Об асимптотическом поведении хроматического индекса случайных гиперграфов

Ю. А. Будников

В работе показано, что известная теорема Pippenger-Spencer (см. [1]) в теории гиперграфов неприменима для случая, когда длина гиперребра не является постоянной, и рассмотрена возможность выделения в случайном гиперграфе почти совершенной упаковки, а также показано, что при некоторых ограничениях хроматический индекс случайного гиперграфа G асимптотически больше cD для некоторой константы $c > 1$, где D — математическое ожидание степени вершины G.

Определение конечной проективной плоскости. Рассмотрим конечную проективную плоскость порядка q, где q — простое число. Она определяется так (см. [10]):

1) для любых 2-х точек существует в точности одна прямая, проходящая через них;
2) любая прямая содержит ровно $q + 1$ точку;
3) любая точка инцидентна ровно $q + 1$ прямой;
4) любые 2 прямые пересекаются ровно в одной точке.

Замечание 1. Эта же самая конструкция может быть построена в случае $q = p^k$, где p — простое число, k — некоторое натуральное число.

1. Теорема (N. Pippenger and J. Spencer)

Определение 1. Гиперграф $G = (V, E)$ — это пара двух множеств: V — множество вершин гиперграфа (вершина — некоторый объект, но поскольку рассматриваем только конечные множества V, то все вершины можно занумеровать натуральными числами от 1 до $n = |V|$ и считать, что V из этих чисел и состоит) и $E \subseteq V^k$ — множество гиперребер — это подмножество множества всех k-элементных множеств, содержащих элементы из V, то есть k — длина гиперребра (число вершин в нем).

Пусть $k \geqslant 2$ — фиксированное натуральное число. Будем рассматривать гиперграфы $G = (V, E)$ — k-однородные, то есть каждое гиперребро которых содержит в точности k вершин, и нетривиальные, то есть содержащие хотя бы одно гиперребро. Будем для краткости называть их просто графами. Если $G = (V, E)$, то V — множество вершин графа, E — множество его ребер. $n(G) = |V(G)|$ — число его вершин, $m(G) = |E(G)|$ — число ребер G.

Определим для любой вершины v $\deg_G(v)$ — степень вершины v. $\operatorname{codeg}_G(v, w)$ — костепень, то есть число ребер, проходящее одновременно через вершины v, w.

Обозначим:

$$D(G) = \max_{v \in V(G)} (\deg_G(v)),$$
$$d(G) = \min_{v \in V(G)} (\deg_G(v)),$$
$$C(G) = \max_{u,v \in V(G), u \neq w} (\operatorname{codeg}_G(v, w)).$$

Упаковка в графе G — набор P непересекающихся ребер G. Покрытие графа G — набор K ребер графа, содержащий все вершины графа.

$\chi(G)$ — «хроматический индекс» графа G — минимальное число упаковок, на которые можно разбить все гиперребра G.

Существует ряд простых утверждений, касающихся введенных понятий:

Утверждение 1 ([1]). *Для любого гиперграфа G, характеризующегося введенными ранее величинами, справедливо соотношение:*

$$\chi(G) \geqslant D(G).$$

Доказательство. Рассмотрим вершину G, имеющую степень D. В ней по определению пересекается D ребер. Поэтому для правильной их раскраски потребуется как минимум D цветов, а следовательно $\chi(G) \geqslant D(G)$.

Утверждение 2 ([1]). *Для любого гиперграфа G, характеризующегося введенными ранее величинами, справедливо соотношение:*

$$\chi(G) \leqslant k(D(G) - 1) + 1.$$

Утверждение 3 ([1]). *Для любого гиперграфа G, характеризующегося введенными ранее величинами, справедливо соотношение:*

$$nD(G) = m(G)k.$$

Доказательство этих фактов изложено в статье Pippenger-Spencer [1].

Сформулируем основную теорему статьи [1]:

Теорема 1. *Для любых $\delta > 0$, $k \geqslant 2$ — фиксированное число вершин на гиперребре, существуют $\delta' > 0$, $N > 0$ такие, что из условий*

$$d(G) \geqslant (1 - \delta')D(G), \tag{1}$$

$$C(G) \leqslant \delta' D(G), \tag{2}$$

для $n > N$ следует

$$\chi(G) \leqslant (1 + \delta)D(G). \tag{$*$}$$

Данную теорему можно переформулировать в терминах пределов, введя обозначения:

$f(G) \sim g(G)$ для $\lim_G f(G)/g(G) = 1$, имеется в виду, что $n(G) \to \infty$,
$f(G) \prec g(G)$ для $\lim_G f(G)/g(G) = 0$,
$f(G) \lesssim g(G)$ для $\lim_G f(G)/g(G) \leqslant 1$.

Поэтому ввиду неравенств

$$d(G) \leqslant D(G) \leqslant \chi(G)$$

можно переписать теорему так:

$$d(G) \sim D(G), \tag{1'}$$

$$C(G) \prec D(G), \tag{2'}$$

$$\Rightarrow$$

$$\chi(G) \sim D(G). \tag{*'}$$

Замечание 2. В доказательстве данной теоремы использован полиномиальный вероятностный (рандомизированный) алгоритм построения $D(G)(1-o(1))$ упаковок размера $\frac{n}{k}(1-o(1))$: этими упаковками покрывается $n(1-o(1))$ вершин гиперграфа G и $\chi(G) = D(1+o(1))$. Однако задача вычисления точного значения $\chi(G)$ является NP-трудной (см. [8]).

2. Один пример

Определение 2. Пусть некоторая функция $k(n)$ возрастает по n в смысле (!), если

1) $N_1 < N_2$, где $N_1 > 0$, $N_2 > 0$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $N_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow k(N_1) \leqslant k(N_2)$;
2) $\forall N > 0$: $N \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists\, \tilde{N} > N$: $k(\tilde{N}) > k(N)$.

Покажем, что в предыдущей теореме нельзя запустить рост числа вершин на гиперребре, то есть докажем следующее.

В тех же обозначениях теперь будем рассматривать число вершин на гиперребре k как возрастающую (в смысле (!)) функцию от n — числа вершин гиперграфа: $k(n) \to \infty$, при $n \to \infty$.

Везде далее рассматриваем возрастающие функции в смысле (!). Будем далее полагать, что $k(n) = o(n)$, $n \to \infty$. Это условие существенно, так как иначе можно взять $k(n) \equiv n$. Условие (2) в определении существенно, так как для остальных функций подходит теорема (Nicholas Pippenger and Joel Spencer из [1]).

Утверждение 4. *Для любых $\delta > 0$, $\delta' > 0$, для любой возрастающей в смысле (!) функции $g(n)$ можно построить возрастающую $k(n)$ — число вершин на гиперребре — так, что $k(n) < g(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ и класс гиперграфов $G(n)$, где n — число вершин гиперграфа с ростом максимальной степени $D(n)$: при $n = n_k$, $k = 1, 2, \ldots$ — возрастающая подпоследовательность натуральных чисел — будет выполнено:*

$$d(G) \geqslant (1-\delta')D(G) \tag{1”}$$

$$C(G) \leqslant \delta' D(G) \tag{2”}$$

но

$$\chi(G(n)) = k(n)(D(G(n)) - 1) + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{*”}$$

Построим пример класса, подтверждающий это:

Пусть $P(q)$ — проективная плоскость порядка q. Естественно, что $k = q + 1$, всего точек в этой проективной плоскости $q^2 + q + 1 =: n_0$. Запускаем рост числа точек на гиперребре $k = k(n_0)$, $n_0 \to \infty$. Это некая возрастающая функция от n_0 порядка $O(\sqrt{n_0})$.

Наберем таких плоскостей при каждом фиксированном n_0 достаточное число $n = l(n_0) * n_0$: плоскости не пересекаются друг с другом и получается нужный фиксированный рост $k(n)$, $n \to \infty$. Поскольку $l(n_0) \in \mathbb{N}$ выбирается произвольно, то, очевидно, получим нужный рост $k(n)$, $n \to \infty$, выбрав соответствующие $l(n_0)$ при $n_0 = q^2 + q + 1$, где q — некоторое простое число (достаточно большое, выбирающееся на каждом шаге для увеличения n_0). Как раз такую подпоследовательность n и берем в качестве n_k из утверждения 4.

Поскольку при таком добавлении проективных плоскостей не изменяется длина гиперребра, степени вершин, костепени, а меняется только общее число вершин n, то утверждение 4 доказано, поскольку:

1) таким способом можно построить $k(n)$ любого порядка малости относительно n, определенную на соответствующей подпоследовательности $n = n_k$, $k = 1, 2, \ldots$;
2) степень любой вершины одна и та же и является возрастающей функцией от n, тождественно равной $k(n)$ при любом n из подпоследовательности $n = n_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Поэтому выполнено (1");
3) костепень любой вершины равна 1 при любом n, что непосредственно следует из определения проективной плоскости. Поэтому выполнено (2");
4) $\chi(G) = k(n) \cdot (D(n) - 1) + 1$ при каждом фиксированном n, то есть максимально возможному числу (как показано в Утверждении (Nicholas Pippenger and Joel Spencer), приведенном в их статье). Поэтому выполнено (*");

Замечание 3. При каждом фиксированном n для некоторой подпоследовательности $n = n_k$, $k = 1, 2, \ldots$ гиперграф G можно сделать связным. Берем дополнительное гиперребро и связываем им первые два несвязанных графа из $l(n_0)$ штук: $[\frac{k(n_0)}{2}]$ точек принадлежат первому графу, а оставшиеся второму. Далее аналогично связываем второй и третий графы и т. д. При этом степень каждого графа на n_0 вершинах в связке увеличивается максимум на 2, костепень — на 2, $\chi(G)$ не уменьшается. Поэтому (1") и (2"), (*") будут так же выполнены для такого класса уже связных гиперграфов на n вершинах для некоторой подпоследовательности нашей последовательности $n = n_k$, $k = 1, 2, \ldots$, при $n_k > N(\delta, \delta')$.

Утверждение 5. *Пусть в $D(G)$ — регулярном гиперграфе G с растущей относительно n функцией числа вершин на гиперребре k*

1) $D(G) = k$;
2) $n = k(D(G) - 1) + 1$;
3) $\operatorname{codeg}(v, w) \leqslant 1$, *для любой пары вершин v, w.*

Тогда этот G — проективная плоскость.

Замечание 4. Ранее было показано, что проективные плоскости удовлетворяют этим условиям. Покажем, что этим условиям удовлетворяют только они и никакие другие гиперграфы.

Доказательство. По известной формуле число ребер в G $m = \frac{nD(G)}{k} = n = k(D(G) - 1) + 1$. Так как все $\operatorname{codeg}(v) \leqslant 1$, то любое гиперребро пересекается ровно с $k(D(G) - 1)$ гиперребром (k вершин на этом гиперребре, степень любой вершины $D(G)$, все эти гиперребра — разные, поскольку $\operatorname{codeg}(v) \leqslant 1$). Это означает, что данный блок из $k(D(G)-1)+1$ гиперребра и есть множество всех ребер гиперграфа G, но это означает, что каждое гиперребро гиперграфа G пересекает все другие гиперребра, и доказано, что через любые две точки обязана проходить некоторая прямая. Поэтому это конечная проективная плоскость и ее хроматический индекс $\chi(G) = k(D(G) - 1) + 1$.

Замечание 5. Здесь существенным было то, что $\operatorname{codeg}(v, w) \leqslant 1$. Иначе можно привести примеры гиперграфов, не являющихся конечными проективными плоскостями, но удовлетворяющих всем остальным условиям, например, просто $\frac{n}{k}$ наборов (непресекающихся) по D совпадающих ребер. Далее это понадобится.

Существенно также то, что $n = k(D(G) - 1) + 1$, иначе, например, при $k = D(G) \leqslant n$ можно набрать набор из многих непересекающихся проективных плоскостей — тоже не проективная плоскость.

Вывод.

Поскольку для целых классов гиперграфов при определенных соотношениях числа их вершин, длины гиперребра (возрастающей функции от числа вершин) и степени вершин невозмозно расширить теорему Pippenger-Spencer в случае растущей длины гиперребра, то имеет смысл рассмотреть не всевозмозные классы гиперграфов, а оценить, на каком числе классов можно расширить теорему Pippenger-Spencer в случае растущей длины гиперребра. Это означает, что основная цель — попробовать показать, что для большинства классов гиперграфов при определенных соотношениях на перечисленные выше параметры будет выполняться $\chi(G) \sim D(G)$, $n \to \infty$.

3. Совершенная упаковка

Определение 3. Совершенная упаковка в гипергафе G — это упаковка G (то есть набор непересекающихся ребер), содержащая все его вершины.

Из определения следует, что совершенная упаковка G должна содержать $\frac{n}{k}$ ребер (считаем, что n делится на k нацело). Если n не делится на k нацело, то пусть какие-то $\leqslant k-1$ вершин остаются непокрытыми. Это не будет иметь существенного значения для дальнейших асимптотик и приблизительных алгоритмов.

Вопрос о том, существует ли в гиперграфе G совершенная упаковка, ставился уже достаточно давно.

На данный момент есть только гипотезы относительно того, можно ли в гиперграфе G найти совершенную упаковку при некоторых соотношениях на его основные характеристики. Как и ранее, рассматриваются D-регулярные, k-однородные гиперграфы, у которых $\mathrm{codeg}(v, w) \leqslant D$, $n \to \infty$. Случай растущего k как функции от n ранее не рассматривался.

В случае растущего k для одних классов гиперграфов (имеются ввиду классы, определяемые некоторыми соотношениями на n, D, k) существует совершенная упаковка (например, для полных гиперграфов, решетки — эти примеры рассмотрены ранее), а для других — нет (например, проективная плоскость, в которой все гиперребра пересекаются, а, значит, размер максимальной упаковки равен 1).

Как видно, возможны некоторые взаимосвязи для проблемы хроматического индекса и совершенной упаковки, то есть эти проблемы могут быть тесно связаны для конкретных классов гиперграфов.

Если в случае растущего k проблема совершенной упаковки не рассматривалась, то в случае постоянного k проблема до сих пор не решена. Есть лишь некоторые приблизительные результаты, из которых самым фундаментальным является следствие из теоремы Pippenger-Spencer для хроматического индекса. Он формулируется следующим образом:

Следствие 1 (из теоремы Pippenger-Spencer (см. [1])). *Для любых $\delta > 0$, $k \geqslant 2$ — фиксированное число вершин на гиперребре, существует $\delta' > 0$, $N > 0$: из условий*

$$d(G) \geqslant (1 - \delta')D(G), \tag{1}$$

$$C(G) \leqslant \delta' D(G), \tag{2}$$

для $n > N$ следует

$$\left| |P| - \frac{n}{k} \right| < \delta,$$

где $|P|$ — размер максимальной упаковки в гиперграфе G.

Поскольку асимтотически размер этой упаковки $\frac{n}{k}$, а все гиперребра длины k, то данная упаковка будет почти совершенной, то есть покрывать $n(1 - o(1))$ вершин гиперграфа G при $n \to \infty$.

Замечание 6. Данный результат был немного усилен (то есть построена упаковка, не являющаяся совершенной, но покрывающая не $n - o(n)$ вершин (как в теореме Pippenger-Spencer), а $n - O(nD^{-\frac{1}{k}} \ln^c D))$ в статье [3]. Основная теорема из этой статьи приведена ниже.

Пусть $G = (v, E)$ — $(k+1)$-однородный гиперграф (то есть все его гиперребра содержат в точности $k+1$ вершину) на n вершинах. Пусть P — некоторая упаковка в этом гиперграфе (то есть набор непересекающихся ребер этого гиперграфа), $S = V - \bigcup P$ — те вершины гиперграфа, которые не попали в упаковку P.

Теорема 2 (Joel Spencer, [3]).

1) любое гиперребро G имеет постоянный размер $k+1 \geqslant 3$;

2) $\mathrm{codeg}(v,w) = 1 \ \ \forall v, w \in V$*;*

3) $\deg(v) = D \ \ \forall v \in V$.

Тогда существует упаковка P с $|S| = O(nD^{-\frac{1}{k}} \ln^c D)$, где c — некоторая константа, зависящая от k.

Естественно, что в случае непостоянной длины гиперребра эти теоремы неприменимы, поскольку выше показана неприменимость теоремы Pippenger-Spencer для случая растущей длины гиперребра. В случае проективной плоскости размер максимально возможной упаковки равен 1, а, например, при $k(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ выделяется совершенная упаковка размера 1 (при $D = 1$). Поэтому в такой модели гиперграфов возможны разные варианты.

4. Случайные однородные гиперграфы

Рассмотрим полный гиперграф $G = (V, E)$ на n вершинах, k-однородный. Степень любой его вершины C_{n-1}^{k-1}, костепени — C_{n-2}^{k-2}. Число ребер — C_n^k. Его подграф $G(n,p)$ — случайный гиперграф, гиперребра которого — гиперребра G, порожденные независимо с вероятностью p. На самом деле имеется в виду стандартная вероятностная модель испытаний Бернулли, где элементарные события — это кортежи из $0, 1$ длины C_n^k, где единицы на каких-то позициях соответствуют рожденным гиперребрам, а нули — не рожденным. Поэтому вводится следующая вероятностная мера:

$$P(\text{родится набор ребер } (e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}) \text{ и не родятся все остальные}) = \\ = p^m (1-p)^{c_n^k - m}.$$

Очевидно, что эти элементарные события не пересекаются. В рамках данной модели был получен ряд результатов, касающихся вопроса выделения совершенной упаковки. Все эти результаты относятся к случаю постоянного k — длины гиперребра. Приведем последние результаты:

Теорема 3 (Erdos and Renyi, см. [6]). *При* $k=2$, $d(n,p)=pC_{n-1}^{k-1}$ *(то есть для вероятностных графов)*

$$P\begin{pmatrix}\text{в } G(n,p) \text{ есть}\\ \text{совершенная}\\ \text{упаковка}\end{pmatrix} \to \begin{cases}0, & \text{если } d(n,p)-\ln(n)\to-\infty,\\ e^{-e^{-c}}, & \text{если } d(n,p)-\ln(n)\to c,\\ 1, & \text{если } d(n,p)-\ln(n)\to\infty,\end{cases} \qquad n\to\infty.$$

Замечание 7. $d(n,p)$, таким образом определенное, обозначает математическое ожидание степени вершины в вероятностном гиперграфе, так как можно определить индикаторные случайные величины для ребер полного гиперграфа, которые будут равны 1, если соответствующее гиперребро рождается (то есть равны 1 на всех элементарных исходах, где на месте этого гиперребра стоит 1). Степень в вероятностном гиперграфе — это случайная величина, равная сумме индикаторных с.в. ребер, проходящих через данную вершину в полном гиперграфе. Поэтому, посчитав мат. ожидание этой суммы, получаем как раз $d(n,p)$.

Есть гипотеза, что этот же результат справедлив и в случае гиперграфа с постоянной длиной гиперребра k. На данный момент доказан ряд теорем, частично это подтверждающих, например

Теорема 4 (Jeong Han Kim, см. [4]). *При* $k=\mathrm{const}$, $d(n,p)=pC_{n-1}^{k-1}$*: если* $\frac{d(n,p)}{n^{1/(5+2/(k-1))}}\to\infty$*, то* $P($*в* $G(n,p)$ *есть совершенная упаковка*$)\to 1$*,* $n\to\infty$*.*

Остановимся подробнее на случайных гиперграфах, поскольку в этой модели перспективнее получать результаты, касающиеся хроматического индекса и совершенной упаковки, в связи с тем, что рассматривать все закономерности можно с точностью почти наверное, то есть для большего числа гиперграфов, которые можно породить в этой модели, а не для всех.

Далее будет использоваться формула Стирлинга:

$$C_n^k \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}, \quad n\to\infty.$$

Лемма 1. *G — полный гиперграф на n вершинах с длиной гиперребра k. $1 \leqslant c \leqslant \frac{n}{k}$. Тогда число разных упаковок G размера $\frac{n}{kc}$ равно*

$$\frac{n!}{(k!)^{\frac{n}{kc}}\ \left(n(1-\frac{1}{c})\right)!\ \left(\frac{n}{kc}\right)!}.$$

Доказательство. *Способ 1.* Выбрать упаковку из $\frac{n}{kc}$ ребер — это то же самое, что выделить $\frac{n}{c}$ точек из n имеющихся в наличии (поскольку любая упаковка размера $\frac{n}{kc}$ будет занимать ровно $\frac{n}{c}$ точек) и разделить эти выделенные точки на подмножества по k точек (гиперребра). При разных разбиениях n исходных точек на $\frac{n}{c}$ точек будем получать разные упаковки, как и при разбиениях внутри этого выделенного подмножества на подмножества по k точек. Всего возможных вариантов разбиения n точек на подмножества по $\frac{n}{c}$ точек $C_n^{\frac{n}{c}}$. Внутри подмножества из $\frac{n}{c}$ точек будем выбирать подмножества по k точек и подсчитаем число таких возможных разбиений:

1) занумеруем все $\frac{n}{c}$ точек номерами $1, 2, \ldots, \frac{n}{c}$
2) зафиксируем точку с номером 1. К ней в подмножество из k точек можно добавить $k-1$ точку из оставшихся $\frac{n}{c}-1$. Это можно сделать $C_{\frac{n}{c}-1}^{k-1}$ способами. Таким способом набрали k точек.
3) Зафиксируем какую-нибудь из $\frac{n}{c}-k$ оставшихся точек и добавим к ней $k-1$ точку $C_{\frac{n}{c}-k-1}^{k-1}$ способами и т. д.

В итоге получим $C_n^{\frac{n}{c}}\ \left(C_{\frac{n}{c}-1}^{k-1}\ C_{\frac{n}{c}-k-1}^{k-1} \ldots C_{k-1}^{k-1}\right)$ способов выбрать упаковку размера $\frac{n}{kc}$.

$$C_n^{\frac{n}{c}}\ \left(C_{\frac{n}{c}-1}^{k-1}\ C_{\frac{n}{c}-k-1}^{k-1} \ldots C_{k-1}^{k-1}\right) =$$
$$= \frac{n!}{\left(\frac{n}{c}\right)!\left(n(1-\frac{1}{c})\right)!}\left(\frac{k}{n/c}C_{\frac{n}{c}}^{k}\ \frac{k}{\frac{n}{c}-k}C_{\frac{n}{c}-k}^{k}\ldots C_k^k\right) =$$
$$= \frac{n!}{\left(\frac{n}{c}\right)!\left(n(1-\frac{1}{c})\right)!}\ \frac{k^{\frac{n}{kc}}}{\frac{n}{c}\left(\frac{n}{c}-k\right)\ldots k}\ \frac{\left(\frac{n}{c}\right)!}{(k!)^{\frac{n}{kc}}} = \frac{n!}{(k!)^{\frac{n}{kc}}\left(n(1-\frac{1}{c})\right)!\ \left(\frac{n}{kc}\right)!}$$

Способ 2. Можно выбирать упаковки другим способом: выбираем первое гиперребро C_n^k способами, второе — C_{n-k}^k способами (поскольку второе гиперребро не должно пересекать первое, то оно не должно содержать те k точек первого гиперребра, поэтому выбирать новые k точек надо из оставшихся $n-k$ точек) и т. д. В итоге получаем $C_n^k\, C_{n-k}^k \dots C_{n(1-\frac{1}{c})+k}^k$ вариантов, но надо учесть, что любая перестановка ребер в упаковке дает ту же самую упаковку, поэтому всего получаем вариантов:

$$\frac{C_n^k\, C_{n-k}^k \dots C_{n(1-\frac{1}{c})+k}^k}{\left(\frac{n}{kc}\right)!} = \frac{n!}{(k!)^{\frac{n}{kc}}\ \left(n(1-\frac{1}{c})\right)!\ \left(\frac{n}{kc}\right)!}$$

Что и требовалось доказать.

Определение 4. $f(n) \lesssim g(n)$, если существует номер $N > 0$: $\forall n > N \Rightarrow f(n) < cg(n)$ для некоторой константы c.

$f(n) \preceq g(n)$, если существует номер $N > 0$: $\forall n > N \Rightarrow f(n) < g(n)$.

Лемма 2. *Пусть в условиях нашей модели случайного гиперграфа $G(n,p)$ (k — число вершин на гиперребре — либо постоянная, либо функция от n), где $p = \frac{D}{C_{n-1}^{k-1}}$ и функция D — либо постоянная, либо растущая относительно n. $m > 1$ — некоторая постоянная.*

Если $D \lesssim \frac{e^k}{me}$, то P(в $G(n,p)$ есть совершенная упаковка) $\to 0$, $n \to \infty$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} &P(\text{в } G(n,p) \text{ есть совершенная упаковка}) = \\ &\qquad = P(\text{рождается какая-то упаковка размера } \tfrac{n}{k}) \leqslant \\ &\leqslant \sum_{\substack{\text{всем упаковкам}\\ \text{размера } \frac{n}{k}}} P(\text{рождается конкретная упаковка размера } \tfrac{n}{k}). \end{aligned}$$

Поскольку по Лемме 1 в этой сумме будет ровно $\frac{n!}{(k!)^{\frac{n}{k}}\left(\frac{n}{k}\right)!}$ слагаемых, то

$$\begin{aligned} P(\text{в } G(n,p) \text{ есть совершенная упаковка}) &\leqslant \frac{n!}{(k!)^{\frac{n}{k}}\ \left(\frac{n}{k}\right)!}\left(\frac{D}{C_{n-1}^{k-1}}\right)^{\frac{n}{k}} = \\ &= \frac{n!\ D^{\frac{n}{k}}\ ((k-1)!)^{\frac{n}{k}}}{(k!)^{\frac{n}{k}}\ ((n-1)(n-2)\dots(n-k+1))^{\frac{n}{k}}\ \left(\frac{n}{k}\right)!} = \end{aligned}$$

$$= \frac{n!\, D^{\frac{n}{k}}}{k^{\frac{n}{k}}\, n^{(k-1)\frac{n}{k}} \left(\frac{n}{k}\right)!} \left[\left(\frac{n}{n-1}\right) \left(\frac{n}{n-2}\right) \dots \left(\frac{n}{n-k+1}\right) \right]^{\frac{n}{k}} \lesssim$$

$$\lesssim \frac{2\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\, D^{\frac{n}{k}}\, n^{\frac{n}{k}}}{k^{\frac{n}{k}}\, n^n \left(\frac{n}{ek}\right)^{\frac{n}{k}} \sqrt{2\pi\frac{n}{k}}} \left[1 + \frac{k-1}{n-k+1}\right]^{\frac{n}{k}(k-1)} \lesssim \frac{2\, e^{\frac{n}{k}} \sqrt{k}\, D^{\frac{n}{k}}\, e^k}{e^n}.$$

Поэтому при $D \lesssim \frac{e^k}{me}$ отсюда будет следовать утверждение леммы.

Предложение 1.

$$\frac{C^k_{n(1-\frac{1}{c})}}{C^{k-1}_{n-1}} \sim \frac{n}{k}\left(1-\frac{1}{c}\right)^k, \quad n \to \infty.$$

Доказательство.

$$\frac{C^k_{n(1-\frac{1}{c})}}{C^{k-1}_{n-1}} = \frac{n}{k}\, \frac{n(1-\frac{1}{c})[n(1-\frac{1}{c})-1]\dots[n(1-\frac{1}{c})-k]}{n(n-1)\dots(n-k)} =$$

$$= \frac{n}{k}\left(1-\frac{1}{c}\right)^k \left(\frac{n-\frac{c}{c-1}}{n-1}\right) \dots \left(\frac{n-\frac{c}{c-1}k}{n-1}\right) \sim$$

$$\sim \frac{n}{k}\left(1-\frac{1}{c}\right)^k \left(1 - \frac{1}{(n-\alpha(k))(c-1)}\right)^k \sim \frac{n}{k}\left(1-\frac{1}{c}\right)^k, \; n \to \infty,$$

поскольку $1 \leqslant \alpha(k) \leqslant k$. Что и требовалось доказать.

Везде далее полагаем $k = o(n)$, $n \to \infty$.

Теорема 5. *Пусть в условиях нашей модели случайного гиперграфа $G(n,p)$ (k — число вершин на гиперребре — растущая функция от n), где $p = \frac{D}{C^{k-1}_{n-1}}$ и строго возрастающая по n функция $D = o(C^{k-1}_{n-1})$, $k = o(n)$, $n \to \infty$.*

1) Если для некоторой константы $c > 1$

$$\frac{2\, e^{\frac{n}{kc}} \sqrt{ck} (cD)^{\frac{n}{kc}} e^{\frac{k}{c}} \left(\frac{c}{c-1}\right)^{n(1-\frac{1}{c})}}{e^{\frac{n}{c}}} \to 0, \;\; n \to \infty,$$

то $P\big(G(n,p)$ содержит упаковку размера $\frac{n}{kc}\big) \to 0$, $n \to \infty$.

2) Если $D \succeq e^k$, то для любой константы $c > 1$ $P\big(G(n,p)$ содержит упаковку размера $\frac{n}{kc}\big) \to 1$, $n \to \infty$.

Доказательство.

1) $P($в $G(n,p)$ есть упаковка размера $\dfrac{n}{kc}) =$

$$= P(\text{рождается какая-то упаковка размера } \frac{n}{kc}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{\text{всем упаковкам}\\ \text{размера } \frac{n}{kc}}} P(\text{рождается конкретная упаковка размера } \frac{n}{kc}).$$

Поскольку по Лемме 1 в этой сумме будет ровно $\frac{n!}{(k!)^{\frac{n}{kc}}\left(n(1-\frac{1}{c})\right)!\ \left(\frac{n}{kc}\right)!}$ слагаемых, то

$$P(\text{в } G(n,p) \text{ есть упаковка размера } \frac{n}{kc}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n!}{(k!)^{\frac{n}{kc}}\left(\frac{n}{kc}\right)!\ (n(1-\frac{1}{c}))!}\left(\frac{D}{C_{n-1}^{k-1}}\right)^{\frac{n}{kc}} =$$

$$= \frac{n!\ D^{\frac{n}{kc}}\,((k-1)!)^{\frac{n}{kc}}}{(k!)^{\frac{n}{kc}}\,((n-1)(n-2)\dots(n-k+1))^{\frac{n}{kc}}\left(\frac{n}{kc}\right)!(n(1-\frac{1}{c}))!} =$$

$$= \frac{n!\ D^{\frac{n}{kc}}}{k^{\frac{n}{kc}}n^{(k-1)\frac{n}{kc}}\left(\frac{n}{kc}\right)!(n(1-\frac{1}{c}))!}\left[\left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{n}{n-2}\right)\cdots\left(\frac{n}{n-k+1}\right)\right]^{\frac{n}{kc}} \lesssim$$

$$\lesssim \frac{2\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}D^{\frac{n}{kc}}n^{\frac{n}{kc}}}{k^{\frac{n}{kc}}n^{\frac{n}{c}}\left(\frac{n}{ekc}\right)^{\frac{n}{kc}}\sqrt{2\pi\frac{n}{kc}}\left(\frac{n(1-\frac{1}{c})}{e}\right)^{n(1-\frac{1}{c})}}\left[1+\frac{k-1}{n-k+1}\right]^{\frac{n}{kc}(k-1)} \lesssim$$

$$\lesssim \frac{2\ e^{\frac{n}{kc}}\sqrt{ck}(cD)^{\frac{n}{kc}}e^{\frac{k}{c}}\left(\frac{c}{c-1}\right)^{n(1-\frac{1}{c})}}{e^{\frac{n}{c}}}.$$

Отсюда будет следовать утверждение 1).

2) $P\left(G(n,p) \text{ содержит упаковку размера } \dfrac{n}{kc}\right) =$

$$= 1 - P\left(G(n,p) \text{ не содержит упаковку размера } \frac{n}{kc}\right),$$

поэтому оценим

$$P\Big(G(n,p) \text{ не содержит упаковку размера } \frac{n}{kc}\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{1\leqslant d\leqslant \frac{n}{kc}-1} P(G(n,p) \text{ содержит упаковку размера } d$$
$$\text{и не содержит упаковок размера } d+1) =$$
$$= \sum_{1\leqslant d\leqslant \frac{n}{kc}-1} \ \sum_{\substack{\text{всем упаковкам}\\ \text{размера } d}} P(\text{рождается конкретная упаковка размера } d$$
$$\text{и не рождаются все гиперребра, не пересекающие ее}) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{1\leqslant d\leqslant \frac{n}{kc}-1} \frac{n!}{(k!)^d\ (n-kd)!\,(d)!}\left(\frac{D}{C_{n-1}^{k-1}}\right)^d\left(1-\frac{D}{C_{n-1}^{k-1}}\right)^{C_{n-kd}^k} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{n}{kc} \max_{1\leqslant d\leqslant \frac{n}{kc}-1} \frac{n!}{(k!)^d\ (n-kd)!\ (d)!}\left(\frac{D}{C_{n-1}^{k-1}}\right)^d\left(1-\frac{D}{C_{n-1}^{k-1}}\right)^{C_{n-kd}^k}$$

Максимум слагаемых в этой сумме получается при $n\to\infty$ при $d=\frac{n}{kc}$, так как (произведя вычисления, аналогичные проведенным в Лемме 1) $\frac{n!}{(k!)^d\ (n-kd)!\ (d)!}\left(\frac{D}{C_{n-1}^{k-1}}\right)^d \sim \left(\frac{D}{e^k}\right)^d$. Поскольку по условию пункта 2) $D \gtrsim e^k$, то этот максимум достигается при максимальном $d=\frac{n}{kc}$. Максимум $\left(1-\frac{D}{C_{n-1}^{k-1}}\right)^{C_{n-kd}^k}$ также достигается при $d=\frac{n}{kc}$. Поэтому

$$P\Big(G(n,p) \text{ не содержит упаковку размера } \frac{n}{kc}\Big) \lesssim$$
$$\lesssim \left(\frac{D}{e^k}\right)^d\ e^{-\ C_{n(1-\frac{1}{c})}^k\ \frac{D}{C_{n-1}^{k-1}}} \sim \left(\frac{D}{e^k}\right)^d\ e^{-\frac{nD}{k}(1-\frac{1}{c})^k}$$

(здесь использовали Предложение 1)

Поскольку $D \succeq e^k$, то $P\big(G(n,p)$ не содержит упаковку размера $\frac{n}{kc}\big) \to 0$, $n\to\infty$. Что и требовалось доказать.

Следствие 2. *Пусть в условиях нашей модели случайного гиперграфа $G(n,p)$ (k — число вершин на гиперребре — растущая функция от n), где $p = \frac{D}{C_{n-1}^{k-1}}$ и строго возрастающая по n функция $D = o(C_{n-1}^{k-1})$, $k = o(n)$, $n \to \infty$.*

Если для некоторой константы $c > 1$

$$\frac{2\ e^{\frac{n}{kc}}\sqrt{ck}\ (cD)^{\frac{n}{kc}}\ e^{\frac{k}{c}}\left(\frac{c}{c-1}\right)^{n(1-\frac{1}{c})}}{e^{\frac{n}{c}}} \to 0, \quad n \to \infty,$$

то $P\left(\chi(G(n,p)) \succeq cD\right) \to 1,\ \ n \to \infty$.

Доказательство. Из Теоремы 5 следует, что в этих условиях нельзя выделить упаковку размера $> \frac{n}{kc}$. Отсюда следует, что $\chi(G) > cD$ асимптотически почти наверное, поскольку необходимо покрыть с помощью упаковок $\frac{nD}{k}(1-o(1))$ гиперребер гиперграфа $G(n,p)$ (именно столько гиперребер рождается асимптотически с вероятностью 1 (что следует из неравенства Чебышева (см. [3]))). Для этого нам потребуется $\succeq cD$ упаковок. Что и требовалось доказать.

Утверждение 6. *Пусть в условиях нашей модели случайного гиперграфа $G(n,p)$ (k — число вершин на гиперребре — растущая функция от n), где $p = \frac{D}{C_{n-1}^{k-1}}$ и функция $D = o(C_{n-1}^{k-1})$, $n \to \infty$: $D \succeq e^k$. $c > 1$ — любая постоянная. Тогда $P\left(\text{можно выделить } \frac{D}{k\left(\frac{c}{c-1}\right)^k \ln\frac{D}{e^k}} \text{ упаковок размера } \frac{n}{kc}\right) \to 1$, $n \to \infty$.*

Доказательство.

$$P\left(\text{можно выделить } \frac{D}{k\left(\frac{c}{c-1}\right)^k \ln\frac{D}{e^k}} \text{ упаковок размера } \frac{n}{kc}\right) =$$

$$= 1 - P\left(\text{ нельзя выделить } \frac{D}{k\left(\frac{c}{c-1}\right)^k \ln\frac{D}{e^k}} \text{ упаковок размера } \frac{n}{kc}\right)$$

поэтому оценим

$$P\left(\text{нельзя выделить } \frac{D}{k\left(\frac{c}{c-1}\right)^k \ln\frac{D}{e^k}} \text{ упаковок размера } \frac{n}{kc}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant d\leqslant \frac{D}{k\left(\frac{c}{c-1}\right)^k \ln\frac{D}{e^k}}} P(G(n,p) \text{ содержит } d \text{ упаковок размера } \frac{n}{kc}$$

$$\text{и не содержит } d+1 \text{ упаковку размера } \frac{n}{kc}) =$$

$$= \sum_{1\leqslant d\leqslant \frac{D}{k\left(\frac{c}{c-1}\right)^k \ln\frac{D}{e^k}}} \sum_{\substack{(\text{всем наборам из } d\\ \text{упаковок размера } \frac{n}{kc})}} P(\text{рождается конкретный}$$

$$\text{набор } d \text{ упаковок размера } \frac{n}{kc} \text{ и не рождаются все гиперребра,}$$

$$\text{пересекающие гиперребра последней набранной упаковки}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant d\leqslant \frac{D}{k\left(\frac{c}{c-1}\right)^k \ln\frac{D}{e^k}}} \frac{n}{kc}\left[\frac{n!}{\left(\frac{n}{kc}\right)!\,(k!)^{\frac{n}{kc}}\ \left(n(1-\frac{1}{c})\right)!}\right]^d \left(1-\frac{D}{C_{n-1}^{k-1}}\right)^{C^k_{n(1-\frac{1}{c})}} \lesssim$$

$$\lesssim \frac{n}{kc} \max_{1\leqslant d\leqslant \frac{D}{k\left(\frac{c}{c-1}\right)^k \ln\frac{D}{e^k}}} \left(\frac{ecD}{e^k}\right)^{\frac{nd}{kc}} \left(\frac{c}{c-1}\right)^{nd(1-\frac{1}{c})} \frac{1}{e^{\frac{nD}{k}(1-\frac{1}{c})^k}}$$

Поскольку $D \succeq e^k$ и $d \lesssim \frac{D}{k\left(\frac{c}{c-1}\right)^k \ln\frac{D}{e^k}}$, то

$$P\left(\text{нельзя выделить } \frac{D}{k\left(\frac{c}{c-1}\right)^k \ln\frac{D}{e^k}} \text{ упаковок размера } \frac{n}{kc}\right) \to 0,\ n \to \infty.$$

Что и требовалось доказать.

Автор хотел бы выразить особую благодарность доценту Ирматову А. А. за внимание, проявленное к работе, и оказанную помощь.

Список литературы

[1] Pippenger-Spencer. Asymptotic behaviour of the chromatic Index for Hypergraphs // Journal of combinatorial theory. Series A. 51. 24–42. 1989.

[2] Будников Ю. А. О мощности ребер гиперграфа // Материалы IX Международной конференции «Интеллектуальные системы и компьютерные науки». 2006. С. 70–72.

[3] Spencer. Real time asymptotic packing // The electronic Journal of combinatorics. 4. No. 2. 1997.

[4] Vu Van H. New bounds on nearly perfect matchings in hypergraphs: higher codegrees do help.

[5] Wormald. Models of random regular graphs.

[6] Kim Jeong Han. Perfect matchings in random uniform hypergraphs.

[7] Kim Jeong Han, Alon Noga. A note on the degree, size and chromatic index of uniform hypergraph.

[8] Krivelevich, Sudakov. Approximate coloring of uniform hypergraphs.

[9] Kim Jeong Han, Alon Noga, Spencer Joel. Nearly perfect matching in regular simple hypergraphs // Israel J. Math. 100. 171–187. 1997.

[10] Finite projective planes from axioms. http://PlanetMaths.org.