. Причем локальная функция перехода принимает значение 1, если число активных ячеек в локальной окрестности больше или равно величины H, и 0 в остальных случаях.

Рассмотрим замкнутое множество на плоскости, которое симметрично относительно горизонтали, вертикали и диагоналей, и в первом октанте его граница задается уравнением:

$$y = \frac{D}{2} + \frac{S}{2x - D},$$

где $D > 0$, $S \in (0, D^2/2)$ и $x \in \left[\frac{D}{2} - \sqrt{\frac{S}{2}}, \frac{D}{2} - \frac{S}{D}\right]$.

Обозначим это множество через $M(D, S)$ (см. рис. 1).

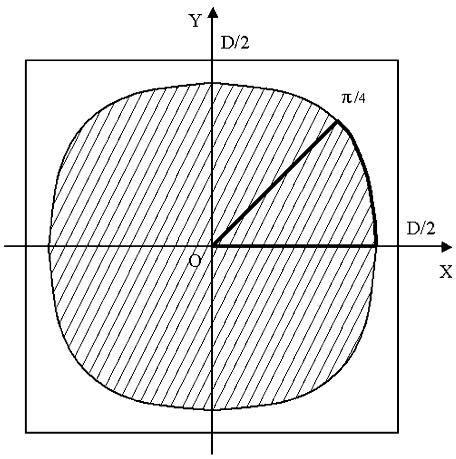

Рис. 1. Множество $M(D, S)$.

Теорема 1. *Последовательность ОС* $\left\{\sigma(2m+1, km^2)\right\}_{m=1}^{\infty}$, $0<k<2$ *является аппроксимирующей* $M(2, k)$*-рост.*

2. Вспомогательные утверждения

Обозначим через $Q(D)$, $D > 0$ квадрат со сторонами параллельными осям координат и равными по величине D. Под D-окрестностью точки A далее будем понимать квадрат $Q(D)$, помещенного своим центром в точку A.

Лемма 1. *Касательные прямые к множеству $M(D,S)$ отсекают от квадрата $Q(D)$ с центром в начале координат треугольники площади S.*

Доказательство. Из определения множества $M(D,S)$ следует, что граница всюду, кроме четырех точек на осях координат, задается гладкой кривой. Поэтому, для произвольной точки границы (x_0, y_0), $y_0 \neq 0$, лежащей в первом октанте, можем написать уравнение касательной:

$$y = \frac{D}{2} + \frac{S}{2x_0 - D} - \frac{2S(x - x_0)}{(2x_0 - D)^2}.$$

Легко проверить, что точки $\left(\frac{D}{2}, \frac{D}{2} - \frac{2S}{D - 2x_0}\right)$ и $\left(2x_0 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2}\right)$ лежат на касательной прямой и, в тоже время, лежат на правой и верхней стороне квадрата соответственно. Следовательно касательная отсекает от квадрата $Q(D)$ прямоугольный треугольник со сторонами $\frac{2S}{D-2x_0}$ и $D - 2x_0$. Видно, что его площадь будет равна S. То же самое получаем и для касательных других октантов, исходя из условий симметрии множества $M(D,S)$. Лемма доказана.

Зафиксируем произвольную достаточно малую величину $\varepsilon \in \left(0, \sqrt{\frac{S}{2}} - \frac{S}{D}\right)$. Введем обозначение:

$$f(x) = \frac{D}{2} + \frac{S}{2x - D},\ x_\varepsilon = \frac{D}{2} - \frac{S}{D} - \varepsilon,\ y_\varepsilon = f(x_\varepsilon).$$

Ясно, что точка $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ лежит на границе множества $M(D,S)$ и находится в первом октанте. Аналогично множеству $M(D,S)$, в первом октанте зададим границу еще одного симметричного множества, которое обозначим через $M(D,S,\varepsilon)$. Пусть его граница на отрезке $x \in \left[\frac{D}{2} - \sqrt{\frac{S}{2}}, x_\varepsilon\right]$ задается уравненем $y = f(x)$, на отрезке $x \in \left[x_\varepsilon, x_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}\right]$ — уравнением:

$$y = \frac{f(2(x - x_\varepsilon) + x_\varepsilon)}{2} + \frac{y_\varepsilon}{2},$$

а при $x \geqslant x_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}$ граница определяется дугой окружности с центром в точке $\left(x_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{D^2}{4S} y_\varepsilon, 0\right)$ и радиусом $R = y_\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{D^4}{16S^2}}$ (см. рис. 2).

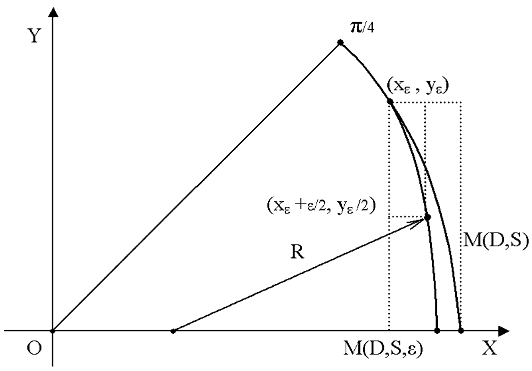

Рис. 2. Граница множества $M(D, S, \varepsilon)$.

Легко проверить, что данные кривые гладко склеиваются в точках $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ и $(x_\varepsilon + \varepsilon/2, y_\varepsilon/2)$, а именно:

$$f(x_\varepsilon) = y_\varepsilon = f(x_\varepsilon)/2 + y_\varepsilon/2,$$

$$\frac{f(\varepsilon + x_\varepsilon)}{2} + \frac{y_\varepsilon}{2} = \frac{y_\varepsilon}{2} = \sqrt{R^2 - \left((x_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}) - (x_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{D^2}{4S} y_\varepsilon)\right)^2},$$

$$f'(x_\varepsilon) = \frac{-2S}{(2x_\varepsilon - D)^2} = \frac{2f'(x_\varepsilon)}{2},$$

$$\frac{2f'(\varepsilon + x_\varepsilon)}{2} = \frac{-D^2}{2S} = -\frac{(x_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}) - (x_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{D^2}{4S} y_\varepsilon)}{\sqrt{R^2 - \left((x_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}) - (x_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{D^2}{4S} y_\varepsilon)\right)^2}}$$

Обозначим через $\alpha(x)$ и $\alpha_\varepsilon(x)$ соответственно величины наклона касательной к границе множеств $M(D, S)$ и $M(D, S, \varepsilon)$ в точке с абсциссой x.

Далее, так как на отрезке $[x_\varepsilon, x_\varepsilon + \varepsilon/2]$ величина $\alpha_\varepsilon(x)$ пробегает те же значения, что и величина $\alpha(x)$ на отрезке $[x_\varepsilon, x_\varepsilon + \varepsilon]$, но в два раза быстрее, а при $x \geqslant x_\varepsilon + \varepsilon/2$, исходя из построения, выполнено $\alpha(x) < \alpha_\varepsilon(x)$, заключаем, что множество $M(D, S, \varepsilon)$ содержится внутри множества $M(D, S)$.

Опираясь на новое определение, выпишем ряд очевидных следствий из леммы 1.

Следствие 1. *Для любых малых величин* $\delta \in (0, S)$, $\varepsilon \in \left(0, \sqrt{\frac{S}{2}} - \frac{S}{D}\right)$ *найдется число* $\alpha_0 > 0$, *что для всех* $\alpha > \alpha_0$, *площадь пересечения множества* $\alpha \cdot M(D, S, \varepsilon)$ *с* D*-окрестностью точки на границе множества* $(\alpha + 1) \cdot M(D, S, \varepsilon)$, *будет больше* $S - \delta$.

Действительно, рассмотрим произвольную точку A из границы множества $(\alpha + 1) \cdot M(D, S, \varepsilon)$. Поместим своим центром симметрии в эту точку множество $M(D, S, \varepsilon)$ и квадрат $Q(D)$. В силу центральной симметрии множества $M(D, S, \varepsilon)$, данное множество будет иметь общую касательную l с множеством $\alpha \cdot M(D, S, \varepsilon)$ (см. рис. 3). Так как $M(D, S, \varepsilon) \subset M(D, S)$, то касательная l будет отсекать от квадрата $Q(D)$ фигуры площади большей или равной S. Далее очевидно, что по мере увеличения параметра α, площадь фигуры, отсекаемой границей множества $\alpha \cdot M(D, S, \varepsilon)$ от квадрата $Q(D)$ будет приближаться по величине к площади фигуры, отсекаемой касательной прямой. Поэтому, начиная с некоторого параметра α_0 утверждение будет выполнено.

Следствие 2. *для любой точки* (x_0, y_0), $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$ *из границы множества* $M(D, S)$ *и всех чисел* $\alpha > 0$, *касательная прямая к множеству* $\alpha \cdot M(D, S)$ *в точке* $(\alpha x_0, \alpha y_0)$ *отсекает от* D*-окрестности точки* $((\alpha + 1) \cdot x_0, (\alpha + 1) \cdot y_0)$, *лежащей на границе множества* $(\alpha + 1) \cdot M(D, S)$, *треугольник площади* S.

В самом деле, поместим множество $M(D, S)$ своим центром симметрии в точку $((\alpha + 1) \cdot x_0, (\alpha + 1) \cdot y_0)$. Ясно, что данное множество будет иметь общую касательную с множеством $\alpha \cdot M(D, S)$ в точке $(\alpha x_0, \alpha y_0)$. По доказанной лемме, данная касательная отсекает от квадрата $Q(D)$ треугольник площади S.

Рассмотрим произвольное множество $M(D, S, \varepsilon)$ и некоторое достаточно большое число $\alpha > 0$. Пусть точка A это произвольная точка на границе множества $(\alpha + 1) \cdot M(D, S, \varepsilon)$. Рассмотрим касательные к множеству $\alpha \cdot M(D, S, \varepsilon)$ в точках пересечения границы данного множества с границей D-окрестности точки A. Далее, пробегая точкой A вдоль всей границы множества $(\alpha + 1) \cdot M(D, S, \varepsilon)$, можем найти минимальное значение угла, под которым пересекаются данные касатель-

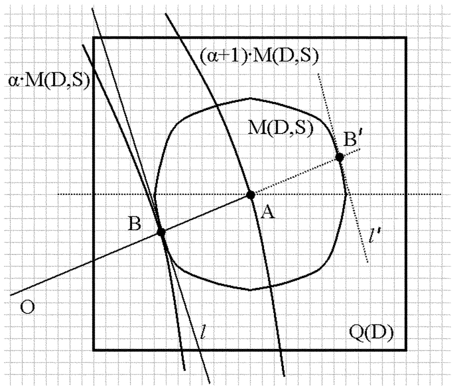

Рис. 3. Общая касательная границ множеств $\alpha \cdot M(D,S)$ и $M(D,S)_A$.

ные. Данную величину назовем углом обзора множества $\alpha \cdot M(D,S,\varepsilon)$. Ясно, что она монотонно возрастает по мере увеличиния числа α.

Рассмотрим в однородной структуре $\sigma(2m+1,H)$ бесконечный рост некоторой конфигурации f. Обозначим ее покрытие через F, а покрытие конфигурации на следующем такте через $\tilde{F}$. Не ограничивая общности, можно считать, что множество F является односвязным. Это корректно, так как со временем любая бесконечно растущая конфигурация в данной ОС становится односвязной.

Лемма 2. *При всех* $\varepsilon \in \left(0, \sqrt{\frac{S}{2}} - \frac{S}{D}\right)$ *существует величина* $\alpha_0 > 0$, *что при всех* $\alpha > \alpha_0$, $D = 2m+1$ *и* $S = H+\sqrt{H}+2$ *из вложения множества* $\alpha \cdot M(D,S,\varepsilon)$ *в покрытие* F *следует вложение множества* $(\alpha+1) \cdot M(D,S,\varepsilon)$ *внутрь покрытия* $\tilde{F}$.

Доказательство. Обозначим множество $\alpha \cdot M(D,S,\varepsilon)$ через M, а множество $(\alpha+1) \cdot M(D,S,\varepsilon)$ через $\tilde{M}$. Угол обзора множества M обозначаим через β_0.

Зафиксируем произвольное положительное вещественное число $\delta < 1/8$. Далее в качестве параметра α_0 возьмем такое, чтобы для данной величины δ выполнялось следствие 1 леммы 1 и было верным неравенство:

$$\frac{(2m+2)(2m+1)}{4\,\mathrm{tg}(\beta_0/2)} < \delta.$$

Это возможно в силу монотонного возрастания величины $\beta_0 = \beta_0(\alpha)$ и $\mathrm{tg}(\beta_0)$ по мере увеличения параметра α.

Рассмотрим произвольную граничную точку A множества $\tilde{M}$, лежащую в первом октанте. Она содержится в некотром единичном квадрате P с центром на целочисленной решетке. Проверим, что квадрат P содержится в покрытии $\tilde{F}$. Оценим наименьшее число квадратов из покрытия F в D окрестности центра квадрата P.

Рассмотрим D-окрестность центра квадрата P. Граница множества M отсекает от нее слева некоторое множество N_P, площадь которого обозначим через S_P.

Далее, нам известно, что множество N_P содержится внутри покрытия F. Возьмем наименьшее множество G, образуемое квадратами из покрытия F, которое содержит в себе множество N_P. Обозначим число квадратов во множестве G через g. Рассмотрим множество L, образуемое квадратами из G, правее которых нет квадратов из G (см. рис. 4). Ясно, что данное множество можно представить в виде объединения прямоугольников, покрывающих попарно различные вертикальные прямые с целочисленной абсциссой, идущие подряд:

$$L = \bigcup_{i=1}^{k} L_i.$$

Обозначим их высоты через $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Через s_i будем обозначать площадь пересечения множеств L_i и N_P.

Ясно, что число квадратов из покрытия F в D окрестности центра квадрата P не менее величины g, и при этом, очевидно:

$$g > S_p + (a_1 + a_2 + \ldots + a_k) - \sum_{i=1}^{k} s_i.$$

Оценим снизу величину S_P и сверху сумму величин s_i по $i = \overline{1,k}$.

Обозначим через S_A площадь множества, которое отсекает множество M от D-окрестности точки A. По следствию 1 леммы 1 имеем оценку:

$$S_A \geqslant S - \delta.$$

Обозначим точки пересечения границы множества M с границей D-окрестности точки A через U и V, причем точка U лежит выше точки V. Обозначим расстояние от точки U до нижней стороны квадратной окрестности через l_U, и расстояние от точки V до левой стороны квадратной окрестности через l_V (см. рис. 5).

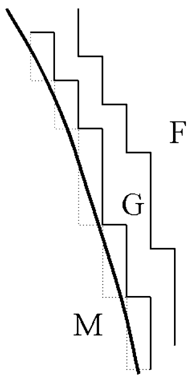

Рис. 4. Множество G.

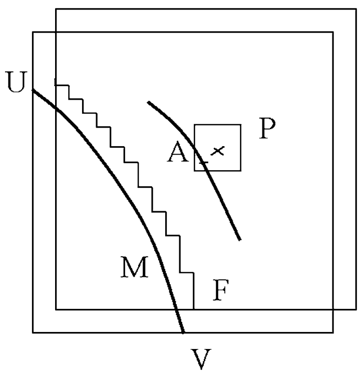

Рис. 5. Окрестность точки A.

Тогда верно неравенство:

$$S_P > S_A - (l_U + l_V)/2.$$

Далее, обозначим через Γ общую часть границы множеств N_P и M. Рассмотрим произвольный прямоугольник L_i. Через I и J обозначим точки пересечения линии Γ с левой и нижней стороной прямоугольника L_i. Проведем касательные к множеству M в точках I и J. Пусть они пересекаются в точке T. Обозначим нижний левый угол прямоугольника L_i через Q. Тогда площадь четырехугольника $ITJQ$ будет больше величины s_i.

Рассмотрим равнобедренный треугольник, в основании которого лежит сторона длины $\sqrt{1+a_i^2}$, а противолежащий угол равен β_0. Заметим, что среди всех треугольников с фиксированной длиной основания и фиксированной минимальной величиной противолежащего угла, высота и площадь равнобедренного треугольника будет наибольшей. Тогда сразу получаем оценку сверху для площади четырехугольника $ITJQ$:

$$S_{ITJQ} \leqslant a_i/2 + S_{ITJ} =$$
$$= a_i/2 + \rho(I,J)\cdot\rho(T,IJ)/2 \leqslant \frac{a_i}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+a_i^2}\cdot\sqrt{1+a_i^2}/(2\operatorname{tg}\frac{\beta_0}{2})$$

или

$$S_{ITJQ} \leqslant \frac{a_i}{2} + \frac{1}{4}(1+a_i^2)/\operatorname{tg}\frac{\beta_0}{2}.$$

Тогда имеем оценку сверху для суммы величин s_i:

$$\sum_{i=1}^{k} s_i < \frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{2} + \frac{k+a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2}{4\operatorname{tg}(\beta_0/2)}$$

или, ослабив неравенство:

$$\sum_{i=1}^{k} s_i < \frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{2} + \frac{k+(a_1+a_2+\ldots+a_k)^2}{4\operatorname{tg}(\beta_0/2)}.$$

Заметим, что сумма величин a_i должна быть меньше или равна величине $[l_U - \Delta_U + 1]$, где Δ_U разница высот точек P и A', и $\Delta_U < 1/2$. Поэтому следует оценка:

$$\sum_{i=1}^{k} s_i < \frac{[l_U-\Delta_U+1]}{2} + \frac{(2m+1)+(2m+1)^2}{4\operatorname{tg}(\beta_0/2)},$$

тогда выполнено:

$$g > S_p + (a_1+a_2+\ldots+a_k) - \sum_{i=1}^{k} s_i > S_p + [l_U-\Delta_U+1]/2 - \delta,$$

следовательно:

$$g > S_A - (l_U+l_V)/2 + [l_U-\Delta_U+1]/2 - \delta \geqslant S - 2\delta - (l_V+1)/2.$$

Окончательно получаем:

$$g > S - 2\delta - (\sqrt{2S}+1)/2$$

или, учитывая значение величины S:

$$g > H + \sqrt{H} + 2 - 2\delta - 1/2 - \left(\sqrt{2H + 2\sqrt{H} + 4}\right)/2,$$

$$g > H + \sqrt{H} + 1 - \left(\sqrt{2H + 2\sqrt{H}} + \sqrt{4}\right)/2,$$

$$g > H + \left(\sqrt{4H} - \sqrt{2H + 2\sqrt{H}}\right)/2 > H.$$

Следовательно, при данном значении величины S, квадрат P будет входить в покрытие $\tilde{F}$. В силу произвольного выбора точки A на границе множества $\tilde{M}$, получаем вложение $\tilde{M} \subset \tilde{F}$. Лемма доказана.

Лемма 3. *При всех* $\alpha > 0$, $D = 2m + 1$ *и* $S = H - \sqrt{2H}/2 - 1$, *из вложения покрытия* F *во множество* $\alpha \cdot M(D, S)$ *будет следовать вложение покрытия* $\tilde{F}$ *во множество* $(\alpha + 1) \cdot M(D, S)$

Доказательство. Обозначим множество $\alpha \cdot M(2m + 1, S)$ через M, а множество $(\alpha + 1) \cdot M(2m + 1, S)$ через $\tilde{M}$.

Рассмотрим произвольный квадрат P из покрытия $\tilde{F}$, центр которого лежит в первом октанте. В его локальной окрестности находится как минимум H квадратов из покрытия F. Мы хотим, чтобы все точки квадрата P входили во множество $\tilde{M}$. В силу выпуклости множества $\tilde{M}$, для выполнения данного условия достаточно, чтобы оно выполнялось для верхней правой точки квадрата P. Обозначим эту точку через B, а соответствующую ей точку из границы множества M по тому же направлению от начала координат обозначим через A. Так как ордината точки B отлична от 0, то ордината точки A также отлична от 0, и значит в ней можно провести касательную к множеству M. Обозначим касательную через k.

Рассмотрим D-окрестность точки B и обозначим через S_B площадь множества, отсекаемого касательной k слева от данной окрестности. Оценим эту величину снизу.

Рассмотрим D-окрестность центра квадрата P и обозначим через S_P площадь множества, отсекаемого касательной k слева от данной окрестности. Пусть точки U и V это точки пересечения прямой k с границей D-окрестности центра квадрата P. Причем считаем, что точка U лежит выше, чем точка V. Обозначим расстояние от точки

U до нижней стороны квадратной окрестности через l_U, и расстояние от точки V до левой стороны квадратной окрестности через l_V (см. рис. 6). Тогда верно неравенство:

$$S_P - (l_U + l_V)/2 < S_B.$$

Рассмотрим множество квадратов из покрытия F, правее которых нет других квадратов из данного покрытия и которые лежат в первом октанте. Данное множество можно представить в виде объединения прямоугольников, покрывающих попарно различные вертикальные прямые с целочисленной абсциссой, идущие подряд. Для каждого прямоугольника рассмотрим верхнюю правую угловую точку. Соединим соседние по высоте точки отрезком. Получим ломаную, которая ограничивает покрытие F в первом октанте (см. рис. 7).

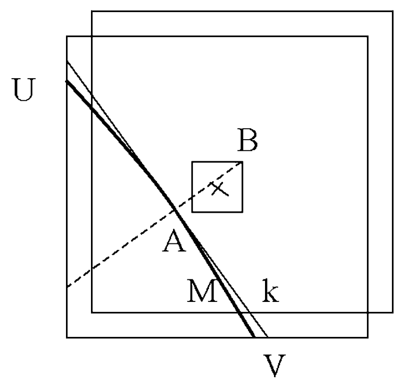

Рис. 6. Окрестность точки B.

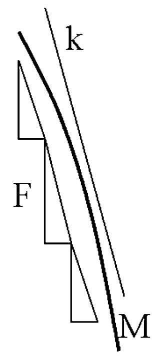

Рис. 7. Граница F.

Отсюда вытекает оценка снизу для величины S_P:

$$H + [l_U]/2 \leqslant S_P,$$

далее получаем

$$H + [l_U]/2 - (l_U + l_V)/2 < S_B,$$

или, ослабив его, получим

$$H - \sqrt{2S}/2 - 1 < S_B,$$

или, учитывая значение величины S:

$$H - \sqrt{2H - \sqrt{2H} - 2}/2 - 1 < S_B,$$

$$S = H - \sqrt{2H}/2 - 1 < H - \sqrt{2H - \sqrt{2H} - 2}/2 - 1 < S_B.$$

Следовательно, при данном значении величины S, точка B будет лежать внутри множества $\tilde{M}$. Значит, и произвольно выбранный квадрат P будет лежать в данном множестве. Поэтому вложение $\tilde{F} \subset \tilde{M}$ будет верным. Лемма доказана.

Лемма 4. *Для любой однородной структуры $\sigma(2m+1, H)$ с порогом $H \leqslant 2m^2 - m$ существует бесконечно растущая конфигурация.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное вещественное число $R > 3(m+2)^2$. Обозначим через $C(R)$ множество точек целочисленной решетки, лежащих внутри, либо на границе круга (O, R) с центром в начале координат и радиусом R. Через $E(R)$ обозначим множество точек целочисленной решетки, лежащих вне множества $C(R)$, но у которых есть соседняя по вертикали или горизонтали точка целочисленной решетки, лежащая внутри $C(R)$.

Рассмотрим произвольную точку $A \in E(R)$ с координатами (x_a, y_a), лежащую в первом октанте. Рассмотрим две соседние к ней точки B и D с соответствующими координатами $(x_a - 1, y_a)$ и $(x_a, y_a - 1)$. Из определения $E(R)$ следует, что хотя бы одна из них принадлежит множеству $C(R)$. В силу того, что точка A лежит в первом октанте, расстояние от начала координат до точки B будет не более, чем расстояние до точки D. Следовательно, точка B принадлежит множеству $C(R)$ в любом случае.

Рассмотрим точку K с координатами $(x_a - 3/2, y_a)$. Проведем луч OK до пересечения с окружностью (O, R). Пусть $OK \cap (O, R) = L$. Ясно, что

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \leqslant KB \cdot \cos \angle LKA \leqslant KL < KA \cdot \cos \angle LKA \leqslant \frac{3}{2}.$$

Рассмотрим теперь окружность с центром в точке K и радиусом $(m + 3/2)\sqrt{2}$. По теореме Пифагора легко проверяется, что квадрат

$Q(2m)$ с центром в точке A лежит внутри круга $(K, (m+3/2)\sqrt{2})$ (см. рис. 8). Проведем далее через точку K прямую k, параллельную касательной к окружности (O, R) в точке L. Пусть эта прямая пересекает окружность (O, R) в точках M и N, а построенную окружность с центром в точке K пересекает по точкам M' и N'.

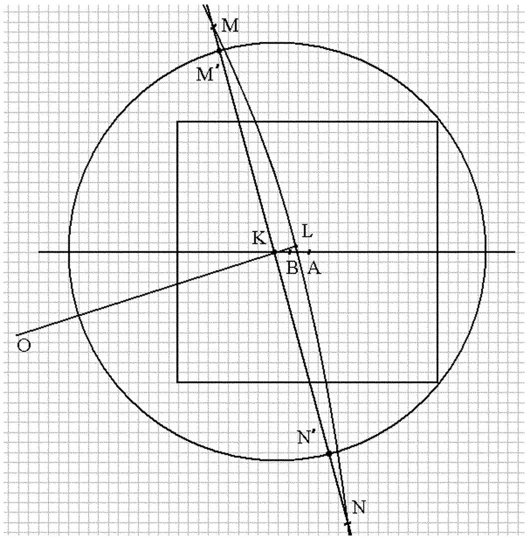

Рис. 8. Окружность с центром в точке K и окрестность точки A.

Рассмотрим теперь окружность, описанную вокруг равнобедренного треугольника $M'LN'$. В силу симметрии относительно прямой OL, данная окружность касается окружности (O, R) в точке L. Ее радиус r вычисляется по формуле:

$$r = \frac{LN'}{2\cos\angle KLN'} = \frac{(LN')^2}{2KL} = \frac{(KN')^2 + KL^2}{2KL} = \\ = \frac{2(m+3/2)^2 + KL^2}{2KL} \leqslant 2\sqrt{2}(m+3/2)^2 + \frac{3}{4}.$$

Откуда видно, что $r < R$ и, следовательно, построенная окружность лежит внутри круга (O, R). Поэтому точки M и N лежат вне отрезка $M'N'$, и, значит, вне окружности $(K, (m+3/2)\sqrt{2})$ и квадрата $Q(2m)$ с центром в точке A.

Пусть прямая k имеет уравнение $ax+by+c=0$. Рассмотрим множество точек из окрестности точки A, лежащих не выше прямой k:

$$M_0 = \{(x,y) \in V_m(A) | ax + by + c \leqslant 0\}\,.$$

Из установленного выше факта о расположении точек M и N вне окрестности точки A следует, что количество точек во множестве $M_0 \cup \{B\}$ не больше количества точек множества $V_m(A) \cap C(R)$, то есть

$$|M_0| + 1 \leqslant |V_m(A) \cap C(R)|.$$

Рассмотрим теперь вертикальную прямую v, проходящую через точку K. Она имеет уравнение $x - (x_a - 3/2) = 0$. Введем множества M_1 и M_2 — множества точек из локальной окрестности точки A, заключенные между прямыми v и k:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(x,y) \in V_m(A) \mid x \leqslant (x_a - 3/2),\ ax + by + c \geqslant 0\}\,, \\ M_2 &= \{(x,y) \in V_m(A) \mid x \geqslant (x_a - 3/2),\ ax + by + c \leqslant 0\}\,. \end{aligned}$$

Ясно, что некоторые точки из множества M_2, находящиеся у правой границы $V_m(A)$, при симметрии относительно точки K, могут не попасть во множество M_1. В тоже время, для любой точки из M_1 найдется симметричная ей относительно K точка из M_2. Поэтому $|M_1| \leqslant |M_2|$, и имеем тогда оценку:

$$\begin{aligned} &|V_m(A) \cap C(R)| \geqslant |M_0| + 1 \geqslant |M_0| - |M_2| + |M_1| + 1 \geqslant \\ &\quad \geqslant |(M_0 \setminus M_2) \cup M_1| + 1 = |\{(x,y) \in V_m(A) | x < x_a - 3/2\}| + 1 = \\ &\qquad = (2m+1)(m-1) + 1 = 2m^2 - m. \end{aligned}$$

Итак, мы установили, что для произвольной ячейки $A \in E(R)$, число ячеек из ее локальной окрестности, попадающих во множество $C(R)$, не менее, чем $2m^2 - m$. Рассмотрим в качестве начальной конфигурации f однородной структуры $\sigma(2m+1, H)$ такую, у которой все ячейки, лежащие во множестве $C(R)$, $R > 3(m+2)^2$, являются активными, а остальные равны 0. Тогда при пороге $H \leqslant 2m^2 - m$ ячейка $A \in E(R)$ перейдет в состояние 1, и следовательно, активными будут как минимум ячейки из множества $C(R) \cup E(R)$.

Далее через $C((x,y),R)$ и $E((x,y),R)$ обозначим множества целочисленной решетки, получающиеся соответственно из $C(R)$ и $E(R)$ сдвигом на целочисленный вектор (x,y). Рассмотрим для всех $t \in \mathbb{N}_0$ множества точек:

$$W(t,R) = \bigcup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{Z}^2\\ |x+y|\leqslant t\\ |x-y|\leqslant t}} C((x,y),R)$$

Заметим, что

$$W(0,R) = C(R) \text{ и } W(1,R) = C(R) \cup E(R),$$

$$W(t+1,R) = \bigcup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{Z}^2\\ |x+y|\leqslant t\\ |x-y|\leqslant t}} C((x,y),R) \ \cup \bigcup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{Z}^2\\ |x+y|\leqslant t\\ |x-y|\leqslant t}} E((x,y),R).$$

Откуда следует, что если в момент времени t были активными ячейки из множества $W(t,R)$, то в момент времени $t+1$ будут активными как минимум все ячейки из множества $W(t+1,R)$. И далее, с учетом первого шага, по индукции заключаем, что ко времени t множество активных ячеек конфигурации $\Phi^t(f)$ будет содержать в себе множество $W(t,R)$, и значит, что число активных ячеек бесконечно растет со временем. То есть конфигурация f является бесконечно растущей. Что доказывает лемму.

Лемма 5. *Однородная структура $\sigma(2m+1,H)$, $H \leqslant 2m^2-m$ при всех $\varepsilon \in (0, \sqrt{H/2} - H/(2m+1))$ является правильной для (G_1,G_2) роста конфигураций со скоростью 1, где*

$$G_1 = M(2m+1, H+\sqrt{2H}/2+2, \varepsilon), G_2 = M(2m+1, H-\sqrt{2H}/2-1).$$

Доказательство. По лемме 4 установили, что в ОС $\sigma(2m+1,H)$ при $H \leqslant 2m^2-m$ всегда найдется бесконечно растущая конфигурация. Также ясно, что любая бесконечно растущая конфигурация в ОС $\sigma(2m+1,H)$ со временем становится односвязной, поэтому ее можно ограничить множествами $\alpha \cdot M(2m+1, H+\sqrt{2H}/2+2, \varepsilon)$

и $\beta \cdot M(2m+1, H-\sqrt{2H}/2-1)$ для некоторых $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\varepsilon \in (0, \sqrt{H/2} - H/(2m+1))$.

Ясно, что мы можем подобрать такой момент времени t_0, что для величин α и β по лемме 2 и лемме 3 из выполнения условия

$$\alpha \cdot M(2m+1, H+\sqrt{2H}/2+2, \varepsilon) \subset F \subset \beta \cdot M(2m+1, H-\sqrt{2H}/2-1)$$

будет следовать выполнение условия

$$(\alpha+1) \cdot M(2m+1, H+\sqrt{2H}/2+2, \varepsilon) \subset \tilde{F} \subset \\ \subset (\beta+1) \cdot M(2m+1, H-\sqrt{2H}/2-1).$$

Аналогично и далее для каждого шага $t > t_0$ в качестве стартовых параметров растяжения ограничивающих множеств берем $(\alpha + (t-t_0))$, $(\beta + (t-t_0))$ и также получаем выполнение лемм 2 и 3. По определению это и означает, что ОС является правильной для (G_1, G_2) роста конфигураций. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы

По лемме 5 каждая конфигурация в последовательности ОС

$$\left\{\sigma(2m+1, km^2)\right\}_{m=1}^{\infty}, \ km^2 < 2m^2 - m$$

является правильной для (G_1, G_2) роста конфигураций со скоростью 1, где для всех $\varepsilon \in (0, \sqrt{km^2/2} - km^2/(2m+1))$ выполнено:

$$G_1 = M(2m+1, km^2 + m \cdot \sqrt{2k}/2 + 2, \varepsilon),$$
$$G_2 = M(2m+1, km^2 - m \cdot \sqrt{2k}/2 - 1)$$

Сожмем данные множества в $(2m+1)/2$ раз. Тогда (G_1, G_2)-рост конфигураций со скоростью 1 будет эквивалентен (G_1', G_2')-росту конфигураций со скоростью $m + 1/2$, где

$$G_1' = M\left(2, \frac{4km^2}{(2m+1)^2} + \frac{2m}{(2m+1)^2} \cdot \frac{\sqrt{2k}}{2} + \frac{8}{(2m+1)^2}, \varepsilon'\right),$$

$$G_2' = M\left(2, \frac{4km^2}{(2m+1)^2} - \frac{2m}{(2m+1)^2}\cdot\frac{\sqrt{2k}}{2} - \frac{4}{(2m+1)^2}\right),$$

$$\varepsilon' = \varepsilon/(m+1/2), \quad \varepsilon' \in \left(0, \sqrt{\frac{2km^2}{(2m+1)^2}} - \frac{2km^2}{(2m+1)^2}\right).$$

Для любого $k \in (0,2)$ при $m > 1/(2-k)$ неравенство $km^2 < 2m^2 - m$ будет верным. Далее, выбирая соответствующее ε на каждом шаге, получим выполнение последовательного вложения множеств $G_1'(m)$ друг в друга. Таким образом из определения получаем, что последовательность ОС

$$\left\{\sigma(2m+1, km^2)\right\}_{m=1}^{\infty}$$

является аппроксимирующей $M(2,k)$-рост. Конец доказательства.

Автор выражает огромную благодарность А. С. Подколзину и В. Б. Кудрявцеву за руководство и помощь при написании статьи.

Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[2] Подколзин А. С., Болотов А. А., Кудрявцев В. Б. Основы теории однородных структур. М.: Наука, 1990.