Анализ и синтез автоматов по их поведению*

В. Б. Кудрявцев, И. С. Грунский, В. А. Козловский

Введение. Задачи, рассматриваемые в обзоре

Обзор содержит результаты, относящиеся к поведенческой и абстрактной теории конечных автоматов. Конечные автоматы и связанные с ними конструкции относятся к важнейшим понятиям дискретной математики и математической кибернетики. Теория автоматов имеет многочисленные применения в программировании, технической кибернетике, теории динамических систем и т. п. Классическими задачами этой теории являются прямые задачи: анализа процессов преобразования информации, осуществляемых автоматами, и свойств автоматов, и обратные задачи: синтеза автоматов с заданными свойствами и идентификации (восстановления, распознавания, расшифровки, контроля и диагностики) автомата путем эксперимента с ним.

Задача синтеза состоит в построении автомата по заданной его спецификации — заданию на необходимое, возможное и запрещенное поведение. Задача идентификации — в построении автомата, проводя эксперименты с заданным «черным ящиком» — реализацией этого автомата. В процессе эксперимента возникает фрагмент поведения автомата. Поэтому имеется единая исходная основа — фрагмент поведения — для решения задач анализа свойств автомата по его поведению и синтеза автомата, удовлетворяющего заданному поведению с

*Работа поддерживалась грантом РФФИ № 06-01-00240.

некоторой точностью. Эти задачи и рассматриваются в работе. Описание поведения автомата задается дескриптором того или иного вида, позволяющим описать поведение автомата с заданной степенью точности.

В последние десятилетия активно развиваются два научных направления. Одно из них — формальные методы синтеза программно-аппаратных вычислительных систем. Важную роль при этом играют средства спецификации, и развитию этих средств уделяется большое внимание. Растет число языков спецификации, разрабатываются средства поддержки разработки спецификаций и методики их использования.

Второе направление — теория экспериментов с автоматами. Экспериментом с автоматом называется процесс подачи на автомат последовательности входных сигналов, наблюдение соответствующего поведения автомата и вывода заключений о функционировании и свойствах автомата, основанных на этих наблюдениях и априорной информации об автомате. Основная задача теории экспериментов состоит в разработке эффективных экспериментов, позволяющих получить (распознать) определенные сведения о строении автомата, его функциях, о характеристиках процесса преобразования информации, осуществляемого этим автоматом. При этом возникает большой круг задач, связанных с классификацией экспериментов, с вопросами разрешимости задач распознавания тех или иных свойств автомата определенными видами экспериментов, с оценками сложности минимальных экспериментов, достаточных для решения тех или иных задач распознавания, а также с оценками сложности построения этих экспериментов. Теория экспериментов интенсивно разрабатывается, в ней получен ряд важных и принципиальных результатов [2–8]. Она имеет широкий круг применений и оказывает значительное влияние на развитие ряда математических и технических дисциплин (технической диагностики, теории динамических систем, теории формальных языков и грамматик, теоретического программирования и др.)

Спецификация автомата и фрагменты поведения автомата являются примерами дескриптора автомата. При исследовании точности описания автомата фрагментами важную роль играют так называемые идентификаторы свойств автомата (состояний, входов, выходов) [6] — фрагменты, позволяющие однозначно идентифицировать эти свойства. Идентификаторы дают еще один пример дескриптора.

При решении задач синтеза и идентификации возникает необходимость описывать потенциально бесконечные классы автоматов финитными средствами. Одним из основных таких средств являются недетерминированные автоматы — еще один пример дескриптора.

Таким образом, при исследовании задач синтеза/идентификации автоматов возник и интенсивно используется ряд частных видов дескрипторов автомата, и эти дескрипторы изучаются своими особыми методами. В связи с этим возникает необходимость разработки теоретического осмысления и обобщения этих частных случаев с целью создания общих методов изучения, создания и использования дескрипторов автомата при решении задач синтеза и идентификации автомата.

Основными проблемами дескрипции автоматов являются анализ дескрипторов данного автомата, синтез автомата по заданным дескрипторам, представление автомата дескрипторами с заданной степенью точности.

Основное внимание в работе уделяется исследованию последней из них. В качестве основного модельного дескриптора выступают фрагменты автомата. Это объясняется следующими соображениями.

Проблематика восстановления автомата по заданному фрагменту возникла в теории экспериментов и технической диагностике, когда фрагмент это тест и реакция на него, полученная в эксперименте, а также при синтезе, когда фрагмент это задание на функционирование синтезируемого автомата. Эта проблематика состоит в анализе точности описания автомата фрагментами, априорно заданными и/или полученными в эксперименте; создании методов построения фрагментов, представляющих автомат с заданной степенью точности; создании методов синтеза автомата по фрагментам. Указанная проблематика развивается в рамках четырех направлений: синтеза управляющих и вычислительных систем, технической диагностики таких систем, синтаксического распознавания образов, теории экспериментов с автоматами. Развитие этих направлений происходит достаточно независимо друг от друга под определяющим влиянием теории экспериментов.

Основание теории экспериментов с автоматами положено Муром, проводившим исследования в двух взаимосвязанных аспектах: неотличимость автоматов никакими кратными и никакими простыми (однократными) экспериментами; распознавание автоматов и их состояний с помощью таких экспериментов. Становление теории экспериментов тесно связано с работами А. М. Богомолова и его учеников, М. П. Василевского, А. Гилла, В. Н. Носкова, Н. В. Евтушенко, А. Ф. Петренко, И. К. Рысцова, В. А. Твердохлебова, С. В. Яблонского, Ф. Хенни и его многочисленных последователей, П. Штарке и многих других. Эти исследования можно разделить на три этапа: комбинаторный, сложностной и характеризационный.

Комбинаторный этап касался построения средств анализа автоматов и алгоритмов проведения экспериментов с ними, исходя из комбинаторно-мощностных соображений. Методы и результаты этого этапа достаточно полно представлены в известной книге А. Гилла [12].

На сложностном этапе основное внимание уделяется построению оптимальных по сложности алгоритмов и нахождению сложности проведения экспериментов, а также оптимальных по сложности методов анализа поведения автомата. Это потребовало анализа структуры экспериментов. Этот этап инициирован работами Ф. Хенни и М. П. Василевского, которые проводили построение контрольных экспериментов путем специального помещения во входные последовательности специальных подпоследовательностей (диагностических, установочных, локализующих, характеристичеких и т. п.), по реакции на которые исследуемого автомата можно идентифицировать его внутренние состояния. На этом этапе исследовались различные виды таких последовательностей и способы их размещения в эксперименте. Методы и результаты второго этапа достаточно полно представлены в книге В. Б. Кудрявцева, С. В. Алешина, А. С. Подколзина [7]. Один из авторов настоящего обзора (И. С. Грунский), по-видимому, первым назвал эти последовательности и реакции на них идентификаторами состояний, начал их систематическое изучение [4] и обратил внимание на существование идентификаторов других ненаблюдаемых компонент поведения (например, входных последовательностей [6]). На втором этапе получено большое количество частных способов построения контрольных и распознающих экспериментов для случаев, когда они заведомо существуют. Неисследованными остались условия существования и структура таких экспериментов в общем случае. Очень трудным оказался вопрос: что должно присутствовать в этих экспериментах, а что является издержками алгоритмов их построения, то есть вопрос характеризации вышеуказанных экспериментов. Появление первых характеризационных теорем [47] можно отнести уже к становлению третьего, характеризационного, этапа.

Как упоминалось выше, в последнее время возникло важное и интенсивно развивающееся направление «Формальные методы синтеза компьютерных систем», во многом объединяющее вышеуказанные четыре направления. Для него основными задачами являются задачи контроля таких систем на всех этапах их жизни: проектирования (model checking), изготовления и эксплуатации (контроль и диагностика). Появилось значительное число средств описания таких систем на различных уровнях (эксперименты, анкетные языки, k-наборы, частичные и недетерминированные автоматы, временные логики и т. п.) Эти средства фактически описывают фрагменты поведения синтезируемого автомата, зачастую порождаемые неклассическим способом фиксации его поведения. При этом каждый вид таких средств изучается своими специальными методами в отрыве от остальных. Такое разнообразие требует создания общего понятия фрагмента, исследования условий существования, структуры, сложности фрагментов, позволяющих описывать, восстанавливать, идентифицировать автомат с заданной точностью, а также разработки методов создания таких фрагментов. Исследование этого комплекса задач составляет, на наш взгляд, содержание третьего этапа — характеризационного. Актуальность исследований в этом направлении, в силу вышесказанного, все возрастает. Этим исследованиям, выполненным в значительной степени авторами обзора либо под их руководством, посвящена значительная часть работы.

Базовым понятием, на которое опирается изучение вышеуказанного круга задач является предложенное понятие фрагмента, являющееся естественным обобщением большого числа известных фрагментов частного вида и обладающее их характерными свойствами. Введено отношение «фрагмент — автомат», рассмотрены свойства классов фрагментов заданного автомата. Введено понятие кофрагмента («запрещенного фрагмента») автомата, рассмотрены свойства классов автоматов, имеющих заданную пару (фрагмент — кофрагмент). Другое введенное ключевое понятие — понятие идентификатора ненаблюдаемых компонент функционирования автомата, то есть фрагмента, позволяющего однозначно определить значения этих компонент. Показано, что идентификаторы являются мощным инструментом исследования рассматриваемых в работе задач.

Далее введено общее понятие представления автомата-эталона с заданной точностью (подобием) относительно априорного класса автоматов как пары (фрагмент, кофрагмент) автомата-эталона, которая может быть парой (фрагмент, кофрагмент) автомата из априорного класса только, если он подобен эталону. Показано, что это понятие охватывает и обобщает ряд частных понятий (контрольные, распознающие эксперименты, анкетные языки, k-наборы и т. п.), известных в теории автоматов. Проведена естественная классификация представлений. Осуществлено систематическое исследование условий существования и структуры представлений.

Получены точные условия существования представлений общего вида и частных их классов в терминах взаимоотношений свойств априорного класса, класса автоматов, подобных эталону, и класса автоматов, неотличимых от автомата-эталона для соответствующего отношения неотличимости. Получены условия существования нетривиальных представлений различных классов, в том числе анкетных языков и контрольных экспериментов. Исследована структура текстуальных представлений, то есть представлений, состоящих только из фрагмента автомата и не содержащих кофрагмента. Эта структура описана в терминах наличия и расположения в представлении идентификаторов состояний эталона. Для этого введена операция замыкания фрагмента по так называемым верифицированным идентификаторам эталона и структура текстуальных представлений описана в терминах этого замыкания. Из этих результатов следует, в частности, обоснование методов построения контрольных экспериментов, предложенных Хенни, Василевским и рядом их последователей. Найдены условия, при которых фрагмент является представлением точно тогда, когда его замыкание по соответствующим идентификаторам изоморфно эталону. Тем самым выделены случаи, когда идентификаторы состояний в представлениях необходимы. Найден ряд критериев (в терминах замыканий), при которых фрагмент является представлением в случае, когда априорный класс конечен и состоит из автоматов, число состояний которых не превосходит числа состояний эталона, а сам эталон обладает дополнительными свойствами, важными в приложениях теории автоматов. Ряд этих критериев был получен с единых позиций сведением задачи анализа фрагментов с целью выявления свойства «быть представлением» к задаче анализа раскрасок некоторых графов. Приведены результаты по оценке сложности задачи распознавания представлений автоматов. Используя полученные характеризационные теоремы, доказана NP-полнота указанной задачи распознавания для ряда случаев. Кроме того, получены неулучшаемые оценки длин контрольных экспериментов, определяющие предельные нижние границы этих длин для экспериментов с любым эталоном относительно рассмотренных классов автоматов.

Как указывалось выше, в последнее время в прикладных задачах (model checking) возникает необходимость рассматривать потенциально бесконечные классы, заданные финитными дескрипторами. Рассмотрены два типа таких дескрипторов: недетерминированные автоматы и маркеры-идентификаторы состояний специального вида. Введены два вида финитно-определенных классов, соответствующие этим дескрипторам. Исследуется структура этих классов. Особое внимание уделяется свойствам контрольных и распознающих экспериментов относительно этих классов.

Предлагаемый обзор содержит ряд окончательных результатов, однако они являются лишь очередным шагом в исследовании задач анализа и синтеза автоматов по их поведению, которые постоянно наполняются новым содержанием и требуют дополнительных усилий и средств их разрешения.

1. Основные определения и базовые результаты

1.1. Автоматы: эксперименты и идентификаторы

Напомним основные понятия теории автоматов, которые можно найти, например, в [7].

Автоматом (Мили) называется система $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, где S, X, Y — алфавиты состояний, входов и выходов соответственно, а $\delta \subseteq S \times X \times S$, $\lambda \subseteq S \times X \times Y$ — функции переходов и выходов. Как обычно, $\delta(s, x)$ ($\lambda(s, x)$) обозначает множество тех элементов $s' \in S$ ($y' \in Y$), для которых $(s, x, s') \in \delta$ ($(s, x, y') \in \lambda$). Автомат называется детерминированным, если δ и λ являются (частичными) отображениями из $S \times X$ в S и Y соответственно. Автомат называется всюду определенным, если $\delta(s, x)$ и $\lambda(s, x)$ определены для всех $s \in S$ и $x \in X$. В дальнейшем, если не оговорено противное, рассматриваются автоматы, у которых области определения функций переходов и выходов совпадают. Для автомата A соответствующую область определения обозначим через $Dom\, A$, а область значений функции f через $Im\, f$.

Пусть $S' \subset S$ и $\delta(S', x) = \bigcup\limits_{s \in S'} \delta(s, x)$, $\lambda(S', x) = \bigcup\limits_{s \in S'} \lambda(s, x)$. Распространим функции автомата на множество X^* по формулам, где $\delta(s, e) = s$, $\delta(s, px) = \delta(\delta(s, p), x)$ $\lambda(s, e) = e$, $\lambda(s, e) = \lambda(s, p)$ $\lambda(\delta(s, p), x)$, где $s \in S$, $x \in X$, $p \in X^*$. Будем говорить, что вход-выходное слово $w = (p, q)$ порождается состоянием s автомата A, если $q \in \lambda(s, p)$. С каждым состоянием s ассоциируется множество λ_s всех вход-выходных слов, порождаемых этим состоянием. Если автомат A детерминированный, то λ_s является (частичным) отображением из X^* в Y^* и называется автоматным отображением. Пусть $l(w)$ — длина слова $w \in \lambda_s$, тогда $l(w) = l(p) = l(q)$. Через λ_s^i обозначим множество всех вход-выходных слов длины i, порождаемых состоянием s. Автомат A удобно задавать в виде графов переходов, вершинами которого являются состояния из S, а дугами — четверки (s, x, y, t) , где $t \in \delta(s, x)$, $y \in \lambda(s, x)$. Пара (x, y) называется отметкой дуги, s — ее началом, а t — концом. В дальнейшем иногда будем отождествлять автомат со списком всех дуг его графа. Если не оговорено противное, считаем, что автомат имеет хотя бы одну дугу. Состояние

t называется достижимым из s, если $t \in \delta(s, p)$ для некоторого $p \in X^*$. Автомат называется сильно связным, если его граф переходов сильно связен. Состояние s называется преходящим в A, если s не является концом ни одной дуги автомата A. Автомат, граф переходов которого не имеет циклов, назовем ацикличным. Если необходимо, алфавиты и функции автомата будем снабжать индексами.

Пусть $A = (S, X, Y, \delta_A, \lambda_A)$, $B = (T, X, Y, \delta_B, \lambda_B)$ — некоторые автоматы. Гомоморфизмом автомата A в автомат B называется такое отображение φ множества S во множество T, для которого если дуга (s_1, x, y, s_2) принадлежит автомату A, то дуга $(\varphi(s_1), x, y, \varphi(s_2))$ принадлежит B. Гомоморфизм φ называем моно- или эпиморфизмом, если φ — взаимно однозначное отображение или отображение на множество T соответственно. Наличие гомоморфизма обозначаем $A \leqslant B$, а мономорфизма — $A \subseteq B$. Гомоморфизм, являющийся одновременно моно- и эпиморфизмом, назовем изоморфизмом.

Гомоморфизм называется полным, если для всех дуг (t_1, x, y, t_2) автомата B, для которых $t_1 \in \varphi(S)$, найдется дуга (s_1, x, y, s_2) автомата A, для которой $\varphi(s_i) = t_1$, $i = 1, 2$. Автомат A называется подавтоматом автомата B, если существует полный мономорфизм A в B. Если φ является полным эпиморфизмом автомата A на B, то B называется гомоморфным образом A по φ, что обозначается $B = \varphi(A)$. Если φ является полным изоморфизмом автомата A на B, то они называются изоморфными. Полный изоморфизм обозначаем $A = B$. Гомоморфизм автомата в себя называем эндоморфизмом, а изоморфизм в себя — автоморфизмом.

Пусть φ — гомоморфизм автомата A в B и ϕ — гомоморфизм автомата B в автомат $C = (U, X, Y, \delta_c, \lambda_c)$. Тогда через $\phi \cdot \varphi$ обозначаем гомоморфизм автомата A в C, для которого, если дуга (s_1, x, y, s_2) принадлежит автомату A, дуга $(\phi(\varphi(s_1)), x, y, \phi(\varphi(s_2))$ принадлежит C.

Пусть $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ — некоторый автомат. В дальнейшем считаем, что множества входов и выходов автоматов конечны. Автомат, у которого конечно и множество состояний, называется конечным. Множество $U = X \times Y$ назовем внешним алфавитом автомата, оно всегда конечно. Класс всех автоматов в алфавитах X, Y обозначается через $\mathsf{N}(X, Y)$ или $\mathsf{N}(U)$ в зависимости от удобства. Через $\mathsf{D}(X, Y)$ или $\mathsf{D}(U)$ обозначается класс детерминированных автоматов в этих алфавитах. Класс всех конечных детерминированных автоматов обозначаем $\mathsf{D}_k(U)$, а его подкласс всюду определенных приведенных автоматов — $\mathsf{A}(U)$.

С автоматом A ассоциируется автомат Медведева $A_U = (S, U, \Delta_A)$, где U, S — множества его входов и состояний соответственно, а $\Delta_A \subseteq S \times U \times S$ — отношение переходов, для которого $t \in \Delta_A(s, (x, y))$, если $t \in \delta(s, x)$ и $y \in \lambda(s, x)$. У автоматов A и A_U их графы совпадают, поэтому зачастую эти автоматы будут отождествляться.

Поведением автомата обычно называется способ взаимодействия автомата с внешней средой. Известны различные уточнения поведения. В дальнейшем под поведением будут пониматься множества вход-выходных слов в алфавитах автомата, возможно, с некоторой дополнительной структурой. Основным понятием при изучении поведения автомата следует считать понятие эксперимента с автоматом. В теории автоматов под экспериментом понимается процесс подачи на исследуемый автомат входных слов, наблюдения соответствующих выходных слов — реакций этого автомата и вывода заключений об исследуемом автомате на основе априорной информации о нем и полученных вход-выходных слов. При этом функции автомата и его внутренние состояния полностью неизвестны и целью эксперимента является их распознавание. Входные слова подаются на начальные состояния автомата. Процесс экспериментирования осуществляется алгоритмом-экспериментатором.

Уточним понятия эксперимента. Автомат A называется слабо инициальным, если выделено подмножество его возможных начальных состояний, и обозначается $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, S_0)$. Если S_0 состоит из одного состояния s_0, то автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, s_0)$ называется инициальным. В случае $S_0 = S$ автомат A называется неинициальным.

Рассмотрим слабо инициальный автомат A. Множество W вход-выходных слов назовем экспериментом автомата A, если $W \subseteq \lambda_s$ для некоторого $s \in S_0$. Зафиксируем некоторый эксперимент W автомата A. Множество P всех таких входных слов p, что $(p, q) \in W$ для некоторого $q \in Y^*$ назовем тестом, порождающим эксперимент W. Множество Q всех таких выходных слов q, что для некоторого слова p из теста P, назовем наблюдением, порожденным тестом P. Эксперимент W будем понимать также как пару: тест P и наблюдение Q и будем писать $W = (P, Q)$.

Автомату A поставим в соответствие множество всех его экспериментов $Ex(A)$. Это множество частично упорядочено отношением включения $\subseteq$. Через $Ex^{\max}(A)$ обозначим множество всех максимальных (по этому отношению) экспериментов автомата A. Ясно, что экспериментами этого множества могут быть λ_s для некоторых $s \in S_0$.

Автоматы A и B назовем неотличимыми никаким экспериментом, если $Ex(A) = Ex(B)$. Если A и B всюду определены, то последнее равенство равносильно равенству $Ex^{\max}(A) = Ex^{\max}(B)$. Для всюду определенных детерминированных неинициальных автоматов эти равенства равносильны соотношению $(A, B) \in \varepsilon$.

Через $Ex(U)$ обозначим множество всех тех $W \subseteq U^*$, которые являются экспериментами некоторого детерминированного автомата с внешним алфавитом $U = X \times Y$.

Автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, s_0)$ называется инициально связным, если для любого его состояния s существует слово $p \in X^*$, для которого $s \in \delta(s_0, p)$. Класс всех конечных детерминированных инициально-связных приведенных инициальных автоматов обозначим через $\mathsf{A}_I(U)$.

Слабо инициальному автомату $A \in \mathsf{A}(U)$ поставим в соответствие $L_A = Ex^{\max}(A) = \{\lambda_s\}_{s \in S_0}$. Пусть $L_A^k = \{\lambda_s^k\}_{s \in S_0}$.

Распространим понятие гомоморфизма на слабоинициальные автоматы: пусть $A = (S, X, Y, \delta_A, \lambda_A, s_0)$, $B = (T, X, Y, \delta_B, \lambda_B, T_0)$ — детерминированные слабо инициальные автоматы. Отображение $\varphi : S \to T$ назовем гомоморфизмом автомата A в B, если $\varphi(s) \in T_0$ для всех $s \in S_0$ и $\varphi(\delta_A(s, x)) = \delta_B(\varphi(s), x)$, $\lambda_A(s, x) = \lambda_B(\varphi(s), x)$ для всех $s \in S$, $x \in X$. Существование гомоморфизма обозначаем $A \leqslant B$, а изоморфизма — $A = B$. Ясно, что для слабо инициальных автоматов $A, B \in \mathsf{A}(U)$ равенства $A = B$ и $L_A = L_B$ равносильны.

Проблемой анализа автомата A будем называть проблему исследования свойств $Ex(A)$ или L_A, если $A \in \mathsf{A}(U)$. Проблемой синтеза автомата будем называть проблему построения автомата (чаще всего из класса $\mathsf{A}(U)$), для которого $Ex(A)$ равно заданному множеству экспериментов $E \subseteq Ex(U)$.

При постановке и исследовании проблемы синтеза обычно различаются две ситуации: а) множество E задается на достаточно формализованном языке, б) множество E может быть получено в результате экспериментирования с заданным «черным ящиком» — исследуемым автоматом. Последняя ситуация известна как «расшифровка» автоматов. Ей уделяется основное внимание в данной работе.

Алгоритмы-экспериментаторы расшифровки делятся на два класса: распознающие и контрольные. Алгоритм-экспериментатор (или как обычно говорят эксперимент) называется распознающим или идентифицирующим относительно класса $F \subseteq \mathsf{A}(U)$, если в результате проведения процесса экспериментирования с «черным ящиком» из F этот алгоритм полностью определяет его множество экспериментов, то есть распознает его с точностью до изоморфизма.

Такой алгоритм называется контрольным относительно класса $F \subseteq \mathsf{A}(U)$ и автомата-эталона $A \in \mathsf{A}(U)$, если в результате экспериментирования с «черным ящиком» из F этот алгоритм определяет, изоморфны A и «черный ящик» или нет.

1.1.1. Контрольные эксперименты

Рассмотрим одно из уточнений понятия «контрольный эксперимент». Следуя вышесказанному, контрольным экспериментом относительно $F \subseteq \mathsf{A}_I(U)$ и $A \in \mathsf{A}_I(U)$, назовем такое множество W вход-выходных слов, для которого $W \subseteq L_A = \{\lambda_{S_0}\}$, и если $W \subseteq L_B$, где $B \in F$, то $A = B$. Если W контрольный эксперимент для A и F, то контрольный алгоритм-экспериментатор состоит в подаче на «черный ящик» входных слов $p \in P$, где P — тест, порождающий W, в наблюдении реакции q «черного ящика» на p и проверке: (p, q) принадлежит W или нет.

Для исследования свойств экспериментов автомата введем на классе $\mathsf{A}_I(U)$ метрику.

Функция $\rho : \mathsf{A}_I(U) \times \mathsf{A}_I(U) \to \mathbb{R}^+$ со следующим набором аксиом:

1) $\rho(A, B) = 0$ точно тогда, когда $A = B$;
2) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$;
3) $\rho(A, C) \leqslant \rho(A, B) + \rho(B, C)$,

где $A, B, C \in \mathsf{A}_I(U)$, называется метрикой, а пара $(\mathsf{A}_I(U), \rho)$ — метрическим пространством. Метрику ρ назовем вычислимой, если существует алгоритм вычисления расстояния $\rho(A, B)$ для произвольных $A, B \in \mathsf{A}_I(U)$.

Метрику в классе автоматов можно вводить различными способами, но особенно отметим метрику β, для которой положим $\beta(A, B) = 0$, если $A = B$, и $\rho(A, B) = \frac{1}{k}$, если $L_A^k \neq L_B^k$ и $L_A^{k-1} = L_B^{k-1}$. Метрику β назовем бэровской.

Бэровская метрика β является вычислимой, поскольку если $A \neq B$, то $L_A^k \neq L_B^k$ для всех $k \geqslant n_A + n_B - 1$, где $n_A = |S|$, и, следовательно, $\rho(A, B) \geqslant \frac{1}{k}$ для таких k.

Окрестностью с центром $A \in \mathsf{A}_I(U)$ и радиусом $r \in \mathbb{R}^+$ назовем множество автоматов $O_r(A) = \{B \,|\, B \in \mathsf{A}_I(U), \;\; \rho(A, B) < r\}$. Автомат A является предельным автоматом класса $F \subseteq \mathsf{A}_I(U)$, если для любого $r > 0$ класс $O_r(A) \cap (F - \{A\})$ не пуст. Через $\lim F$ обозначим множество всех предельных автоматов класса F.

Для бэровской метрики β и произвольных $F \subseteq \mathsf{A}_I(U)$, $A \in \mathsf{A}_I(U)$ справедлив следующий критерий существования контрольного эксперимента [17].

Теорема 1.1. *Равносильны утверждения:*

1) *Существует контрольный эксперимент относительно F и A;*
2) *Множество L_A^k является контрольным экспериментом относительно A и F для некоторого k;*
3) *$O_{\frac{1}{k}}(A) \cap F \subseteq \{A\}$ для некоторого k;*
4) *$O_{\frac{1}{k}}(A) \cap F$ — конечное множество для некоторого k;*
5) *$A \notin \lim F$.*

Этот критерий показывает, что в бэровской метрике β процесс вывода заключений в процессе экспериментирования сводится к проверке условия 3.

Если класс F конечен, то существует верхняя оценка t числа состояний автоматов из $F \cup \{A\}$, и поэтому L_A^{2t} является контрольным экспериментом. Для произвольного бесконечного класса F критерий неконструктивен, однако далее будут рассмотрены такие бесконечные классы, для которых этот критерий конструктивен.

1.1.2. Фрагменты автомата

Задать автомат — значит задать его алфавиты и функции. Функции автомата удобно задавать графом, который, в свою очередь, задается списком дуг. Дуга (s, x, y, t) несет следующую локальную информацию об автомате: если известно, что он находится в состоянии s и известен входной сигнал x, то автомат перейдет в состояние t и выдаст на выходе сигнал y. Поскольку имена начал и концов дуг известны точно, то список дуг однозначно превращается в граф автомата отождествлением вершин с одинаковыми именами.

Если автомат известен частично, то будем считать, что эта частичная информация задана графом, в котором частичность информации заключается в том, что:

1) Некоторые дуги автомата неизвестны полностью;
2) Некоторые дуги автомата заданы с неопределенностью: отметка $u = (x, y)$ неизвестна и вместо нее известно некоторое подмножество U' внешнего алфавита U, причем $u \in U'$, а вместо s, t известны S'', $S'' \subseteq S$, для которых $s \in S'$, $t \in S''$.

Таким образом, с неопределенностью известны как вход-выходные отметки на дугах, так и связи между дугами. Основываясь на этих соображениях, введем основное понятие — понятие фрагмента автомата.

Пусть $v_i = U_{i1}U_{i2}\ldots U_{ik}$ суть слова в алфавите 2^U, $i = 1, 2$, то есть $U_{ij} \subseteq U$ для всех i, j. Если $U_{1j} \subseteq U_{2j}$ для всех j, $1 \leqslant j \leqslant k$, то первое слово v_1 назовем уточнением второго слова v_2, а второе — расширением первого, что обозначим включением $v_1 \subseteq v_2$. Если слово v_i понимать как терм в алгебре Клини, определяющий язык в алфавите U, то есть считать, что $v_i = \{u_1 \ldots u_k \,|\, u_j \in U_{ik}\}$, то последнее включение совпадает с обычным теоретико-множественным включением. Распространим введенное включение на языки в алфавите 2^U. Пусть V_i — множество слов в этом алфавите, $i = 1, 2$. Если для каждого $v_1 \in V_1$ найдется его расширение $v_2 \in V_2$, то V_1 назовем уточнением V_2, а V_2 — расширением, что обозначим $V_1 \subseteq V_2$. Если V_1 понимать как объединение языков $v \in V_i$, то последнее включение не противоречит теоретико-множественному включению.

Пусть $R_i = (T_i, 2^U, \Delta_i)$ — автоматы Медведева, $i = 1, 2$, из класса $\mathsf{N}(2^U)$. Пусть $\varphi : T_1 \to T_2$ — отображение, для которого, если (t_1, U_1, t_2) дуга автомата R_1, то найдется такое уточнение $U_2 \subseteq U_1$, что $(\varphi(t_1), U_2, \varphi(t_2))$ — дуга автомата R_2. В отличие от ранее введенного гомоморфизма, отображение φ будем называть слабым гомоморфизмом. Факт существования слабого гомоморфизма обозначим $R_1 \infty R_2$.

Обозначим $\mathsf{D}_k(X, Y)$ класс всех конечных, детерминированных, возможно частичных автоматов, у которых области определения функций совпадают. Пусть A — некоторый автомат из этого класса. Автомат $R \in \mathsf{N}(2^U)$ назовем фрагментом автомата A, если $R \infty A_u$. Отождествляя A_u и A, последнее включение также будем писать $R \infty A$. Фрагмент R назовем непосредственным, если отметка каждой его дуги состоит из одной буквы внешнего алфавита U, и R является детерминированным автоматом, то есть если $R \in \mathsf{D}(U)$. В противном случае фрагмент называется косвенным.

Рассмотрим примеры фрагментов автомата, проясняющие смысл этого понятия. Рассмотрим вначале непосредственные фрагменты. Пусть автомат A порождает вход-выходное слово w. Тогда строчный автомат $R(w)$ является конечным непосредственным фрагментом автомата A, полученным при наблюдении входов и выходов автомата. Ясно, что в общем случае существует несколько гомоморфизмов фрагмента $R(w)$ в автомат A. Для любого множества W вход-выходных слов, порождаемых этим автоматом, автомат $R(W)$ является его фрагментом. Если $W \in Ex(A)$, то дерево $D(W)$ тоже является фрагментом автомата A. Поскольку переход от $W \in Ex(A)$, к $D(W)$ взаимно однозначен, то используя вольность речи, можно считать, что все эксперименты из $Ex(A)$, и их прямые суммы являются фрагментами автомата. Ясно, что $D(\lambda_s)$ — фрагмент автомата A для всех $s \in S$.

Кроме этого, сам автомат и все его подавтоматы являются его непосредственными фрагментами.

Рассмотрим некоторые косвенные фрагменты автомата A. Если автомат порождает на выходе слово $q = y_1 \ldots y_k$, то q можно понимать как слово $v = (X \times y_1) \ldots (X \times y_k)$ в алфавите 2^U, и строчный автомат $R(v)$ является конечным косвенным фрагментом, полученным при наблюдении только выходов автомата. Если A породил вход-выходные слова w_1, w_2 и известно, что от порождения слова w_1 до начала порождения слова w_2 прошло k тактов работы автомата, то получаем слово $v = w_1 U^k w_2$ в алфавите 2^U, и строчный автомат $R(v)$ является косвенным фрагментом автомата. Из этих примеров ясно, что аналогично строятся косвенные фрагменты, если в процессе экспериментирования с автоматом A в течение некоторого конечного интервала работы автомата не наблюдаются те или иные компоненты входного и выходного векторов (в случае, когда автомат имеет структурные входы и выходы).

Из приведенных рассуждений следует, что фрагменты являются гибким средством описания функционирования автомата и охватывают такие важные частные случаи как эксперименты, ограниченно-детерминированные функции, наблюдения и т. п.

Пусть $\mathsf{F}(A)$ — класс всех фрагментов автомата $A \in \mathsf{D}_k(U)$. В силу сказанного выше, всякий эксперимент входит в этот класс. Если $R \in \mathsf{N}(U)$ конечен, то существует тривиальный алгоритм проверки того, является ли R фрагментом автомата A. Поэтому подкласс $\mathsf{F}_k(A)$ конечных фрагментов автомата A всегда бесконечен и рекурсивен. Пусть $\mathsf{F}(U) = \bigcup \mathsf{F}(A)$, где объединение выполняется по всем $A \in \mathsf{D}_k(U)$, есть класс всех фрагментов в алфавите 2^U. Легко видеть, что этот класс является собственным подклассом класса $\mathsf{N}(2^U)$, и подкласс $\mathsf{F}_k(U)$ конечных фрагментов бесконечен, рекурсивен и включает в себя класс автоматов $\mathsf{D}_k(U)$.

В результате определены два класса объектов: класс автоматов $\mathsf{D}(U)$ и класс фрагментов $\mathsf{F}(U)$, а также отношение φ дескрипции автомат — фрагмент, то есть $(A, R) \in \varphi$, если $A \in \mathsf{D}_k(U)$ и $R \infty A$. В монографии [22] автомату $A \in \mathsf{A}(U)$ ставится в соответствие класс его фрагментов $\mathsf{F}(A)$, а фрагменту R — класс $\mathsf{A}(R) \subseteq \mathsf{A}(U)$ всех конечных, детерминированных, всюду определенных, приведенных автоматов A, для которых $R \infty A$. При этом говорят, что R описывает класс $\mathsf{A}(R)$, или, что R определяет A с точностью $\mathsf{A}(R)$. В рамках классов $\mathsf{F}(A)$ и $\mathsf{A}(R)$ в книгах [6, 22] систематически исследуются свойства фрагментов различных видов.

1.1.3. Идентификаторы состояний автомата

Пусть A некоторый конечный детерминированный автомат с совпадающими областями определения функций переходов и выходов, то есть $A \in \mathsf{D}_k(U)$. Этот автомат далее будем называть эталоном. Рассмотрим такие фрагменты эталона, которые позволяют однозначно определять его внутренние состояния.

Пусть R — некоторый фрагмент эталона и t — некоторое произвольное зафиксированное состояние фрагмента. Фрагмент с зафиксированным состоянием обозначим R_t. Фрагмент R_t назовем идентификатором состояния s эталона, если для любого слабого гомоморфизма φ фрагмента в эталон выполняется равенство $\varphi(t) = s$. Этот фрагмент назовем идентификатором состояний эталона, если R_t является идентификатором некоторого состояния s эталона A.

С введенными понятиями фрагмента автомата, отношения дескрипции «фрагмент — автомат», понятием идентификатора состояний автомата связан целый ряд хорошо известных и старейших задач теории автоматов, которые решались для конкретных видов автоматов и их фрагментов. К их числу относятся такие задачи как задачи определения внутреннего состояния автомата путем эксперимента с ним [12, 16], задачи синтеза автомата по заданному фрагменту (эксперименту [17, 18], анкетным языкам [20, 21], задачи сравнения поведения автоматов (эквивалентность, неотличимость простым или кратным экспериментом), задачи контроля и распознавания автоматов). Более подробно эти связи рассмотрены в монографиях [6, 11, 22]. В них же показано, что идентификаторы являются мощным и адекватным средством исследования свойств фрагментов автомата и, особенно, его представлений.

1.1.4. Маркеры состояний автомата

Пусть A — некоторый автомат из $\mathsf{A}(U)$, а M_A — множество всех тех вход-выходных сигналов (x, y), для которых существует такое единственное состояние s этого автомата, что $(x, y) \in \lambda_s$. Другими словами, M_A — множество всех начальных идентификаторов состояний длины 1 автомата A. Определим отношение дескрипции правилом: $\varphi \in \mathsf{A}(U) \times 2^U$, $\varphi(A) = M_A$. Далее будет рассмотрена следующая задача. Произвольно зафиксируем некоторое множество $M \subseteq U$. Элементы этого множества назовем маркерами. Рассмотрим класс $\mathsf{A}(U, M)$ всех тех автоматов A, для которых $M_A \supseteq M \cap \Phi_A$. Состояние автомата $A \in \mathsf{A}(U, M)$, порождающее некоторый маркер, назовем маркированным (отмеченным). В дальнейшем исследуется структура класса $\mathsf{A}(U, M)$, его интересных подклассов и его дополнения до $\mathsf{A}(U)$. Рассматриваются также кратные контрольные и распознающие эксперименты для этого класса и его подклассов.

1.1.5. Характеризаторы классов автоматов, неотличимых экспериментами

Пусть $A = (S, X, Y, \delta_A, \lambda_A)$ — произвольный детерминированный конечный всюду определенный автомат. Пусть P — некоторое множество входных слов, называемое далее тестом. Каждое состояние s автомата и этот тест порождают эксперимент $W_s = \{(p, \lambda_A(s, p))\}$, $p \in P$. Множество всех экспериментов автомата A, порожденных этим тестом, обозначим через $Ex_p(A)$, то есть $Ex_p(A) = \{W_s\}_{s \in S}$.

Пусть автомат $B = (T, X, Y, \delta_B, \lambda_B)$ тоже конечен, детерминирован и всюду определен. Будем говорить, что A неотличим от B экспериментами, порожденными тестом P, если $Ex_p(A) \subseteq Ex_p(B)$. Отношение неотличимости такими экспериментами обозначим γ_P. Оно рефлексивно, транзитивно, но в общем случае не антисимметрично и является предпорядком. Этот предпорядок порождает эквивалентность $\rho_P = \gamma_P \cap \gamma_P^{-1}$, то есть $(A, B) \in \rho_P$, если $Ex_P(A) = Ex_P(B)$. Эту эквивалентность назовем P-неотличимостью, а автоматы P-неотличимыми.

Пусть $\mathsf{P} \subseteq 2^{x^*}$ — некоторое множество тестов. Оно порождает предпорядок $\gamma_{\mathsf{P}} = \bigcap\limits_{P \in \mathsf{P}} \gamma_P$ и эквивалентность $\rho_{\mathsf{P}} = \bigcap\limits_{P \in \mathsf{P}} \rho_P$.

Легко видеть, что класс $\varepsilon(A)$ конечных, детерминированных всюду определенных автоматов, неотличимых от A никаким экспериментом, бесконечен. Поскольку $\varepsilon \subseteq \rho_{\mathsf{P}}$, для любых P, то класс $\rho_{\mathsf{P}}(A)$ тоже бесконечен. Для того, чтобы сделать более прозрачной структуру этого класса, в дальнейшем факторизуем его по ε, то есть будем считать, что ρ_{P} задано на классе приведенных автоматов.

В книге [6] осуществляется общий подход к изучению свойств класса $\rho_{\mathsf{P}}(A)$ автоматов P-неотличимых от A для различных видов тестов P, то есть автоматов, неотличимых экспериментами различного вида. Рассматривались отношения неотличимости автоматов экспериментами ограниченных высоты и кратности, экспериментами ограниченной высоты, простыми экспериментами и т. п.

При рассмотрении неотличимых автоматов основное внимание уделяется следующим задачам. Пусть α — некоторое отношение неотличимости автоматов. Задачей характеризации отношения α назовем задачу нахождения конструктивных условий, при которых автоматы находятся в этом отношении. Эти условия могут быть выражены в различных терминах. Наш подход к характеризации заключается в следующем: изучение исходного отношения α заменяется изучением другого, в некотором смысле «удобного», хорошо известного характеристического отношения β. Для этого автомату ставится в соответствие χ (зависящее от α и β) — некоторый автомат-характеризатор $\chi(A)$ так, чтобы $(A, B) \in \alpha$ выполнялось тогда и только тогда, когда $(\chi(A), \chi(B)) \in \beta$. В связи с этим возникают задача анализа — перехода от A к характеризатору, и обратная ей задача синтеза — построения A по заданному характеризатору. Вторая цель, для которой строится характеризатор — исследование структуры класса $\alpha(A)$. Для вышеуказанных отношений удалось построить характеризаторы и с их помощью найти критерии конечности этих классов, выделить общую часть всех автоматов из класса. При этом важную роль играют соответствующие идентификаторы.

Определим характеризатор для отношения неотличимости автоматов экспериментами кратности не большей r и высоты не большей i. Пусть $A, B \in \mathsf{A}(U)$. Пусть $Ex_{ri}(A) = \{w \mid w \in Ex(A),\ r(w) \leqslant r, h(w) \leqslant i\}$. Тогда полагаем: $(A, B) \in \rho_{ri}$, если $Ex_{ri}(A) = Ex_{ri}(B)$. Введенное отношение назовем отношением (r, i)-неотличимости.

Напомним, что $v \leqslant w$ означает, что слово v является начальным отрезком слова w. Пусть $W \subseteq U^*$, тогда $W^{\max}$ обозначает множество всех максимальных экспериментов (по $\leqslant$) из множества W. Пусть $E = \{W_1, \ldots, W_k\}$ — некоторое множество экспериментов. Эксперимент W_j назовем максимальным в E, если $W_j = W_j^{\max}$ и $W_j \leqslant W_i$ влечет $W_i \subseteq W_j$.

Рассмотрим $Ex_{ri}(A)$. Это множество конечно, поэтому для каждого $W \in Ex_{ri}(A)$ найдется максимальный эксперимент из этого множества. Подмножество всех максимальных экспериментов обозначим Φ_A^{ri}. Каждый такой максимальный эксперимент W состоит из попарно несравнимых по $\leqslant$ слов длины i и кратности

$$r(W) = \begin{cases} r, & \text{при } m^i \geqslant r, \\ m^i, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь $m = |X|$. По автомату A построим $\chi(A, \rho_{ri})$ следующим образом. Множество $W = W_1 \cup \ldots \cup W_k$, где $W_j \in \Phi_A^{ri}$ для всех j, $i \leqslant j \leqslant k$, называется полным относительно Φ_A^{ri}, если одновременно выполняются три условия: 1) для всякого входного слова p длины i найдется выходное слово q такой же длины, что $(p, q) \in W$; 2) если $(p, q_1), (p, q_2) \in W$, то $q_1 = q_2$; 3) если $Q \leqslant W$ и $r(Q) = r$, то $Q \in \Phi_A^{ri}$. Первые два условия равносильны существованию такого конечно автоматного отображения $\lambda : X \to Y$, для которого $\lambda^i = W$.

По множеству Φ_A^{ri} построим возможно недетерминированный автомат $G_{ri}(A) = (G, X, Y, \Lambda, B, \Delta, \Lambda)$, у которого множество состояний G равно множеству всех полных множеств вход-выходных слов, составленных из экспериментов, входящих в Φ_A^{ri}, всевозможными способами. Функции переходов Δ и выходов Λ этого автомата определяются формулами: пусть $W, Q \in G$ и $x \in X$, $y \in Y$, тогда

$$\Delta(W, x) = \{Q \,|\, \exists y[((x, y) \setminus W) \leqslant Q]\},$$
$$\Lambda(W, x) = \{y \,|\, (x, y) \leqslant W\}.$$

Напомним, что $v \setminus W = \{w \,|\, vw \in W\}$. В случае, когда $i = 1$ и $(x, y) \in W$, то $(x, y) \setminus W = e$, где e — пустое вход-выходное слово. В теории автоматов принято, что $e \leqslant Q$ для всех Q. Поэтому в случае $\Delta(W, x) = G$ для всех $x \in X$. Из условия 1 для полных относительно Φ_A^{ri} множеств следует, что $|\Delta(W, x)| = 1$ для всех $W \in G$ и $x \in X$.

В [6] показано, что автомат $G_{ri}(A)$ приведен, в общем случае недетерминирован и выполняется

Теорема 1.2. $(A, B) \in \rho_{ri}$ *тогда и только тогда, когда* $G_{ri}(A) = G_{ri}(B)$.

Это утверждение дает конструктивный критерий (r,i)-неотличимости двух автоматов. Она показывает, что $G_{ri}(A)$ является характеризатором автомата A относительно ρ_{ri}, поэтому обозначения $G_{ri}(A)$ и $\chi(A,\rho_{ri})$ будем считать синонимами. Заметим, что построенный характеризатор не является единственно возможным.

Таким образом, можно определить отношение дескрипции: $(A,G) \in \varphi$, если $G = G_{ri}(A)$. По определению $\varphi(A) = G_{ri}(A)$ и $\varphi^{-1}(G_{ri}(A)) = \rho_{ri}(A)$.

Аналогичные характеризаторы определены в [6, 22] для классов $\upsilon_r(A)$, где $\upsilon_r = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \rho_{ri}$ для $\upsilon_1(A)$, для классов $\varepsilon_i(A)$, где $\varepsilon_i = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \rho_{ri}$, и ряда других отношений. Для этих способов дескрипции рассмотрены и, в основном, решены проблемы анализа дескриптора и представления автомата дескриптором с точностью до изоморфизма.

1.1.6. Спецификация автоматов с помощью недетерминированного автомата

При синтезе автоматов рассматриваются различные ограничения на свойства синтезируемого автомата (верхняя граница числа состояний, функция неисправностей и др. [22]). Одним из наиболее естественных является ограничение на возможное поведение автомата, задаваемое множеством W вход-выходных слов во внешнем алфавите автомата. При этом множеству W ставится в соответствие класс инициальных автоматов $A = (S,X,Y,\delta,\lambda,a_0) \in \mathsf{A}(U)$, для которых $\lambda_{a_0} \subseteq W$, или ставится в соответствие класс инициальных автоматов $A \in \mathsf{A}(U)$, для которых $W \subseteq \lambda_{a_0}$. Во втором случае $D(W)$ является фрагментом автомата A, и эта ситуация рассматривалась ранее. Рассмотрим первый случай. Событие W зачастую задается с помощью слабоинициального недетерминированного автомата-спецификации, а автоматы A, у которых $\lambda_{a_0} \subseteq W$, называются реализациями этой спецификации.

Пусть $C = (S,X,Y,\delta_c,\lambda_c,S_0)$ — слабоинициальный конечный недетерминированный автомат, у которого области определения функций совпадают. Автомат C порождает событие $L(C) = \bigcup\limits_{s\in S_0} \lambda_s$. Инициальный автомат $A \in \mathsf{A}(U)$, называется реализацией автомата

C, если выполняется соотношение $\lambda_{a_0} \subseteq L(C)$. Таким образом имеет место отношение дескрипции: $(A, C) \in \varphi$, если A — реализация спецификации C. Тогда $\varphi^{-1}(C)$ определяет класс реализаций автомата C, а $\varphi(A)$ — класс спецификаций автомата A.

Понятие аналогичное реализации первоначально исследовалось в теории сверхязыков А. Черчем, Б. А. Трахтенбротом, Р. Макнотоном (см. [8], гл. 2). В [19] введено понятие реализации (в оригинале — интеграла) множества W и найдена характеризация наименьшей в некотором смысле спецификации для заданного класса реализаций. Реализации данной спецификации неоднократно применялись при сертификации протоколов (см. напр. [23]). В [25] найдены критерии пустоты, одноэлементности класса $\varphi^{-1}(C)$, предложен алгоритм синтеза минимальной по числу состояний реализации.

Далее будет рассмотрено несколько отличное понятие реализации и исследована структура класса реализаций данной спецификации.

1.2. Фрагменты автоматов

Пусть A — некоторый инициальный автомат из класса $\mathsf{D}_k(U)$ детерминированных конечных автоматов во внешнем алфавите $U = X \times Y$. Пусть также $\mathsf{F}(A)$ класс всех фрагментов этого автомата. Рассмотрим простейшие свойства фрагментов из этого автомата. Пусть R, Q фрагменты автомата A.

Легко видеть, что $R \infty Q$ влечет $\mathsf{A}(R) \supseteq \mathsf{A}(Q)$. Поэтому можно говорить, что Q содержит не меньше информации об автомате, чем R. Напомним, что $\mathsf{A}(R) \subseteq \mathsf{A}(U)$ — класс всех конечных всюду определенных приведенных автоматов, фрагментом которых является R.

Отношение является предпорядком и порождает эквивалентность: $R \equiv Q$, если $R \infty Q \infty R$. Класс всех фрагментов эквивалентных R обозначим $\mathsf{K}(R)$. Из определения следует, что если $Q \infty R$, то $(R + Q) \in \mathsf{K}(R)$, таким образом, класс $\mathsf{K}(R)$ замкнут по сложению автоматов.

Рассмотрим конечные фрагменты. Пусть R — конечен и $\mathsf{K}_K(R)$ — класс всех конечных фрагментов ему эквивалентных. По сказанному выше он рекурсивен. Множество $\{nR\}$, $n = 1, 2, \ldots$, образует бесконечную цепь фрагментов из $\mathsf{K}_K(R)$, и, следовательно, этот класс бесконечен. Обозначим через $\mathsf{M}(R)$ класс всех тех конечных Q, не эквивалентных R, для которых $Q \infty R$. Рассмотрим отображение $\varphi : \mathsf{M}(R) \to \mathsf{K}_K(R)$, для которого $\varphi(Q) = Q + R$. Из определения следует, что если $Q_1 \neq Q_2$, то $\varphi(Q)_1 \neq \varphi(Q)_2$. Поскольку $R \notin \mathsf{M}(R)$, то фрагменты nR не имеют прообразов по φ. Следовательно, φ — инъекция, но не биекция. Так как $\mathsf{M}(R) = \bigcup \mathsf{K}(A)$, где объединение происходит по всем $Q \in \mathsf{M}(R)$, то $|\bigcup \mathsf{K}_K(Q)| \leqslant |\mathsf{K}_K(R)|$.

Ядром конечного фрагмента R назовем такой его подавтомат Q, для которого существует полный слабый гомоморфизм φ, причем $Q = \varphi(R)$, а всякий слабый эндоморфизм фрагмента Q в себя является полным автоморфизмом. По определению ядро фрагмента входит в $\mathsf{K}_K(R)$.

Теорема 1.3. *Для каждого конечного фрагмента существует единственное с точностью до изоморфизма ядро.*

Операция выделения ядра R' фрагмента R является операцией открывания, так как для нее выполняются соотношения: направленности (то есть $R' \infty R$), идемпотентности (то есть $(R') = R$), изотонности (то есть $R_1 \infty R_2$ влечет $R'_1 \infty R'_2$).

Из теоремы 3 вытекает ряд следствий, характеризующих эквивалентные фрагменты.

Следствие 1.4.

1) *Конечные фрагменты эквивалентны тогда и только тогда, когда их ядра равны (изоморфны).*
2) *Ядро конечного фрагмента является наименьшим по включению с элементом в классе* $\mathsf{K}_K(R)$.

Фрагмент, совпадающий со своим ядром, называем ядерным. Очевидно, что всякий древовидный непосредственный фрагмент является ядерным, но ациклический непосредственный фрагмент ядерным может не быть. В случае, когда автомат принадлежит $\mathsf{A}(X, Y)$, то он является ядерным фрагментом самого себя. Класс всех ядерных фрагментов автомата A в силу следствия 4 частично упорядочен отношением ∞. Ядро автомата $A \in \mathsf{D}_K(U)$, является его наибольшим элементом, а фрагмент, состоящий из одной дуги с отметкой $X \times Y$ — наименьшим элементом.

Конечный непосредственный фрагмент назовем правильным. Класс правильных фрагментов автомата A обозначим $Fr(A)$. Выше было сказано, что отношение $\subseteq$ на нем совпадает с $\leqslant$. Класс правильных фрагментов эквивалентных правильному фрагменту R обозначим через $\mathsf{K}_\Pi(R)$. Этот класс частично упорядочен отношением включения. Поскольку $\{nR\} \subseteq \mathsf{K}_\Pi(R)$, $n = 1, 2 \ldots$, то $\mathsf{K}_\Pi(R)$ бесконечен и ядро фрагмента R является его наименьшим (по следствию 4) элементом. Ясно, что $\mathsf{K}_\Pi(R)$ рекурсивен. Класс всех правильных ядерных фрагментов изоморфен $Fr(A)/\equiv$. Ядро автомата A является его наибольшим элементом, а каждая дуга автомата A — минимальным элементом, причем других минимальных нет.

Теорема 1.5. *Класс ядерных правильных фрагментов автомата A конечен тогда и только тогда, когда A — ациклический автомат.*

Из этой теоремы следует, что для всюду определенного автомата A (поскольку он имеет циклы) класс $Fr(A)$ состоит из бесконечного числа (так как $Fr(A)/\equiv$ бесконечен) бесконечных классов правильных эквивалентных фрагментов.

Фрагмент R автомата A назовем тривиальным, если существует всюду определенный конечный подавтомат B автомата R, для которого $(A, B) \in \varepsilon$. Тривиальный фрагмент явно содержит в себе полное «глобальное» описание автомата A. Легко видеть, что класс тривиальных и класс нетривиальных правильных фрагментов замкнуты по операции сложения и поэтому бесконечны. Кроме того, в классе эквивалентных фрагментов либо все фрагменты тривиальны, либо все нетривиальны.

Рассмотрим структуру класса $\mathsf{A}(R)$, который описывается некоторым фрагментом R. Назовем его классом автоматов, неотличимых этим фрагментом. Этот класс замкнут по операции объединения. Эта операция ассоциативна, коммутативна и идемпотентна, следовательно, $\mathsf{A}(R)$ является (верхней) полурешеткой. Автоматы этой полурешетки, минимальные по включению $\subseteq$, будем называть тупиковыми, а автоматы с наименьшим числом состояний — минимальными. Автомат A из этого класса назовем неразложимым, если $A = B \cup C$, где $B, C \in \mathsf{A}(R)$, влечет $A = B$ или $A = C$.

Рассмотрим свойства порождающих множеств полурешетки неотличимых автоматов. Вначале рассмотрим более общую ситуацию.

Пусть $<L, +>$ произвольная полурешетка, в которой операция ассоциирована с некоторым частичным порядком $\leqslant$. Подмножество $K \subseteq L$ называется для этой полурешетки порождающим, если каждый ее элемент можно представить суммой конечного числа элементов из K. Минимальное по включению порождающее множество назовем базисом. Множество всех неразложимых элементов обозначим через M. Ясно, что M содержит все тупиковые элементы. Очевидно, что если K порождающее множество, то $M \subseteq K$. Если L конечна, то из последнего включения следует, что K — порождающее.

Отображение φ полурешетки L в множество $\mathbb{N}$ неотрицательных целых чисел называется изотонным, если $l_1 \leqslant l_2$ влечет $\varphi(l_1) \leqslant \varphi(l_2)$. Если кроме этого $l_1 < l_2$, влечет $\varphi(l_1) < \varphi(l_2)$, то назовем φ несжимающим цепи в L гомоморфизмом. Несжимающий цепи гомоморфизм называется высотой, если $\varphi(l) = 0$ тогда и только тогда, когда l — тупиковый элемент, и $\varphi(l) = n$, если для некоторого $l_1 < l$ $\varphi(l_1) = n-1$. В этом случае $\varphi(l)$ называется высотой элемента l.

Известно [26], что для любой полурешетки несжимающий гомоморфизм существует точно тогда, когда существует высота.

Пусть $<\mathsf{A}, U>$ — произвольная полурешетка, где $\mathsf{A} \subseteq \mathsf{A}(X, Y)$. Отображение φ этой полурешетки в $\mathbb{N}$, для которого $\varphi(A)$ равно числу состояний автомата A, является несжимающим гомоморфизмом.

Следствие 1.6. *Множество неразложимых элементов полурешетки является единственным ее базисом, а порождающие ее множества образуют булеву алгебру.*

Полурешетка $\mathsf{A}(R)$ является интересным примером полурешетки, для которой выполняется это следствие. В бесконечной полурешетке A высота ее элементов неограниченна. Покажем, что высота ее неразложимых элементов в общем случае тоже неограниченна.

Пусть $A \in \mathsf{A}(X, Y)$. Множество $\Phi_A = \bigcup\limits_{s \in S} \lambda_{As}$ называется множеством всех простых экспериментов этого автомата. Пусть $R = R(\Phi_A)$ — бесконечный непосредственный фрагмент автомата A. Рассмотрим бесконечную цепь $A_1 \subset A_2 \subset \ldots A_k \subset \ldots$, где автомат

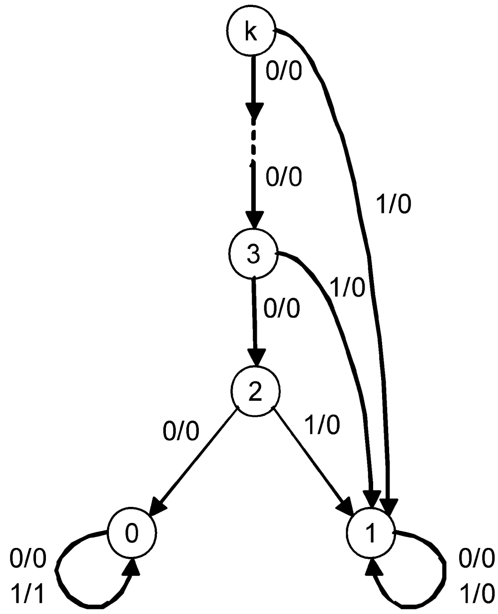

Рис. 1.

$A_k \in \mathsf{A}(RA)$ и $R = R(\Phi_A)$, имеет множество состояний $\{0, 1, \ldots, k\}$ и представлен на рис. 1. Класс $\mathsf{A}(R)$ бесконечен, имеет единственный тупиковый автомат A_1. Напомним, что цепь $l_1 < l_2 < \ldots < l_k$ называется максимальной в L, если для всех i, $1 \leqslant i \leqslant k$, из включения $l_i \leqslant l \leqslant l_{i+1}$ следует, что $l_i = l$ или $l_{i+1} = l$. Автоматы $A_1 \subset A_2 \subset \ldots A_k \subset \ldots$ образуют единственную максимальную цепь от A_1 до A_k и все эти автоматы неразложимы. Отсюда следует, что в данной полурешетке высота неразложимых элементов может быть как угодно большой.

Продолжим рассмотрение свойств полурешетки A. В дальнейшем считаем, что A выпукла, то есть если $A \subseteq B$ и $A, B \in \mathsf{A}$, то для всех $C \in \mathsf{A}(X, Y)$ из $A \subset C \subset B$ следует $C \in \mathsf{A}$. Рассмотрим свойства A как системы $(\mathsf{A}, \cup, \cap)$. Операция пересечения на A в общем случае частична. Пусть B — некоторый автомат из этой системы. Множество всех автоматов $A \in \mathsf{A}$, для которых $A \supseteq B$, называется главным двойственным идеалом (или фильтром) [26], порожденным автоматом B.

Главный двойственный идеал, порожденный тупиковым автоматом, называется максимальным.

Следствие 1.7. *Каждое выпуклое и замкнутое по объединению* $\mathsf{A} \subseteq \mathsf{A}(X,Y)$ *равно объединению дистрибутивных решеток с нулем, каждая из которых является максимальным двойственным идеалом, порожденным тупиковым элементом.*

Класс $(\mathsf{A}(R), U)$ является выпуклой полурешеткой, то есть является примером системы, для которой условие следствия выполняется, и тем самым $\mathsf{U}(R)$ является объединением таких решеток.

Ядром системы A назовем пересечение всех автоматов из этого класса, то есть наибольший автомат, включающийся во все автоматы класса. Для некоторых систем ядро может быть пусто. Класс $\mathsf{A}(R)$ характеризует «размытость», с которой фрагмент R описывает автомат, а ядро класса определяет ту часть автомата, которую фрагмент описывает однозначно. Из следствия 7 вытекает, что $\mathsf{A}(R)$ является дистрибутивной решеткой тогда и только тогда, когда он имеет единственный тупиковый автомат, совпадающий с ядром класса. На рис. 1 автомат A_1 является единственным тупиковым в классе $\mathsf{A}(R)$, где $R = R(\Phi_{A_1})$, поэтому этот класс является дистрибутивной решеткой.

Обычно представляет интерес не сам класс $\mathsf{A}(R)$, а его некоторый подкласс, (например, минимальных автоматов). Одним из способов выделения такого подкласса является запрещение некоторого поведения у его элементов. Пусть $R = (T, 2^U, \Lambda)$ — некоторый автомат Медведева. Назовем R кофрагментом автомата $A \in \mathsf{A}(X,Y)$, если каждая компонента связности $V \subseteq R$ не является фрагментом автомата A. Через $\mathsf{A}(R,Q)$ обозначим класс всех автоматов из $\mathsf{A}(X,Y)$, для которых R является фрагментом, а Q — кофрагментом. Ясно, что $\mathsf{A}(R,Q) = \mathsf{A}(R) - (\bigcup \mathsf{A}(V))$, где объединение выполняется по всем компонентам связности V кофрагмента Q.

Всякий класс $\mathsf{A}(R,Q)$ является выпуклым. Действительно, если $A, B \in \mathsf{A}(R,Q)$ и $A \subseteq C \subseteq B$, то $R\,f\,A$ влечет $R\,f\,C$, а $V \prec B$ влечет $V \prec C$.

Пусть $\mathsf{A}(R,Q)$ замкнут по объединению. По следствию 7 он является объединением дистрибутивных решеток. Рассмотрим условия, когда этот класс является булевой алгеброй. Для этого вернемся к рассмотрению свойств системы $(\mathsf{A}, \cup, \cap)$.

Если система A конечна и имеет единственный тупиковый автомат, то она является дистрибутивной решеткой с нулем (тупиковым автоматом) и единицей (объединение всех автоматов из A). Бесконечная A единицы никогда не имеет. Рассмотрим условие, когда эта система является булевой алгеброй. Пусть $A \in \mathsf{A}$ на множестве S его состояний введем отношение достижимости состояний: $(s_1, s_2) \in \tau$ если $\delta_A(s_1, p) = s_2$ для некоторого слова $p \in X^*$. Это отношение порождает эквивалентность $\eta = \tau \cap \tau^{-1}$, классы которой называются слоями [4]. Они являются максимальными (по $\subseteq$) сильно связными подмножествами состояний. Каждый слой S' определяет подграф $Q' = (S', U')$ (но не подавтомат) графа автомата A, где U' — множество всех тех дуг автомата A, начало и конец которых суть вершины из S'. Заметим, что может быть $|S'| = 1$ и $U' = \Phi$. Граф G' для простоты тоже будем называть слоем. Слой будем называть внешним, если в автомате не существует дуги, которая начинается в другом слое, но оканчивается в G'.

Теорема 1.8. *Равносильны следующие утверждения:*

1) *Система A является булевой алгеброй.*
2) *Она конечна, имеет единственный тупиковый автомат и для всех C, D, для которых $B \subseteq D \subseteq C$, если слой в автомате D является внешним, то и в C он является внешним.*
3) *Система имеет единственный тупиковый автомат B, а множество всех неразложимых автоматов, отличных от B, конечно и состоит из попарно несравнимых по включению автоматов.*

Рассмотрим пример класса $\mathsf{A}(R, Q)$, для которого выполняются условия теоремы 1.8, то есть который является булевой алгеброй. Пусть $(A, B) \in \nu_1$, если $A, B \in \mathsf{A}(U)$ и $\Phi_A = \Phi_B$. Изучение класса $\nu_1(A)$ автоматов неотличимых никакими простым экспериментом начато еще Муром [14]. Легко видеть, что $\nu_1(A) = \mathsf{A}(R, Q)$, где $R = R(\Phi_A)$, а $Q = R(U^* - \Phi_A)$. Пусть A задан рисунком 2, $\Phi_A = ((0,0) \cup (1,0))^* \cup ((0,1) \cup (1,1))^*$. Нетрудно убедиться, что A

является наибольшим автоматом в этом классе. Сам класс состоит из 4-х автоматов: самого A, его подавтоматов, порожденных множествами состояний $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$. По теореме 1.8 этот класс является булевой алгеброй.

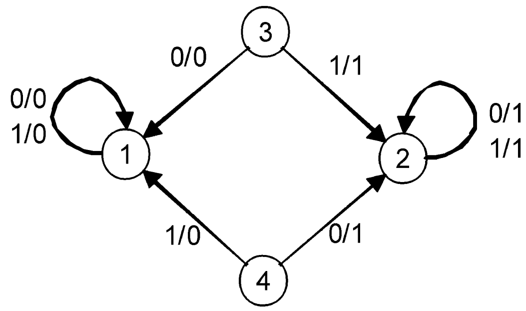

Рис. 2.

1.3. Идентификаторы состояний

Пусть $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ — некоторый конечный детерминированный неинициальный автомат-эталон, у которого области определения функций совпадают, то есть $A \in \mathsf{D}_k(U)$. Пусть R_t — идентификатор некоторого состояния $s \in S$ эталона.

Рассмотрим взаимосвязь между идентификаторами, предпорядком ∞ и эквивалентностью $\equiv$, порождаемой этим предпорядком.

Если φ — слабый гомоморфизм фрагмента R во фрагмент Q эталона, и, кроме того $\varphi(t) = q$, то Q_q является идентификатором состояния s эталона. Следовательно, либо все фрагменты из класса эквивалентности $K(R)$ являются идентификаторами одного и того же состояния эталона, либо ни один не является. Из бесконечности этого класса следует, что множество идентификаторов любого состояния эталона либо пусто, либо бесконечно.

Из сказанного следует простой конструктивный критерий существования идентификаторов. Пусть R_t — идентификатор состояния s эталона и φ — некоторый слабый гомоморфизм R_t в A_s. Пусть также $B_s = \varphi(R_t)$.

Теорема 1.9. *Идентификатор состояния эталона A существует тогда и только тогда, когда существует $B_s \subseteq A_s$, являющийся таким идентификатором.*

Из сказанного следует, что для каждого автомата $A \in \mathsf{A}(U)$ и каждого $s \in S$ существуют идентификаторы состояния s. Действительно, так как $A \in \mathsf{A}(U)$ всюду определен и приведен, то $s \neq t$ влечет $\lambda_s \lceil \lambda_t \lceil \lambda_s$. Поэтому подавтомат B_s, порожденный всеми состояниями эталона, достижимыми из s, является идентификатором состояния s.

Рассмотрим частный вид идентификаторов состояний эталона, связанный с экспериментами. С каждым состоянием s эталона ассоциируется два множества вход-выходных слов: λ_s — множество всех вход-выходных слов, начинающихся в s, то есть порожденных состоянием s, и двойственное множество ϕ_s всех вход-выходных слов, оканчивающихся в s, то есть таких $(p, q) \in (X \times Y)^*$, для которых найдется такое $s' \in S$, что $\delta_A(s', p) = s$ и $\lambda_A(s', p) = q$. Пусть V_1, V_2 — некоторые множества слов в алфавите 2^U. Пару (V_1, V_2) назовем окрестностью состояния s эталона, если для каждого слова $v \in V_1$ найдется его сужение $w \in \phi_s$ и для каждого $v \in V_2$ найдется его сужение $w \in \lambda_s$. V_2 определяет автомат Медведева $D(V_2)$, V_1 — возможно бесконечный автомат Медведева $R(V_1)$. Отождествляем начальное состояние автомата $D(V_2)$ и все висячие состояния автомата $R(V_1)$. Полученный автомат обозначим $D(V_1, V_2)$, а отождествленное состояние — d. Из построения следует, что если (V_1, V_2) — окрестность состояния s эталона, то существует слабый гомоморфизм φ автомата $D(V_1, V_2)$ в A, причем $\varphi(d) = s$. Поэтому, используя вольность речи, окрестность (V_1, V_2) состояния s будем называть идентификатором состояния s эталона, если $D(V_1, V_2)$ является таким идентификатором. Идентификатор (V_1, V_2) будем называть начальным (конечным), если $V_1 = \varnothing$, ($V_2 = \varnothing$). Начальный (конечный) идентификатор эталона называется простым, если кратность множества V_1 (множества V_2) равна единице.

Рассмотрим примеры идентификаторов состояний. Множество вход-выходных слов $P \subseteq X^*$ называется диагностическим [12] для эталона A, если для всех состояний $s \in S$ и всех $p \in P$ реакция $\lambda(s, p)$ определена и, если $s \neq t$, $s, t \in S$, то $\lambda(s, p) \neq \lambda(t, p)$ для некоторого

$p \in P$. Другими словами, если P — диагностическое, то эксперимент λ_s/P — сужение λ_s на P, является начальным идентификатором для всех $s \in S$.

Входное слово p называется установочным [12] для A, если $\lambda(s,p)$ определено для всех $s \in S$ и равенство $\lambda(s,p) = \lambda(t,p)$ влечет равенство $\delta(s,p) = \delta(t,p)$. Ясно, что для установочного слова p входвыходное слово $(p, \lambda(s,p))$ является конечным идентификатором состояния $\delta(s,p)$ эталона.

Известно [7, 12], что для всюду определенного приведенного эталона всегда существуют диагностические множества и установочные слова. Поэтому для такого эталона существует начальный идентификатор каждого состояния и простой конечный идентификатор хотя бы одного состояния. Там же приведены методы построения таких входных слов.

Рассмотрим условия существования окрестностей состояний, являющихся идентификаторами состояний эталона. Ясно, что если (V_1, V_2) — идентификатор состояния s, то (ϕ_s, λ_s) тоже идентификатор этого состояния. Для конечного эталона множества ϕ_s, λ_s регулярны в алгебре Клини, поэтому существует алгоритм проверки того, является ли окрестность (ϕ_s, λ_s) идентификатором состояния s.

Сформулируем более простой критерий существования идентификаторов состояний. Пусть n — число состояний эталона.

Теорема 1.10. *Равносильны утверждения:*

1) *Существует окрестность состояния s, являющаяся его идентификатором.*
2) *(ϕ_s, λ_s) является идентификатором состояния s.*
3) *Существует идентификатор (V_1, V_2) состояния s, для которого $|V_1| + |V_2| \leqslant n - 1$ и $h(V_2) \leqslant 2^{2n}$.*

По эталону построим проверочный граф $G = (T, V, \Delta)$, где $T = 2^s \times 2^s$, $V = \{+, -\} \times U$. Функцию переходов Δ определим по правилу: $\Delta((S_1, S_2), +(x, y)) = (S_1', S_2')$, где $s \in S_i'$, если $\delta_A(t, x) = s$, и $\lambda_A(t, x) = y$ для некоторого $t \in S_i$, $i = 1, 2$. $\Delta((S_1, S_2), -(x, y)) = (S_1'', S_2'')$, где $t \in S_i''$, если $\delta_A(t, x) = s$ и $\lambda_A(t, x) = y$ для некоторого $s \in S_i$, $i = 1, 2$.

Проверочный граф является достаточно общей конструкцией и позволяет находить идентификаторы состояний более общего вида, чем окрестности. Для этого в проверочном графе выбираются слова $v = (\alpha_1, u_1) \ldots (\alpha_k, u_k)$, где $\alpha_j \in \{+, -\}$ и $\Delta((s,t), v) = (S_1, \varnothing)$, $S_i \neq \varnothing$. По слову v строится ациклический граф $R(v)$, множество вершин которого равно $\{1, 2, \ldots, k+1\}$ и по (α_j, u_j) строится дуга $(j, u_j, j+1)$ при $\alpha_j = +$, или дуга $(j+1, u_j, u_j)$ в противном случае. Вершина 1 называется начальной. Пусть $V' = (v_1, \ldots, v_i)$ такое, что для каждого $t \in S$ отличного от s найдется, для которого $\Delta((s,t), v) = (S_1, \varnothing)$. Тогда в графе $R(V') = \sum\limits_{i=1}^{1} R(V_i)$ отождествляем все начальные вершины и детерминизируем полученный граф. Легко видеть, что детерминизированный граф с выделенной начальной вершиной является правильным ациклическим идентификатором состояния s эталона. Поэтому вышеуказанное множество V' будем называть идентификатором. Класс всех таких идентификаторов состояния эталона обозначим через I_s. Каждый идентификатор W из класса I_s является множеством слов в алфавите $\{+, -\} \times U$. Пусть $W_1 \leqslant W_2$ означает, что каждое слово из W_1 является начальным отрезком некоторого слова из W_2. Это отношение является предпорядком и порождает эквивалентность $\equiv$. Через $K(W)$ обозначим класс всех идентификаторов из I_s эквивалентных (по $\equiv$) идентификатору W.

Идентификатор W назовем минимальным в I_s, если для всех $W' \in I_s$ из $W' \leqslant W$ следует $W' \subseteq W$.

Теорема 1.11. *Равносильны утверждения:*

1) *W — минимален в $I_s, \leqslant$;*
2) *W — минимален в $(K(W), \subseteq)$ и $K(W)$ минимален в $\langle I_s/\equiv, \leqslant\rangle$;*
3) *Множество W', полученное из W удалением хоть одного слова или заменой хоть одного слова его собственным начальным отрезком, идентификатором состояния s не является.*

Из приведенных теорем следует, что кратность минимального идентификатора не превосходит $n - 1$.

Оценим высоту минимальных идентификаторов.

Теорема 1.12. *Высота минимальных идентификаторов состояний, в общем случае, неограничена.*

Эта теорема показывает, что множество минимальных идентификаторов в общем случае бесконечно. В связи с этим представляет интерес задача его эффективного описания. Пусть $V = \{+,-\} \times X \times Y$. Рассмотрим вначале один способ представления конечного множества слов в алфавите одним словом в специальном алфавите.

Обозначим через Z множество всех пар (i, v), где $1 \leqslant i \leqslant n-1$ и $v \in V$. Пусть $W = \{w_1, \ldots w_k\}$ и $w_j = v_{j1} \ldots v_{jl_j}$. Множеству W поставим в соответствие слово $z(W) = (1, v_{1i})(2, v_{2i}) \ldots (k, v_{ki})(1, v_{12}) \ldots$ $\ldots (f, v_{jf})$ в алфавите Z. Здесь g — наибольший номер слова из W, имеющего наибольшую длину $f = \max l_j$. Слово $z(W)$ назовем сверткой множества W.

Рассмотрим преобразование χ, определенное следующим образом: пусть $(i, w_i)(j, w_j)$ — выражение, для которого $w_i w_j \in V^*$ и $1 \leqslant i$, $j \leqslant n-1$, тогда

$$\chi((i, w_i)(j, w_j)) = \begin{cases} (i, w_i, w_j), & \text{если } i = j \\ (i, w_i)(j, w_j), & \text{если } i < j \\ (j, w_j)(i, w_i), & \text{если } j < i. \end{cases}$$

С помощью этого преобразования любое слово в алфавите Z можно единственным образом представить в виде $(i_1, w_{i1}) \ldots (i_k, w_{ik})$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n-1$, а w_{ij} слова в алфавите V. Таким образом, каждому слову в алфавите Z ставится в соответствие семейство $(w_{i1}, \ldots, w_{ik})$ слов в алфавите V. Это семейство назовем разложением слова $z \in Z$ и обозначим его $W(z)$.

Перейдем к конструктивному описанию минимальных идентификаторов. Через Γ обозначим множество всех бинарных отношений $\gamma \subseteq \{1, \ldots, n\} \times S$. Пусть теперь Γ_n — множество всех семейств $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, где $m \leqslant n-1$ и $\gamma_i \in \Gamma$. Семейство $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ назовем определяющим, если существует и единственно такое l, $1 \leqslant ln$, что $\gamma_i(1) \neq \varnothing$ для всех $l \leqslant i \leqslant m$. Семейство $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ назовем категоричным, если оно определяющее, но любое его собственное подсемейство определяющим не является. Произвольно зафиксируем взаимно однозначное отображение γ_0 множества $\{1, \ldots n\}$

на S. Построим частичный конечный детерминированный акцептор $H(A) = (\Gamma_n, Z, \Delta_H, (\gamma_0), F_H$, у которого Γ_n — множество состояний, Z — множество входных символов, (γ_0) — начальное состояние, F_n — множество представляющих состояний, Δ_H — функция переходов. Акцептор порождается по шагам из состояния (γ_0) — по автомату A следующим образом: 1)

$$\Delta_H((\gamma_0),(i,v)) = \begin{cases} (\gamma_i), & \text{при } i = 1 \\ \text{не определено} & \text{при } i > 1. \end{cases}$$

Здесь $(j,s) \in \gamma$, при $v = +(x,y)$, если $\delta(\gamma_0(j),x) = s$, $\lambda(\gamma_0(j),x) = y$ и $(j,s) \in \gamma_1$, при $v = -(x,y)$, если $\delta(s,x) = \gamma_0(j)$, $\lambda(s,x) = y$.

2) Пусть состояние $(\gamma_1,\ldots,\gamma_m)$ достижимо из начального. Если $i > m+1$, то $\Delta_H((\gamma_1,\ldots,\gamma_m),(i,v))$ — не определено. Функция переходов для состояния $(\gamma_1,\ldots,\gamma_m)$ не определена также, если выполняется хоть одно из следующих условий:
а) для некоторого $j \leqslant m$ отношение γ_j — пусто,
б) семейство $(\gamma_1,\ldots,\gamma_m)$ — определяющие.

В противном случае, при $i \leqslant m+1$

$$\Delta_H((\gamma_1,\ldots,\gamma_m),(i,v)) = \begin{cases} (\gamma_1,\ldots,\gamma_{i-1},\gamma',\gamma_{i+1},\ldots,\gamma_m, & \text{при } i \leqslant m_j \\ (\gamma_1,\ldots,\gamma_m,\gamma'_{m+1}), & \text{при } i = m+1. \end{cases}$$

При этом, в случае $i \leqslant m$, $(j,s) \in \gamma'_i$ при $v = +(x,y)$, если $\delta(\gamma_i(j),x) = s$, $\lambda(\gamma_i(j),x) = y$, и $(j,s) \in \gamma'_i$ при $v = -(x,y)$, если $\delta(s,x) \in \gamma_i(j)$, $\lambda(s,x) = y$. В случае $i = m+1$ бинарное отношение γ'_{m+1} вычисляется точно также как отношение γ_1. Таким образом, при $i \leqslant m$ элемент γ_i заменяется элементом γ'_i, а при $i = m+1$ в семействе $(\gamma_1,\ldots,\gamma_m)$ добавляется элемент γ'_{m+1}. Поскольку $i \leqslant n-1$, то в последнем случае $m+1 \leqslant n-1$. Из конечности множеств Γ_n, V и неравенств вытекает конечность акцептора $H(A)$. Состояние $(\gamma_1,\ldots,\gamma_m)$ будет представляющим (то есть принадлежность F_H), если это семейство категорично. Пусть $\bar{Z} \subseteq Z^*$ — событие, представленное в акцепторе $H(A)$.

Теорема 1.13. *Если $\bar{z} \in \bar{Z}$, то $W(\bar{z}) \in I_s$ и является минимальным идентификатором состояний эталона. Если $W \in I_s$ минимальный идентификатор состояний эталона, то $\bar{z}(W) \in \bar{Z}$.*

Таким образом, автомат $H(A)$ эффективно описывает класс минимальных идентификаторов всех состояний автомата A. При этом каждой нумерации слов из некоторого минимального идентификатора W соответствует своя свертка и идентификатору W соответствует множество таких слов из $\bar{z}$, разложение которых равно W.

Следствие 1.14. *Если слово $\bar{z}$ принадлежит событию $\bar{Z}^+$, представленному в автомате $H^+(A)$, то разложение $W(\bar{z})$ является минимальным из I_s начальным идентификатором некоторого состояния автомата A. Если W — минимальный начальный идентификатор из I_s некоторого состояния автомата A, то свертка $\bar{z}(W)$ принадлежит событию $\bar{Z}^+$.*

Аналогично строится автомат $H^-(A)$, и аналогичное утверждение устанавливает связь между событием $\bar{Z}^-$ и минимальным конечным идентификатором состояний автомата A. Событие $\bar{Z}^+ \cup \bar{Z}^-$ — регулярно и является эффективным описанием множества начальных и минимальных конечных идентификаторов. Сложность автоматов $H(A), H^+(A), H^-(A)$ может значительно превосходить сложность автомата A, поэтому представляет интерес разработка правил упрощения этих автоматов без изменения событий, представленных в них. Правила а)–б) при построении функции Δ_H и являются такими упрощениями. Некоторые дополнительные правила упрощения акцептора $H^+(A)$ рассмотрены в [4]. Там же приведен пример такого акцептора.

Рассмотрим теперь взаимосвязь между множествами идентификаторов состояний автоматов, поведение которых в той или иной мере подобно.

Пусть — $A = (S, X, Y, \delta_A, \lambda_A)$ и $B = (T, X, Y, \delta_B, \lambda_B)$ — конечные автоматы Мили, всюду определенные и детерминированные, но необязательно приведенные. Тогда λ_{As} является конечно-автоматным отображением. Напомним некоторые определения. Состояния $s \in S$ и $t \in T$ называются эквивалентными, если $\lambda_{As} = \lambda_{Bt}$. Автоматы A и B называются эквивалентными (неотличимыми никаким экспериментом), если $\{\lambda_{As}\}_{s \in S} = \{\lambda_{Bt}\}_{t \in T}$. Автомат A называется приведенным, если из $s_1 \neq s_2$ следует, что $\lambda_{As_1} \neq \lambda_{As_2}$. Автоматы A, B назовем эквивалентными по предыстории, если $\{\phi_{As}\}_{s \in S} = \{\phi_{Bt}\}_{t \in T}$. Автомат A назовем приведенным по предыстории, если из $s_1 \neq s_2$ следует, что $\phi_{As} \lceil \phi_{As_2}$. Из определения следует, что если автомат A приведен (приведен по предыстории), то для всех s множество начальных (конечных) идентификаторов не пусто. Известно, что для каждого автомата существует ему эквивалентный единственный приведенный автомат. Если автомат A имеет преходящее состояние s, то он не приведен по предыстории, так как $\phi_{As} = \varnothing$ и тем самым $\phi_{As_1} \subseteq \phi_{As_2}$ для всех $t \in S$. Если кроме этого A приведен, то любой B, $(B, A) \in \varepsilon$ имеет преходящие состояния и, следовательно, в классе $\varepsilon(A)$ нет приведенных по предыстории автоматов.

Пусть $\Phi_A = \bigcup\limits_{s \in S} \lambda_{As}$. Автоматы A, B называются неотличимыми никаким простым экспериментом, если $\Phi_A = \Phi_B$. Рассмотрим взаимосвязь между множествами простых конечных идентификаторов состояний двух автоматов, неотличимых никаким простым экспериментом.

Известно, что для каждого приведенного автомата A существует простой установочный эксперимент, то есть существует такое слово p, что для всех s_1, s_2 из равенства $\lambda_A(s_1, p) = \lambda_A(s_2, p)$ следует равенство $\delta(s_1, p) = \delta(s_2, p)$. Поэтому вход-выходное слово $(p, \lambda_A(s_1, p))$ в этом случае является простым конечным идентификатором состояния $\delta(s, p)$.

Из определения конечных идентификаторов следует, что если для некоторого состояния автомата существует (простой) конечный идентификатор, то (простой) конечный идентификатор существует и для всякого состояния достижимого из s. Таким образом, множество состояний имеющих конечные идентификаторы образуют подавтомат. Этот подавтомат приведен по предыстории. Подавтомат, образованный всеми состояниями автомата, имеющими простой конечный идентификатор, назовем конечным фактором автомата. Из вышесказанного следует, что конечный фактор приведенного автомата не пуст и содержит все сильносвязные автоматы этого автомата. Из сказанного вытекает

Следствие 1.15.

1) *У всякого приведенного автомата существует приведенный по предыстории подавтомат, содержащий конечный фактор этого автомата.*

2) Конечные факторы приведенных неотличимых автоматов изоморфны.

3) Всякий сильносвязный приведенный автомат приведен по предыстории.

Известной задачей, поставленной еще Муром [14], является задача нахождения минимального (по числу состояний) автомата неотличимого от данного. Приведенные рассуждения позволяют сформулировать достаточное условие минимальности в классе неотличимых автоматов. Если приведенный автомат совпадает со своим конечным фактором, то он является единственным минимальным автоматом в классе неотличимых автоматов. Из этого следствия вытекает известный результат Мура [14] о том, что приведенный сильносвязный автомат является единственным минимальным в классе неотличимых автоматов.

Пусть $W \subseteq U^*$. Через $[W]$ обозначим пополнение множества слов W начальными отрезками этих слов. Обозначим через K_A множество всех правильных простых конечных идентификаторов всех состояний автомата A, то есть $K_A \subseteq \Phi_A$.

Полученные результаты позволяют сформулировать критерий неотличимости приведенных автоматов в терминах конечных идентификаторов.

Следствие 1.16. *Приведенные автоматы A и B неотличимы никаким простым экспериментом тогда и только тогда, когда $K_A = K_B$.*

Приведенность автоматов является существенным условием. Действительно, легко привести пример неприводимого автомата, у которого множество простых конечных идентификаторов меньше, чем у приведенного автомата, эквивалентного (а, значит, и неотличимого никаким экспериментом) исходному.

Теорема 1.17. *Приведенные автоматы неотличимы никаким (как простым, так и кратным) экспериментом тогда и только тогда, когда у них равны множества правильных начальных идентификаторов.*

В заключение раздела заметим, что ни начальные, ни конечные идентификаторы состояний при гомоморфизме автоматов, в общем случае, не сохраняются.

2. Представления автоматов фрагментами

Раздел посвящен изучению представлений автомата фрагментами с заданной точностью.

Проблема представления автомата фрагментами рассматривается с двух точек зрения. Первая — эксперименты с автоматами. Постановка задачи в этом случае такова. Задан класс F автоматов, в котором выделен «исправный» автомат-эталон A. Остальные автоматы из F называются «неисправностями» эталона. Кроме этого предъявлен черный ящик B, о котором известно, что он принадлежит классу A. Требуется найти такое множество P входных слов (тестовых последовательностей), по реакции на которые автомата B можно определить: а) совпадает ли B с эталоном (контрольный эксперимент); б) функции автомата B (распознающий эксперимент). В этом случае тест P вместе с соответствующими реакциями автомата B является искомым фрагментом поведения. Известен ряд работ, в которых предложены различные алгоритмы построения вышеуказанных экспериментов и найдены оценки их сложности [3–7]. В последнее время появился ряд неклассических видов экспериментов с более сложными степенями точности, определяемыми приложениями (сертификацией протоколов в сетях ЭВМ [27–28], тестированием компонетны сети автоматов [29] и т. п. Вторая точка зрения связана с описанием исходного задания автомата при его синтезе. При этом автомат задается в виде системы вход-выходных слов, которая представляет информацию двоякого вида: то, что должен реализовывать автомат (предписанное поведение) и то, что автомат не должен реализовывать (запрещенное поведение) [30–31]. При этом класс F, которому принадлежит автомат, как правило, предполагается, что это разбиение, в каждом классе которого ровно один автомат из F. Известен ряд вариантов такого описания: анкетные языки [30], k-наборы [20], языки эквивалентных преобразований [31]. Предложены алгоритмы получения таких описаний по заданному автомату и алгоритмы синтеза автомата по заданным описаниям.

Оба этих подхода естественно сливаются в формирующемся направлении «Формальные методы анализа свойств систем», объединяющем проблемы спецификации, анализа, верификации и тестирования программно-аппаратных дискретных систем.

Анализ полученных результатов показывает, что до сих пор мало изученными являются следующие вопросы:

1) Какова та граничная информация об автомате и классе, относительно которого описывается автомат, при которой вышеуказанное описание того или иного вида (эксперимент, анкетный язык) существует, а без которой не существует.
2) Какова структура вышеуказанного описания автомата, что обязательно должно присутствовать в описании, а что является издержками алгоритма его получения.
3) Какова сложность описаний, сложность их построения и сложность восстановления автомата по его описанию.

Эти вопросы являются актуальными не только для теории автоматов, но и для смежных дисциплин, таких как техническая диагностика [32, 33], идентификация систем управления [34] и др.

Введем необходимые определения. Пусть F — некоторый класс конечных детерминированных всюду определенных автоматов, то есть $\mathsf{F} \subseteq \mathsf{A}(X,Y)$. Пусть $A = (S,X,Y,\delta,\lambda)$ некоторый автомат, называемый эталоном. Пусть также τ — бинарное отношение подобия на классе $\mathsf{A}(X,Y)$. Если $(A,B) \in \tau$, то автомат B назовем подобным эталону. Обычно $A \in \mathsf{F}$.

Пусть R,Q — возможно бесконечные автоматы Медведева в алфавите 2^U, где $U = X \times Y$. Пару $< R,Q >$ назовем представлением эталона A относительно F с точностью τ, если одновременно выполняются следующие условия: 1. R является фрагментом, а Q — кофрагментом эталона; 2. Для любого $B \in \mathsf{F}$, если R является фрагментом, а Q — кофрагментом автомата B, то $B \in \tau(A)$.

Класс всех представлений эталона относительно A и τ обозначим $\mathsf{R}(A,\mathsf{F},\tau)$. Представление назовем текстуальным в случае, когда Q

пусто, и информаторным в противном случае. Класс всех текстуальных представлений обозначим $\mathsf{R}_T(A, \mathsf{F}, \tau)$.

Из определения представлений эталона следует, что $(R, Q) \in \mathsf{R}(A, \mathsf{F}, \tau)$ точно тогда, когда одновременно выполняются условия:

1) $A \in \mathsf{A}(R, Q) \cap \mathsf{F}$;
2) $\mathsf{A}(R, Q) \cap \mathsf{F} \subseteq \tau(A)$.

Пусть $Q = \sum Q_i$, $i \in I$ — разложение кофрагмента в прямую сумму его F компонент связности. Тогда эти условия равносильны соотношениям:

1) $A \in \mathsf{F} \cap \mathsf{A}(R) \cap (\bigcap\limits_i \bar{\mathsf{A}}(Q_i))$;
2) $(\mathsf{F} \cap \mathsf{A}(R) \cap (\bigcap\limits_i \bar{\mathsf{A}}(Q_i)) \subseteq \tau(A)$.

Здесь $\bar{\mathsf{A}}(Q_i)$ — дополнение класса $\mathsf{A}(Q_i)$ до $\mathsf{A}(X, Y)$.

Если выходной алфавит Y содержит только один символ, то $\mathsf{A}(X, Y) = \{A\}$ и класс представлений совпадает с классом всех фрагментов эталона. Поэтому в дальнейшем, если не оговорено противное, считаем, что $|Y| \geqslant 2$.

Рассмотрим примеры представлений.

1. Пусть F состоит из всех автоматов с числом состояний, не превосходящим числа состояний эталона, то есть как говорят в технической диагностике «неисправность не увеличивает числа состояний автомата» [33]. Пусть отношение τ является отношением равенства (изоморфизма) автоматов. Пусть p — контрольная в смысле Хенни [35] последовательность для A. Это значит, что если исследуемый «черный ящик» B, принадлежащий F, отреагировал на слово p словом q, для которого (p, q) может быть порождено эталоном, то $A = B$. Тогда строчный автомат $R(p, q)$ является представлением.

Следуя [35], можно выбрать F равным классу всех автоматов, число состояний которых не превосходит удвоенного числа состояний эталона и считать, что B подобен A, если $A \subseteq B$, то есть если B является реализацией A. Такое τ соответствует проверке работоспособности автомата [33], и в этом случае, для контрольного эксперимента (p, q) автомат $R(p, q)$ является представлением.

2. В [36] рассматривается проблема контроля (обнаружения) неисправностей, если классом F является класс всех автоматов, число состояний которых не превосходит заданного натурального числа. Этот класс содержит в себе большинство естественно определяемых классов неисправностей. Предложен алгоритм построения такого множества $P = \{p_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant$ входных слов, что если «черный ящик» B в состоянии t порождает эксперимент $Q = \{p_i, q_i\}$, для которого $Q \subseteq \lambda_{As}$, то $\lambda_{As} = \lambda_{Bt}$. Таким образом, древовидный фрагмент $D(Q)$, полученный из $\sum_i R(p_i, q_i)$, является представлением эталона относительно вышеуказанного F и τ, определяемого соотношением $(A, B) \in \tau$, если $\lambda_{As} = \lambda_{Bt}$, где s и t начальные состояния автоматов.

В силу сказанного, можно считать, что кратные и простые контрольные эксперименты являются частным видом представлений. Аналогичные рассуждения можно провести для распознающих экспериментов [3–8] и анкетных языков [30].

3. Рассмотрим k-набор, являющийся конечным множеством вход-выходных слов вида $(p, q) = (x_1, y_1) \ldots (x_i, y_i) {*} (x_{i-1}, y_{i-1}) \ldots (x_k, y_k)$ и описывающий сильносвязные автоматы с точностью до $\tau = \nu_1$. Звездочка показывает, что начальный отрезок слова (p, q), стоящий слева от нее, оканчивается в том же состоянии автомата, в котором оканчивается все слово. Если по слову (p, q) построить $R\ (p, q)$ и отождествить в нем состояния $l + 1$ и $k + 1$ и провести такое построение для каждого слова из k-набора, то получим представление R сильносвязного эталона A, относительно бесконечного класса сильносвязных автоматов.

4. В [4] предложена методика анализа вход-выходных слов с помощью идентификаторов состояний. В результате этого анализа получается так называемый предельный автомат, который в случае, если анализировался контрольный или распознающий эксперимент, является представлением автомата A относительно заданных F и τ.

5. В [37] рассмотрен случай, возникающий при сертификации протоколов [28] и контроле компоненты сети автоматов [29], когда класс A исправных автоматов задан в виде класса реализаций недетерминированного автомата A, а неисправных B — в виде класса реализаций недетерминированного автомата B. В этой работе строится экспери-

мент, определяющий, является ли «черный ящик» реализацией автомата A или реализацией автомата B. В процессе проведения этого эксперимента получается множество W вход-выходных слов, порожденных «черным ящиком». Автомат $R(W)$ является текстуальным представлением «черного ящика», а точность определяется разбиением $\{A, B\}$. Заметим, что в этом случае эти классы могут быть как конечными так и бесконечными.

Рассмотренные примеры показывают важность и актуальность исследования проблемы представления фрагментами. В [6, 22] заложены основы такого исследования. В данном разделе изложен ряд его основных моментов: условия существования представлений различного вида при различных предположениях на свойства эталона, класса F и точности представления τ; изучение структуры представлений в случае, когда представлением является только фрагмент R эталона; сложность представлений, как метрическая, так и их распознавания. Эти задачи рассматривались в первую очередь для определенно-диагностируемых порядка k автоматов. Такие автоматы интенсивно изучались в теории экспериментов с автоматами [4, 6, 12, 15, 16] и часто встречаются в прикладных исследованиях. В разделе приведены необходимые и достаточные условия, при которых фрагмент является представлением определенно диагностируемого порядка 1 эталона относительно класса F_n всех автоматов с числом состояний, не превосходящим число n состояний эталона. Для случая $\tau = \varepsilon$ (то есть изоморфизма автоматов) описана структура минимальных представлений. Получены необходимые и достаточные условия быть представлением такого же эталона относительно класса автоматов, порожденных из эталона локальными преобразованиями последнего, и τ, равного отношению неотличимости различного вида. И, наконец, найден критерий, при котором вход-выходное слово является контрольным экспериментом для определенно диагностируемого порядка k, $1 \leqslant k \leqslant 11$ эталона относительно F_n и $\tau = \varepsilon$.

2.1. Условия существования представлений

1. Укажем простейшие свойства представлений, полезные в дальнейшем. Пусть дана система $\langle A, \mathsf{F}, \tau\rangle$ и пара (R, G), для которой вы-

полняется условие 1 представлений, то есть R — фрагмент и Q — кофрагмент эталона A. По кофрагменту Q определим класс автоматов F_Q по правилам: $B \in F_Q$, если существует автомат $C \in \mathsf{F}$, для которого B является компонентой связности, и существует компонента связности H кофрагмента Q, для которой $H \infty B$. Через B_Q обозначим возможно бесконечный автомат, являющийся прямой суммой всех автоматов из F_Q. По классу F определим класс B правилом: $B \in \mathsf{B}$, если существует $C \in \mathsf{F}$, для которого B является его компонентой связности и $B \prec A$. По классу B определим, возможно бесконечный, автомат $B_{\max}$, являющийся прямой суммой всех автоматов из B.

Можно показать, что в классе $K(R)$ всех фрагментов, эквивалентных по $\equiv$ фрагменту R, либо все элементы из $K(R)$ являются текстуальными представлениями, либо ни один из них. Выше было показано, что ядро конечного фрагмента R является наименьшим (по включению $\subseteq$) элементом в классе $K(R)$. Текстуальное представление, совпадающее со своим ядром, назовем ядерным. Ядерным представлением является сам эталон, ядерными представлениями являются контрольные эксперименты (древовидные представления).

Рассмотрим условия существования представлений общего вида.

Пусть s — некоторое состояние эталона, λ_s^k — множество всех вход-выходных слов длины не большей k, порождаемых s и $D(\lambda_s^k)$ — древовидный фрагмент, соответствующий этому множеству. Пусть $D_A^k = \sum D(\lambda_s^k)$ — это прямая сумма всех $D(\lambda_s^k)$, $s \in S$. Пусть также $\bar{D}_A^k$ — прямая сумма всех тех $D(\lambda^k)$, для которых λ — конечно-автоматное отображение, λ^k не реализуется ни одним состоянием эталона, $\lambda \subseteq U^*$. Через ε обозначим отношение эквивалентности автоматов из $\mathsf{A}(U)$. Пусть $n = |S|$ — число состояний эталона.

Теорема 2.1. *Равносильны утверждения:*

1) *Представление эталона A относительно F и τ существует;*
2) *Класс всех представлений для A, F, τ бесконечен;*
3) *$\langle A, B_{\max}\rangle$ является представлением;*
4) *$\varepsilon(A) \cap \mathsf{F} \subseteq \tau(A)$;*
5) *$(D_A^k, \bar{D}_A^k)$ является представлением при $k \geqslant n$.*

Теорема характеризует существование представлений с разных точек зрения. Утверждение 4 определяет максимальную точность τ, для которой представления существуют. Она равна ε и так как $\mathsf{F} \subseteq \mathsf{A}(X, Y)$, то представления общего вида могут определить автомат с точностью до изоморфизма (поскольку $\varepsilon(A) = A$). Кроме этого, это утверждение показывает, что для рефлексивных τ представления общего вида всегда существуют для всех классов F и эталонов $A \in \mathsf{F}$. Утверждения 3 и 5 указывают канонические в некотором смысле представления. Представление из утверждения 5 конечно и состоит из двух правильных фрагментов.

Далее будет приведен ряд теорем существования различных представлений, аналогичных теореме 2.1. В них проверка существования представлений сводится к проверке, является ли некоторая каноническая система представлением, или к проверке включения в класс $\tau(A)$ некоторого класса автоматов, неотличимых от эталона соответствующим образом. Они определяют также для каждого вида представлений максимальную точность представления эталона системой фрагмент — кофрагмент.

Рассмотрим условия существования текстуальных представлений общего вида. Текстуальное представление назовем правильным, если оно конечно и является непосредственным фрагментом эталона.

Введем отношение γ_{ri} неотличимости автоматов из $\mathsf{A}(U)$ экспериментами ограниченной высоты и кратности: $(A, B) \in \gamma_{ri}$, если всякий эксперимент автомата A кратности не большей r и высоты не большей i является экспериментом автомата A. Ясно, что $\rho_{ri} = \gamma_{ri} \cap \gamma_{ri}^{-1}$.

Пусть $(A, B) \in \gamma$, если всякий эксперимент автомата A является экспериментом автомата B. Ясно, что последнее соотношение равносильно включению $\{\lambda_s As\}_{s\in S} \subseteq \{\lambda_t Bt\}_{t\in T}$, где T — множество состояний автомата B и $\gamma = \cap\gamma_{ri}$, где пересечение выполняется по всем r, $i \geqslant 1$. Очевидно, что $\varepsilon = \gamma \cap \gamma^{-1}$.

Теорема 2.2. *Равносильны утверждения:*

1) *Текстуальное представление относительно* F *и* τ *существует;*
2) *Класс всех текстуальных представлений для* A, F, τ *бесконечен;*

3) Класс всех текстуальных правильных ядерных представлений бесконечен;

4) Эталон A является представлением для A, F, τ;

5) $\gamma(A) \cap \mathsf{F} \subseteq \tau(A)$.

Теорема 2.2 показывает, что текстуальные представления, в общем случае, определяют автомат с точностью, не большей чем γ, то есть с точностью до реализации эталона или, в технических терминах [33], с точностью до работоспособности эталона. Таким образом, как следовало ожидать, информаторные представления являются более точными дескрипторами автомата, чем текстуальные.

Текстуальное представление R назовем тривиальным, если существует всюду определенный автомат $B \subseteq R$, эквивалентный эталону, то есть $B \in \varepsilon(A)$. Тривиальное представление явно содержит в себе полное «глобальное» описание эталона. Контрольные эксперименты являются нетривиальными представлениями. Легко видеть, что класс тривиальных и класс нетривиальных представлений замкнуты по $\equiv$ операции сложения и поэтому бесконечны. Кроме этого в классе эквивалентных по представлению либо все трививальны, либо все нетривиальны.

Рассмотрим непустой класс $\mathsf{R}_T(A, \mathsf{F}, \tau)$. В силу теоремы 2.2 в нем всегда существуют тривиальные представления, например, сам эталон. $D_A = \sum\limits_{s \in S} D(\lambda_s)$ является бесконечным нетривиальным непосредственным представлением. Если класс F конечен и N верхняя оценка числа состояний автоматов этого класса, то D_A^{2N-1} является нетривиальным конечным непосредственным, то есть правильным, представлением в силу известных результатов Мура [7, 14]. Однако для бесконечных классов F правильные нетривиальные представления в $\mathsf{R}_T(A, \mathsf{F}, \tau)$ существуют не всегда.

Класс F назовем замкнутым по γ, если для всех $B \in \mathsf{F}$ $\gamma(B) \subseteq \mathsf{F}$. Ясно, что при $|Y| > 1$ непустой замкнутый по γ класс F бесконечен.

Теорема 2.3. *Пусть эталон A сильносвязен, класс F не пуст и замкнут по γ и не равен $\tau(A)$. Тогда в непустом классе $\mathsf{R}_T(A, \mathsf{F}, \tau)$ все правильные представления тривиальны.*

Из теоремы 2.3 следует, что для сильносвязных эталонов не существует правильных текстуальных нетривиальных представлений для $\mathsf{A}(U)$ и $|Y| > 1$.

Рассмотрим условия существования правильных текстуальных нетривиальных представлений. Важным частным случаем таких представлений являются древовидные представления, у которых каждая компонента связности является деревом.

Пусть $\chi_k = \bigcap \gamma_{rk}$, где объединение выполняется по всем $r \geqslant 1$. Ясно, что $\varepsilon_k = \chi_k \cap \chi_k^{-1}$. Поскольку автоматы из $\mathsf{A}(U)$ приведены, то $(A, B) \in \chi_k$ равносильно включению $L_A^k \subseteq L_B^k$.

Теорема 2.4. *Эквивалентны следующие утверждения:*

1) *Правильные древовидные текстуальные представления для A, F, τ существуют;*
2) *D_A^k является таковым для некоторого k;*
3) *$\chi_k(A) \cap \mathsf{F} \subseteq \tau(A)$ для некоторого k.*

Важным частным случаем является случай, когда автоматы из F не сравнимы по γ, то есть $\gamma(B) = B$ для всех $B \in \mathsf{F}$. Примером является класс F, все автоматы которого сильносвязны. Как показано ранее в этом случае текстуальные представления существуют для всех $A \in \mathsf{F}$ и τ. Наибольшая точность при этом равна ε. В случае этой точности непосредственно из теоремы 2.4 вытекает

Следствие 2.5. *Равносильны утверждения:*

1) *$\mathsf{R}_T(A, \mathsf{F}, \varepsilon)$ класс содержит правильные древовидные представления;*
2) *D_A^k входит в этот класс для некоторых k;*
3) *$\varepsilon_k(A) \cap \mathsf{F} = A$ для некоторых k;*
4) *множество $\varepsilon_k(A) \cap \mathsf{F}$ конечно для некоторых k.*

В силу важности древовидных текстуальных представлений (включающих в себя, например, контрольные эксперименты) в [6] класс F, для которого выполняется утверждение 3 теоремы 2.4, назван классом F, отличимым от A по τ. Наименьшее k, для которого выполняется вышеуказанное утверждение называется порядком отличимости. Такие классы могут быть как конечными, так и бесконечными. Всякий конечный класс F, для которого существует текстуальное представление эталона A относительно F и τ, является классом, отличимым от A по τ.

Рассмотрим условия существования минимальных представлений.

Правильное текстуальное представление $R \in \mathsf{R}_T(A, \mathsf{F}, \tau)$ назовем минимальным (по $\leqslant$), если для всех правильных текстуальных представлений из $\mathsf{R}_T(A, \mathsf{F}, \tau)$ неравенство $Q \leqslant R$ влечет $R \subseteq Q$. Такое определение связано с тем, что отношение $\leqslant$ в общем случае является предпорядком.

Следствие 2.6.

1) *Если* F *отличим от* A *по* τ, *то в* $\mathsf{R}_T(A, \mathsf{F}, \tau)$ *существуют правильные минимальные представления.*
2) *Если в* $\mathsf{R}_T(A, \mathsf{F}, \tau)$ *все правильные представления тривиальны, то в этом классе минимальных представлений нет.*

Рассмотрим автономные автоматы, то есть случай $|X| = 1$.

Следствие 2.7. *Для автономных автоматов и сильносвязного эталона равносильны утверждения:*

1) F *отличим от* A *по* τ;
2) *В классе* $\mathsf{R}_T(A, \mathsf{F}, \tau)$ *существуют правильные минимальные представления.*

Рассмотрим частный вид представлений — анкетные языки. Пусть $U = X \times Y$ и $Z = 2^U$. Пусть также $W_1, W_2 \subseteq Z^*$. Систему (W_1, W_2) назовем анкетным языком для эталона A относительно F и τ, если $(R(W_1), R(W_2))$ является представлением эталона относительно F и τ. Поскольку слову $w \in Z^*$ взаимно однозначно соответствует строчный автомат $R(w)$, то используя вольность речи наряду с $R(W_1) \subseteq R(W_2)$ будем писать $W_1 \infty W_2$.

Будем различать текстуальные (при $W_2 = \varnothing$) и информаторные анкетные языки. Текстуальный правильный анкетный язык, состоящий из одного слова называется (простым) контрольным экспериментом.

Рассмотрим условия существования анкетных языков. Полагаем $\gamma_1 = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \gamma_{1i}$. Ясно, что $(A, B) \in \gamma_1$ равносильно $\Phi_A \subseteq \Phi_B$ и что $\gamma_1 \cap \gamma_1^{-1} = \nu_1$.

Теорема 2.8. *Равносильны утверждения:*

1) *Анкетный язык для эталона относительно* F *и* τ *существует;*
2) $(\Phi_A, \bar{\Phi}_A)$ *является анкетным языком для* A, F, τ*;*
3) $\nu_1(A) \cap \mathsf{F} \subseteq \tau(A)$.

Теорема 2.9. *Равносильны утверждения:*

1) *Текстуальный анкетный язык для* A *относительно* F *и* τ *существует;*
2) Φ_A *является анкетным языком;*
3) $\gamma_1(A) \cap \mathsf{F} \subseteq \tau(A)$.

Теорема 2.10. *Равносильны утверждения:*

1) *Конечный анкетный язык для эталона* A *относительно* F *и* τ *существует;*
2) $(\Phi_A^k, \bar{\Phi}_A^k)$ *является анкетным языком для некоторого* k*;*
3) $\rho_{1k}(A) \cap \mathsf{F} \subseteq \tau(A)$ *для некоторого* k*;*

Напомним, что $\Phi_A^k = \bigcup \lambda_{As}^k$, где объединение выполняется по всем $s \in S$, а $\bar{\Phi}_A^k = U^k - \Phi_A^k$.

Теорема 2.11. *Равносильны утверждения:*

1) *Конечный текстуальный анкетный язык для эталона* A *относительно* F *и* τ *существует;*
2) Φ_A^k *является таким анкетным языком для некоторого* k*;*
3) $\gamma_{1k}(A) \cap \mathsf{F} \subseteq \tau(A)$.

Отметим важный случай, когда $\mathsf{F} = \mathsf{A}(X, Y)$ и $\tau = \nu_1$. Из теоремы 2.8 следует, что в этом случае бесконечный анкетный язык всегда существует, причем он задан двумя регулярными по Клини множествами слов $(\Phi_A, \bar{\Phi}_A)$. Легко показать, что конечные анкетные языки сущестствуют не для всех эталонов A. Автомат A называется автоматом с конечной памятью, если существует такое k, что каждое входвыходное слово $w \in \Phi_A$ длины k является для A конечным идентификатором его состояний. Наименьшее такое k называется порядком конечной памяти. В [6] показано, что имеет место следующая

Теорема 2.12. *Равносильны утверждения:*

1) *Правильный анкетный язык для эталона A относительно $\mathsf{A}(U)$ и ν_1 существует;*
2) *Эталон A является автоматом с конечной памятью;*
3) *$\rho_{1k} = \nu_1$ для некоторого k.*

Из доказательства теоремы следует, что $(\Phi_A^k, \bar{\Phi}_A^k)$ является анкетным языком для эталона A, являющегося автоматом с конечной памятью, относительно $\mathsf{A}(U)$ и ν_1 для всех k не меньших порядка конечной памяти.

Заметим, что система $(A, \mathsf{A}(U), \nu_1)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.4 и из нее следует, что все правильные текстуальные представления для этой системы тривиальны. Это показывает принципиальное различие между текстуальными и информаторными представлениями.

2.2. Представления относительно N-полных классов

Класс A назовем N-полным, если он состоит из всех автоматов, входящих в $\mathsf{A}(X, Y)$, число состояний которых не превосходит N. N-полный класс будет обозначаться через F_N. N-полные классы являются наиболее часто рассматриваемыми классами неисправностей в теории экспериментов с автоматами и технической диагностике, так как они содержат в себе большинство естественно определяемых (содержательных) классов неисправностей в теории автоматов [3–8, 12, 14–16] и в технической диагностике [32–33].

Для оценки сложности правильных текстуальных представлений относительно F_N и τ введем ряд параметров. Через n_R обозначим число состояний автомата R. Через n_τ обозначим наименьшее число состояний автоматов, подобных A. Ясно, что $n_\tau \leqslant n_A$. Через Y_τ обозначим множество всех выходных символов, которые порождаются подобными автоматами. Как и ранее, m обозначает мощность алфавита X. Будем рассматривать A, F_N, τ, для которых правильные текстуальные представления существуют.

Теорема 2.13. *Для правильного текстуального представления R относительно F_N и τ при $Y \neq Y_\tau$ выполняются следующие условия:*

1) *Если $n_A \leqslant N$, то для всех гомоморфизмов φ автомата R в A $\varphi(R) = A$.*
2) *Для всех гомоморфизмов φ автомата R в A число состояний $\varphi(R)$ не меньше N при $n_A > N$ и равно n_A в противном случае.*
3) *$n_R > N$, если R нетривиально, и $n_R > n_A$ в противном случае.*
4) *Число дуг в графе R не меньше N, если $N < n_A$, а R нетривиально, и не меньше mn_A в противном случае.*

Легко показать, что оценки в условиях 3 и 4 достижимы для всех m и n_A.

В случае $Y = Y_\tau$ дело обстоит сложнее: доопределение автомата $\varphi(R)$ может привести к автомату, подобному эталону. Рассмотрим случай, когда R — правильное текстуальное представление относительно N-полного класса F_n и $N < n_A$. Пусть φ — гомоморфизм автомата R в эталон. Покажем, что если число n состояний автомата $\varphi(R)$ меньше N, то $n \geqslant n_\tau$. Предположим, что $n < N$ и $n < n_\tau$. Если автомат $\varphi(R)$ всюду определен, то $R \leqslant \varphi(R)$ влечет $\varphi(R) \notin \tau(A)$ и R не представление. Если автомат $\varphi(R)$ частичный, то его можно доопределить до полного с тем же числом состояний.

Приведенная форма B полученного автомата обладает свойствами: $R \leqslant B$, $n_B \leqslant n < n_\tau$, $B \in \mathsf{F}_N$, поэтому R не представление.

Условие 1 теоремы 2.13 указывает случай, когда представление должно содержать полную локальную информацию о поведении эталона — содержать все его дуги.

Рассмотрим свойства представлений относительно n-полного класса, где $n = n_A$. Этот класс конечен, значит, отличим от A и любого τ. Как показано ранее, древовидное представление существует для всех τ. Более того, для всех τ существует правильное древовидное текстуальное представление. Его можно построить, например, сравнением эталона с каждым автоматом из F_n. Заметим, что на классе F_n отношение γ совпадает с и так как автоматы из этого класса приведены, то совпадает с отношением изоморфного вложения автоматов. Точность $\subseteq$ наиболее изучена в теории автоматов и ее приложениях.

Рассмотрим следующее преобразование эталона A. Выберем в нем некоторую дугу (a, x, y, b). Заменим ее дугой (a, x, y, g), где $g \neq a$ и $g \in S_A$. Будем говорить, что новый автомат получен из эталона переброской дуги (a, x, y, b) в состояние g.

Лемма 2.14. *Автомат, полученный переброской любой дуги эталона, не изоморфен эталону.*

Лемма 2.14 играет важную самостоятельную роль, так как при доказательстве того, что фрагмент не является представлением, используется такая схема: пусть R — правильный фрагмент A и из A переброской некоторой дуги получен неизоморфный ему B; если удается показать, что R — фрагмент B, то относительно данных A и τ фрагмент R текстуальным представлением не является.

Поскольку мощность класса F_n сильно растет с ростом n, то часто вместо этого класса рассматривают так называемые его доминирующие подклассы. Подкласс F' класса F называется доминирующим над F (относительно F и τ), если всякое правильное представление эталона A относительно F' и τ будет представлением относительно F и τ. Этот подкласс назовем слабо доминирующим, если всякое текстуальное правильное представление эталона относительно F' и τ будет таковым и относительно F и τ.

Пусть $\mathsf{A}_1 = \{B \,|\, B \in \mathsf{F}_n,\ \Phi^1_A = \Phi^1_B$, или, другими словами, $\mathsf{A}_1 = \rho_{11}(A) \cap \mathsf{F}_n$.

Теорема 2.15. *Класс A_1 является слабо доминирующим для F_n относительно любого A с $n_A = n$ и γ.*

Рассмотрим условия существования представлений частного вида — анкетных языков для n-полного класса и произвольного τ. Класс F_n конечен, поэтому проверка существования и построение анкетного языка осуществляется следующим тривиальным алгоритмом. Для всякого автомата $B \in \mathsf{F}_n - \tau(A)$ строится акцептор 2^B, представляющий множество Φ_B. Этот акцептор имеет не более 2^n состояний. Затем строится акцептор $2^A \times 2^B$ с числом состояний не более 2^{2n}, представляющий событие $\Phi_A \oplus \Phi_B$, где $\oplus$ — операция симметрической разности множеств. Выберем слово $w \in \Phi_A \oplus \Phi_B$, если оно существует. Множество всех таких слов образует анкетный язык. Если он существует, то длина слов в нем не превосходит $2^{2n} - 1$. Поскольку мощность n_A-полного класса сильно растет с ростом n_A, представляет интерес нахождение таких условий существования анкетного языка, проверка которых осуществляется только по информации об эталоне.

Пусть $\tau = \nu_1$. Распознавание автоматов с этой точностью применяется, например, при контроле протоколов в сети ЭВМ [27–28]. По показанному ранее, конечный анкетный язык всегда существует. Рассмотрим условия существования текстуальных анкетных языков, так как именно они получаются в процессе экспериментирования с автоматом. Пусть $n(\Phi_A) = \min\{n_B \,|\, (A, B) \in \nu_1\}$. Будем говорить, что множество Φ_A пополняемо с возрастанием, если для всех $B \in \mathsf{A}(X, Y)$ из строгого включения $\Phi_A \subset \Phi_B$, следует строгое неравенство: $n(\Phi_A) < n(\Phi_B)$. Автомат называется минимальным в классе $\nu_1(A)$, если $n = n(\Phi_A)$. Через $L_(A, \mathsf{A}, \tau)$ и $F_(A, \mathsf{A}, \tau)$ обозначим классы всех анкетных и конечных анкетных языков соответственно. Через $L_T(A, \mathsf{A}, \tau)$ и $F_T(A, \mathsf{A}, \tau)$ обозначим классы всех текстуальных и конечных текстуальных языков.

Рассмотрим случай $\tau = \iota$.

Теорема 2.16.

1) *$F(A, \mathsf{F}_n, \iota)$ не пуст тогда и только тогда, когда A является единственным минимальным в $\nu_1(A)$;*
2) *$F(A, \mathsf{F}_n, \iota)$ не пуст тогда и только тогда, когда A является единственным минимальным в $\nu_1(A)$ и Φ_A пополняемо с возрастанием.*

Известно [14], что приведенный сильносвязный автомат является единственным минимальным в $\nu_1(A)$, и для него $F(A, \mathsf{F}_n, \iota)$ всегда не пуст. Условия, при которых эталон A является единственным минимальным в классе $\nu_1(A)$ изучалась в [6].

Рассмотрим условия, при которых Φ_A пополняемо с возрастанием. Автомат A называется определенно-диагностируемым, если существует такое k, что каждое вход-выходное слово $w \in \Phi_A$ длины k является для A начальным идентификатором его состояний. Наименьшее такое k называется порядком диагностируемости. Если A определенно-диагностируем, то он является автоматом с конечной памятью.

Лемма 2.17. *Если A — сильносвязен или определенно диагностируем, то Φ_A пополняемо с возрастанием.*

Из утверждений 2.16, 2.17 вытекает

Следствие 2.18.

1) *Для сильносвязного эталона класс $F_T(A, \mathsf{F}_n, \iota)$ всегда не пуст;*
2) *Для определенно диагностируемого эталона класс $F_T(A, \mathsf{F}_n, \iota)$ не пуст тогда и только тогда, когда A единственный минимальный автомат в классе $\nu_1(A)$.*

2.3. Структура представлений

Целью данного раздела является изучение структуры текстуальных правильных представлений с точки зрения наличия и расположения в них идентификаторов состояний эталона. При этом в разделе рассматриваются только правильные фрагменты, то есть конечные, детерминированные, в общем случае частичные автоматы во внешнем алфавите $U = X \times Y$.

Использование идентификаторов состояний таких как диагностические и установочные эксперименты при построении контрольных и распознающих экспериментов проводилось с самого начала развития теории экспериментов в работах Мура, Гилла, Хенни, Василевского и др. [3, 7, 12, 14, 15, 16, 35, 36]. При этом идентификаторы состояний эталона специальным образом помещаются в контрольные и диагностические эксперименты и тем самым эти эксперименты тоже являются идентификаторами состояний эталона.

В [6] показано, что имеет место следующее

Утверждение 2.19. *Для всякого класса* F*, отличимого от эталона* A *по* τ*, существует такое древовидное представление для* (A, F, τ)*, которое, при соответствующем выделении его состояний, является идентификатором каждого состояния эталона.*

Следующие результаты показывают, насколько идентификаторы полезны и необходимы при построении представлений для (A, F, τ).

Пусть задан некоторый автомат B. Фрагмент R, $R \leqslant B$ с выделенным состоянием t называется идентификатором состояния s этого автомата, если для любого гомоморфизма φ фрагмента R в B выполняется равенство $\varphi(t) = s$. На множестве J_B всех идентификаторов состояний автомата B введем отношение совместимости σ_B: два идентификатора совместимы, то есть принадлежат σ_B, если они являются идентификаторами одного и того же состояния автомата B. Ясно, что σ_B является эквивалентностью на множестве J_B.

Пусть задан некоторый класс $\mathsf{F} \in \mathsf{A}(U)$ и эталон $A \in \mathsf{A}(U)$. Пусть R — некоторый (правильный) фрагмент эталона. Идентификатор I состояний эталона назовем верифицированным в фрагменте R, если I является идентификатором состояний каждого автомата $B \in \mathsf{F}$, для некоторого $R \leqslant B$. Через J_R обозначим класс всех верифицированных в R идентификаторов состояний эталона, а через σ_R — отношение совместимости на J_R, причем $(I_1, I_2) \in \sigma_R$, если для всех автоматов $B \in \mathsf{F}$ $(I_1, I_2) \in \sigma_B$. Очевидно, что σ_R эквивалентность на J_R. Система (J, σ), где $J \subseteq J_R$ и σ — некоторая эквивалентность на J, для которой $\sigma \subseteq \sigma_R$, будет называться верифицированной в R системой идентификаторов. Эквивалентность σ, содержащая только пары (I, I), где $I \in J$, называется диагональю и является наименьшей по включению эквивалентностью на J. Иногда диагональ σ будем называть пустым отношением совместимости идентификаторов, так как такое σ не содержит информации о совместимости разных идентификаторов из J.

Пусть (J, σ) — некоторая верифицированная в R система идентификаторов состояний. Эта система определяет на множестве T состояний фрагмента R отношение β: $(t_1, t_2) \in \beta$, если найдется такая пара идентификаторов состояний $(I_1, I_2) \in \sigma_R$, для которых t_i — это выделенное состояние идентификатора состояний, $i = 1, 2$ и $I_i \leqslant R$. Другими словами, $(t_1, t_2) \in \beta$, если в R содержатся идентификаторы состояний t_i, и гомоморфные прообразы этих идентификаторов совместимы по σ_R. Отношение β является рефлексивным и симметричным. Наименьшая (по включению) эквивалентность, для которой $\beta \subseteq \alpha$ называется транзитивным замыканием β. Конгруэнтное замыкание α однозначно определяет фрагмент R_1, для которого $R \leqslant R_1$ по следующему правилу. Отождествляем состояния фрагмента R, принадлежащие одному классу эквивалентности α. Получим в общем случае недетерминированный частичный автомат R', у которого множество состояний равно T/α. Пусть $(t_1, t_2) \in \alpha$. По определению верифицированной системы $\langle J, \sigma \rangle$, это означает, что для любого гомоморфизма φ фрагмента R в эталон выполняется равенство $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$. Следовательно $\lambda_{Rt_1} \cup \lambda_{Rt_2} \subseteq \lambda_{As}$, где $\varphi(t_1) = s$. Проведем детерминизацию автомата R': если в нем содержатся дуги (t, x, y_1, t_1) и (t, x, y_2, t_2), где $t_1 \neq t_2$, то в силу последнего включения $y_1 = y_2$ и состояния t_1, t_2 отождествляем. Проводя такое отождествление до тех пор, пока это возможно, получим, в силу сказанного, частичный детерминированный автомат R_1, для которого $R \leqslant R_1$. На множестве состояний автомата R_1 опять определяем отношение α, затем строим R_1 и, детерминизируя его, получим R_2. Проводя такие построения, получим последовательность автоматов $R \leqslant R_1 \leqslant R_2 \leqslant \ldots \leqslant R_i \leqslant \ldots$. По построению все R_i являются фрагментами эталона и число состояний автомата R_i не меньше числа состояний автомата R_{i+1}. Поэтому найдется такое i, что $R_i = R_{i+1}$. В этом случае отношение α на состояниях автомата R является тривиальным, то есть $(t_1, t_2) \in \alpha$, если $t_1 = t_2$. Автомат R_i в этом случае назовем замыканием автомата R по верифицированной системе (J, σ) идентификаторов состояний.

Пусть Q — замыкание фрагмента R по некоторой верифицированной системе (J, σ). Процедура построения Q однозначно определяет канонический гомоморфизм φ автомата R на Q, для которого $\varphi(R) = Q$. Ядро гомоморфизма φ — это такая конгруэнтность α, что $R/\alpha = Q$. Из неравенства $R \leqslant Q$ следует включение $\mathsf{A}(R) \supseteq \mathsf{A}(Q)$. Легко показать, что обратное включение не имеет места. Пусть $F(R) = \mathsf{A}(R) \cap \mathsf{F}$. Покажем, что $F(R) \subseteq F(Q)$. Пусть $B \in F(R)$. Тогда $R \leqslant B$. Если состояния t_1, t_2 отождествляются при переходе от фрагмента R и R', то из $\sigma_R \subseteq \alpha_B$ следует, что для любого гомоморфизма φ автомата R в B $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$. Поэтому детерминизация автомата R' дает автомат R_1, для которого $R \leqslant R_1 \leqslant B$ и $F(R_i) \subseteq F(R_1)$. Аналогично показывается, что $F(R_i) \subseteq F(R_{i+1})$. Следовательно $F(R) \subseteq F(Q)$. Из сказанного вытекает утверждение.

Лемма 2.20. *Для любой верифицированной системы (J, σ) фрагмента R класс $F(R)$ совпадает с классом $F(Q)$, где Q — это замыкание фрагмента R по этой системе.*

Из этой леммы очевидно следуют полезные утверждения. Пусть задана тройка (A, F, τ), R_i — правильные фрагменты эталона, $i = 1, 2$ и Q_i — замыкание фрагмента R_i по некоторой верифицированной в R_i системе (J_i, σ_i).

Следствие 2.21.

1) *Если $A \subseteq Q_1/\varepsilon$, то R_1 — представление эталона A относительно F и τ.*
2) *Если $Q_1 = Q_2$, то R_1 — представление для (A, F, τ) точно тогда, когда R_2 — тоже представление.*

Следствие 2.21, п. 1, в неявном виде использовалось в ряде работ, начиная с работы Хенни [35] при построении контрольных экспериментов, причем как правило, стремились к тому, чтобы Q_1 совпадало с A. В роли верифицированной системы выступало чаще всего множество простых начальных идентификаторов $\{(p, \lambda(s, p))\}_{s \in S}$ эталона, порожденное диагностическим словом p.

Условие п. 1 следствия 2.21 является только достаточным в общем случае. Однако в некоторых случаях оно является и необходимым. Рассмотрим эти случаи.

Пусть $F = \varepsilon_i(A)$ и $\tau = \iota$. Пусть так же $D_A^i = \sum\limits_{s \in S} D(\lambda_s^i)$. Заметим, что в этом случае $F \subseteq \mathsf{A}(D_A^i)$.

Теорема 2.22. *D_A^i является представлением эталона относительно $\varepsilon_\iota(A)$ и ι тогда и только тогда, когда замыкание фрагмента D_A^i по некоторой системе (J, σ), верифицированной в R, изоморфно эталону.*

Теорема 2.22 дает первый пример ситуации, когда при построении представлений идентификаторы необходимы. Эта теорема является теоремой существования и не указывает каким образом строить представление.

Рассмотрим структуру представлений в случае, когда F — это n-полный класс F_n, где $n = n_A$, а $\tau = \iota$. Пусть $R \leqslant A$. Дуга (t, x, y, t') автомата R называется критической по гомоморфизму φ этого фрагмента в эталон, если она является единственным прообразом по φ некоторой дуги эталона. Состояние t называется висячим, если $\delta_R(t, x)$ не определено ни для какого x.

Состояние автомата R называется изолированным, если оно является висячим и переходящим одновременно. Дуга (t, x, y, t'), где $t \neq t'$ называется изолированной, если она составляет компоненту связности в графе R. Представление R назовем тупиковым, если удаляя из него хоть одну дугу получим автомат, не являющийся представлением.

Слово $(x_1, y_1) \ldots (x_i, y_i)$ называется неприводимым обходом (по всем дугам) эталона, если оно является обходом эталона, начиная из некоторого состояния s, а $(x_1, y_1) \ldots (x_{i-1}, y_{i-1})$ обходом из этого состояния не является. Через $d(w)$ будем обозначать длину вход-выходного слова w.

Рассмотрим случай, когда эталон является автономным автоматом, то есть когда X состоит из единственного символа. Легко видеть, что всякий приведенный автономный автомат является определенно диагностируемым автоматом порядка не большего $n - 1$.

Теорема 2.23. *Для автономного эталона равносильны следующие утверждения:*

1) *$w \in \Phi_A$ является контрольным экспериментом относительно F_n и ι;*
2) *$w = w'w''$, где w' — неприводимый обход, а w'' — начальный идентификатор некоторого состояния эталона;*
3) *Замыкание Q фрагмента $R(w)$ по (J, σ), где J состоит из простых начальных идентификаторов, верифицированных в $R(w)$, а σ — диагональ, изоморфно эталону.*

Утвержение 2 теоремы 2.23 дает конструктивный способ проверки, является ли предъявленное вход-выходное слово контрольным экспериментом для эталона относительно F_n и ι. Это утверждение дает также алгоритм построения такого эксперимента. Из теоремы 2.23 непосредственно вытекает, что слово x^{2N-1}, поданное на вход автономного автомата с не более, чем N состояниями, вместе с реакцией q исследуемого автомата на это слово позволяет распознать исследуемый автомат.

Результаты последней теоремы позволяют оценить длину контрольного эксперимента, указанного в ней.

Следствие 2.24. *Длина кратчайшего контрольного эксперимента для автономного автомата относительно* F_n *и* ι *не может быть меньше* $n+1$ *и не превосходит* $2n+1$, *причем для всех эти оценки достижимы.*

Рассмотрим структуру представлений для частных видов эталона. Пусть дан некоторый автомат. k-м ядром этого автомата называется его подавтомат, порожденный всеми такими состояниями, в которых оканчивается хоть одно вход-выходное слово длины k. Известно, что если автомат является автоматом с конечной памятью порядка k, то его k-е ядро включается в конечный фактор.

Теорема 2.25. *Пусть эталон сильносвязен, или автомат с конечной памятью порядка* k. *Пусть класс представлений эталона относительно некоторого* F *и* ν_1 *не пуст. Если для фрагмента* R *эталона и некоторой верифицированной системы* (J,σ) k*-ые ядра эталона и замыкания* Q *фрагмента* R *по этой системе изоморфны, а* $\Phi_A^k = \Phi_Q^k$, *то* R *— представление относительно* F_n *и* ν_1.

Пусть F — это n-полный класс F_n, $\tau = \nu_1$ и класс $\mathsf{R}_T(A, \mathsf{F}_n, \nu_1)$ не пуст.

Зафиксируем некоторый фрагмент R эталона и верифицированную в R систему (J,σ), у которой J состоит из всех верифицированных в R простых начальных и конечных идентификаторов длины не большей k, а σ — сужение σ_R на J. Пусть Q — замыкание R по (J,σ).

Теорема 2.26. *Пусть A — определенно диагностируемый автомат порядка k и $\Phi_Q^k = \Phi_A^k$. R является представлением эталона относительно F_n и ν_1 тогда и только тогда, когда k-е ядра эталона и замыкания Q изоморфны.*

Эта и предыдущие теоремы являются теоремами существования, так как не дают метода построения представлений. Центральным моментом этих результатов является нахождение верифицированной в системы идентификаторов состояний. Некоторые частные приемы верификации идентификаторов рассмотрены в [4]. Общие методы верификации, по-видимому, очень сложны и до сих пор не разработаны. Поэтому представляет интерес рассмотрение альтернативных подходов к изучению представлений, где верификация заменена проверкой некоторых конструктивных свойств. Один из возможных подходов рассмотрен ниже.

Рассмотрим условия, при которых правильный фрагмент R относительно F_n и ι является представлением для эталона A в предположении, что он является определенно диагностическим автоматом порядка k.

Пусть φ есть гомоморфизм автомата R на A. Каждому состоянию s эталона поставим в соответствие семейство ν_s подмножеств входных слов длины k по правилу: $z \in \nu_s$, если в R существует состояние $t \in \varphi^{-1}(s)$ такое, что z состоит из всех слов p длины k, для которых $\delta_R(t,p)$ определено. Семейство ν_s назовем правильным, если элементы ν_s несравнимы по включению. Семейство ν_s назовем полным по X, если для всякого $x \in X$ найдется класс $z \in \nu_s$, содержащий слово, начинающееся символом x. Положим $M(A,\varphi) = \{\nu_s\}_{s\in S}$. Через $\bigcup M(A,\varphi)$ обозначим семейство, состоящее из всех элементов z всех семейств ν_s из $M(A,\varphi)$. Семейство $M(A,\varphi)$ назовем простым, если для любого $B \in \mathsf{F}_n$ и любого гомоморфизма ψ автомата R на B из равенства $\bigcup M(A,\varphi) = \bigcup M(B,\psi)$ следует $M(A,\varphi) = M(B,\psi)$. Введем операцию сложения семейств ν_s следующим образом: слова $p,q \in X^k$ принадлежат одному классу семейства $[\nu_a+\nu_b]$, если существует последовательность $r_1,\ldots,r_l$ слов, для которых $r_1 = p$, $r_l = q$ и пара $(r_i r_{i+1})$ принадлежит классу хоть одного из семейств ν_a,ν_b.

Теорема 2.27. *Пусть существует гомоморфизм φ фрагмента R на эталон A, причем $M(A,\varphi)$ обладает свойствами 1–3, где*

1) *Каждое $\nu_s \in M(A, \varphi)$ является правильным частичным разбиением множества X^k, полным по X;*
2) *Если $a \neq b$, $a, b \in S$, то разбиение $[\nu_a + \nu_b]$ состоит из одного класса;*
3) *Семейство $M(A, \varphi)$ является простым.*

Тогда R является представлением эталона относительно класса F_n и ι.

Рассмотрим определенно диагностируемый эталон порядка $k = 1$. По фрагменту R построим автомат Q_1 следующим образом. Отождествим в фрагменте R состояния, которые порождают одно и то же вход-выходное слово длины 1. Получим в общем случае недетерминированный частичный автомат R'. Затем проведем детерминизацию автомата R' точно также, как при построении замыкания. Результат детерминизации обозначим через Q_1. Таким образом, автомат Q_1 является замыканием фрагмента R по системе идентификаторов (J, σ), где J состоит из всех простых начальных идентификаторов длины 1 эталона, а σ — диагональ, причем верификация этой системы не проводится.

Пусть существует гомоморфизм φ фрагмента Q_1 на A. Рассмотрим семейство $M(A, \varphi)$. Условие 1 теоремы 2.27 равносильно тому, что каждое ν_s является разбиением множества X. Условие 2 — тому, что для $a \neq b$ $[\nu_a + \nu_b] = 1$, где 1 — единица решетки разбиений на множестве X, то есть разбиение, состоящее из одного класса X.

Имеет место следующий критерий.

Теорема 2.28. *Фрагмент R определенно диагностируемого порядка 1 эталона является его представлением относительно F_n и ι тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия:*

1) *Фрагмент Q_1 не имеет висячих вершин и $\varphi(Q) = A$ для всех гомоморфизмов φ этого фрагмента в эталон;*
2) *Семейство $M(A, \varphi)$ разбиений алфавита X, порожденное фрагментом Q_1 обладает свойством: $[\nu_a + \nu_b] = 1$, для всех $a \neq b$, где $a, b \in S$;*
3) *Это семейство является простым.*

В [6] показано, что при $n > 2$ и $m > 4$ условия 1–3 теоремы независимы.

2.4. Представления определенно диагностируемых автоматов

В настоящем разделе изучаются свойства правильных текстуальных представлений определенно диагностируемых порядка k (ОД-k) автоматов. Выбор таких эталонов определяется следующими соображениями. (ОД-k) автоматы обладают максимальным разнообразием внешнего поведения среди автоматов с одной и той же функцией переходов. В связи с этим кажется вероятным, что построение представлений таких эталонов менее трудоемко по сравнению с общим случаем. Кроме того, представление автомата с менее разнообразным поведением в большинстве случаев порождает представление ОД-1-автомата. Поэтому построение представления ОД-1-автомата можно рассматривать как промежуточный этап построения автомата с менее разнообразным поведением.

В разделе сформулированы необходимые и достаточные условия (критерии), при которых фрагмент R является представлением ОД-1 эталона относительно F_n и различных τ. Для случая описана структура экономных представлений. Такие представления позволяют строить экономные контрольные эксперименты и могут быть полезны при получении оценок длины контрольных экспериментов.

Найден критерий, при котором вход-выходное слово является контрольным экспериментом для ОД-k-эталона, $k \leqslant 11$, относительно F_n и ι.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть A — некоторый автомат с n состояниями, и автомат R гомоморфно отображается в A. Определить, является ли фрагмент R представлением автомата A относительно n-полного класса и $\tau = i$. В предыдущем разделе был предложен метод решения этой задачи при наличии некоторой информации о верифицированных в R идентификаторах поведения состояний. Исходя из этой информации, по определенным правилам строилась последовательность автоматов, отражающая прирост информации в процессе анализа фрагмента R. Эта последовательность автоматов за конечное число шагов сходилась к единственному так называемому предельному автомату — замыканию Q. Вид замыкания Q и определяет, является ли этот фрагмент представлением автомата A. Однако априорной информации об идентификаторах автомата A может не быть. Тогда совокупность идентификаторов приходится определить по виду автомата R, что в общем случае является весьма сложной задачей. Уровень ее сложности определяется как свойствами автомата A, так и свойствами фрагмента R. С этой точки зрения ОД-1-автоматы являются идеальными объектами — по виду отображающихся в них автоматов легко определить начальное множество верифицированных идентификаторов.

Пусть R — фрагмент эталона, для которого выполняется равенство $\Phi^1_A = \Phi^1_R$. Из свойств определения класса F_n вытекает, что каждое слово $(x, y) \in \Phi^1_R$ является простым начальным идентификатором состояний любого $B \in \mathsf{F}_n$, для которого $R \leqslant B$. Поэтому такой автомат B является ОД-1 автоматом. Множество Φ^1_R принимаем в качестве начального множества верифицированных в R идентификаторов. Введем на множестве T состояний фрагмента R некоторые отношения. Пусть λ^1_{Rt} — множество всех вход-выходных слов длины 1, порождаемых состоянием t фрагмента R, а ψ^1_{Rt} — множество всех вход-выходных слов длины 1, которые оканчиваются в этом состоянии. Полагаем $(s, t) \in \beta$, если $\lambda^1_{Rt} \cap \lambda^1_{Rs} \neq \varnothing$ или $\psi^1_{Rt} \cap \psi^1_{Rs} \neq \varnothing$, где $s, t \in T$. По определению рефлексивно и симметрично. Пусть α — транзитивное замыкание отношения β, то есть $\alpha = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \beta^i$ — наименьшая эквивалентность, для которой $\alpha \supseteq \beta$.

Лемма 2.29. *Если $R \leqslant A$, то α является конгруэнцией на T.*

Конгруэнтность α на состояниях фрагмента R эталона A однозначно определяет фактор-автомат R/α. Ясно, что $R \leqslant R/\alpha \leqslant A$. Если $R \leqslant A$ и $\Phi^1_A = \Phi^1_R$, то R/α является замыканием фрагмента по верифицированной системе (J, σ), где $J = \Phi^1_A$ и σ — диагональ. Автомату R/α поставим в соответствие обыкновенный неориентированный граф $G(R)$: множеством его вершин является множество состояний этого автомата, то есть множество T/α классов конгруэнтности α; вершины $\alpha(a)$ и $\alpha(b)$ соединены ребром, если $\alpha(a) \neq \alpha(b)$ и функция выходов Λ автомата R/α такова, что $\Lambda(\alpha(a),x)$, $\Lambda(\alpha(b),x)$ одновременно определены для некоторого $x \in X$, и, стало быть, $\Lambda(\alpha(a),x) \neq \Lambda(\alpha(b),x)$. Будем говорить, что граф $G(R)$ однозначно n-раскрашиваем, если все раскраски его вершин в n цветов изоморфны.

Теорема 2.30. *Автомат R является представлением ОД-1 эталона относительно F_n и ι тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия:*

1) $R \leqslant A$;

2) $\Phi^1_A = \Phi^1_R$;

3) Граф $G(R)$ однозначно раскрашиваем.

Эта теорема указывает, наряду с теоремой 2.28, конструктивный способ проверки того, является ли предъявленный фрагмент R замыканием эталона относительно вышеуказанных F и τ. Проверка сводится к проверке однозначности раскраски, то есть к хорошо известной комбинаторной задаче. Конструктивные критерии «быть представлением» из теорем 2.28, 2.30 могут служить правилами завершения контрольных экспериментов различного вида: пассивного эксперимента при так называемом функциональном контроле [32, 41], когда экспериментатор только наблюдает входы и выходы автомата в процессе его штатного функционирования; активного эксперимента, когда на вход автомата поступает (псевдо-) случайная последовательность; активного тестового эксперимента, когда экспериментатор подает на автомат специально построенную входную последовательность [32, 41]. Эти критерии полезны и при разработке алгоритмов построения таких последовательностей.

Напомним, что представление $R \in \mathsf{R}_\tau(A,\mathsf{F}_n,\iota)$ называется минимальным, если для любого представления $Q \in \mathsf{R}_\tau(A,\mathsf{F}_n,\iota)$ из неравенства $Q \leqslant R$ следует включение $R \leqslant Q$. Из определения вытекает, что минимальные представления не имеют гомоморфизмов в себя, кроме изоморфизмов и не имеют изоморфных компонент связности. Другими словами, минимальные представления — это такие представления, в которых нельзя расщеплять и дублировать состояния или вычеркивать дуги, то есть минимальное представление — это некоторый «неделимый» фрагмент функционирования эталона.

Правильной частью $O(R)$ автомата R назовем автомат, полученный из R удалением всех его изолированных дуг (но не петель).

Пусть $t \in T$ — некоторое состояние автомата R. Обозначим через $O(t)$ совокупность всех тех дуг автомата R, начала или концы которых совпадают с t. Каждую петлю (t, x, y, t) из $O(t)$ заменим парой дуг (t', x, y, t), (t, x, y, t'') и поместим их в $O(t)$. Все состояния в дугах из $O(t)$ отличные от t (включая t', t'') переобозначим так, чтобы в разных дугах не встречалось одно и то же состояние. Каждое двухэлементное подмножество множества $O(t)$ образует частичный автомат, имеющий 3 состояния, у которого состоянию t инцидентно две дуги, а остальным двум состояниям — по одной. Прямую сумму всех таких автоматов обозначим через $\Sigma O(t)$. Прямую сумму по всем $t \in T$ всех автоматов $\Sigma O(t)$ обозначим через ΣR. Ясно, что $\Sigma R \leqslant O(R) \subseteq R$.

Теорема 2.31. *Автомат R является представлением ОД-1 эталона относительно F_n и ι тогда и только тогда, когда ΣR является представлением.*

Следствие 2.32. *Если R является минимальным представлением ОД-1 эталона относительно F_n и ι, то $R = \Sigma R$.*

Следствие 2.33. *Для любого представления R ОД-1 эталона относительно F_n и ι существует гомоморфно отображающееся на него минимальное представление.*

Теорема 2.28 дает критерий, при котором фрагмент R является представлением ОД-1 эталона относительно F_n и ι в терминах свойств разбиений ν_s. Теорема 2.30 дает критерий в терминах однозначной раскраски вспомогательного графа, полученного на замыкании фрагмента по верифицированной системе (J, σ), где $J = \Phi_A^1$ и σ — диагональ множества J. Следующее утверждение показывает, что увеличение информации о совместимости верифицированных идентификаторов снимает необходимость исследования раскрасок вспомогательного графа. Пусть R некоторый фрагмент. Зафиксируем верифицированную систему (J, σ), где J состоит из всех, верифицированных в

R, простых начальных и конечных идентификаторов состояний длины 1, а σ равно сужению σ_R на J. Замыкание фрагмента R по (J,σ) обозначим через Q.

Теорема 2.34. *Фрагмент R является представлением ОД-1 эталона относительно F_n и ι тогда и только тогда, когда $Q = A$.*

Эта теорема показывает, что верификация идентификаторов состояний равносильна проверке существования однозначной n-раскраски и равносильна проверке свойств разбиений ν_s.

Рассмотрим условия, при которых фрагмент является представлением относительно различных τ. Пусть $\tau = \nu_1$.

Следствие 2.35. *Фрагмент R является представлением ОД-1 относительно F_n и ν_1 тогда и только тогда, когда первые ядра эталона и замыкания Q изоморфны, и $\Phi^1_A = \Phi^1_Q$.*

Рассмотрим случай $\tau = \varepsilon_1$.

Теорема 2.36. *R является представлением ОД-1 эталона относительно F_n и ε_1 тогда и только тогда, когда $\Lambda^1_Q \supseteq \Lambda^1_A$.*

Рассмотрим отношение неотличимости ρ_{ri} автоматов экспериментами высоты i и кратности r на классе F_n. Пусть A — ОД-1 эталон, и $(A,B) \in \rho_{ri}$. Тогда B тоже ОД-1 автомат. Если $r = i = 1$, то $\Phi^1_A = \Phi^1_B$. Если $r = 1$ и $i \geqslant 2$, то $\Phi^1_A = \Phi^1_B$. Так как A, B автоматы с конечной памятью порядка k, то по следствию 3.1.18, $\Phi^1_A = \Phi^1_B$, то есть $(A,B) \in \nu_1$. Пусть $i = 1$ и $r \geqslant 2$. Покажем, что в этом случае $(A,B) \in \varepsilon_1$. Пусть для состояния s эталона $\lambda^1_{As} = \{w_1, \ldots, w_l\}$. Так как $(A,B) \in \rho_{ri}$, то найдется состояние t автомата B, для которого $w_1, w_2 \in \lambda^1_{Bt}$ и состояние v, для которого $w_2, w_3 \in \lambda^1_{Bv}$. Но B является ОД-1 автоматом и, значит, $t = v$. Поэтому $\lambda^1_{As} = \lambda^1_{Bv}$ и $(A,B) \in \varepsilon_1$. Пусть теперь $i, r \geqslant 2$. Точно также, как в предыдущем случае показываем, что $(A,B) \in \varepsilon_2$. Поскольку A и B ОД-1 автоматы, то существует отображение множества φ состояний S автомата A на множество T автомата B, заданное правилом: $\varphi(s) = t$, если $\lambda^1_{As} = \lambda^1_{Bv}$. Это отображение — биекция, и так как $(A,B) \in \varepsilon_2$, то оно изоморфизм. Поэтому $A = B$, то есть $(A,B) \in i$. Проведенные рассуждения показывают, что если $(A,B) \in \rho_{ri}$, то существует всего

4 возможности: $(A, B) \in \rho_{r1}$, $(A, B) \in \nu_1$, $(A, B) \in \varepsilon_1$, $(A, B) \in i$. Очевидно, что R является представлением ОД-1 эталона относительно F_n и i тогда и только тогда, когда $\Phi_R^1 = \Phi_A^1$. Утверждения 2.33–2.35 дают соответствующие критерии для оставшихся случаев. Таким образом, проведенные рассуждения дают критерий, при котором R является представлением ОД-1 эталона относительно F_n и произвольного ρ_{ri}.

Заметим, что не только увеличение информации о верифицированной системе идентификаторов может «снимать» требование однозначной раскраски вспомогательного графа. Структура самого класса F, связанного с автоматом-эталоном определенным образом, может упрощать критериальные требования к представлениям. В качестве одного из таких примеров ниже приведен класс так называемых локально порожденных (эталоном) автоматов, изучавшихся в [42–44].

Рассмотрим класс A автоматов, порожденных локальными преобразованиями эталона [6, 42, 43]. Окрестностью O_s состояния $s \in S_A$ назовем множество всех тех его состояний, которые достижимы из s или из которых достижимо s входными словами длины, не большей 1. Пусть теперь автоматы из A получены из эталона заменой состояния $\delta_A(s, x)$ некоторым $t \in O_s$. Полученный класс является подклассом предыдущего. Ясно, что если в эталоне существует компонента связности, состоящая из одного состояния s, то $O_s = \{s\}$ и эта компонента присутствует в любом $B \in \mathsf{A}$. Правильной частью D эталона A назовем автомат, полученный из A удалением всех компонент связности, имеющих одно состояние.

Теорема 2.37. *R является представлением ОД-1 автомата эталона относительно A и i тогда и только тогда, когда $Q \supseteq D$.*

Пусть по-прежнему, A — это ОД-k автомат и w — фрагмент его поведения. Пусть теперь (J, σ) более мощная верифицированная в R система (относительно F_n и i), для которой J состоит из всех простых начальных и конечных идентификаторов состояний, входящих в J_R, а σ — сужение σ_R на J, и Q — замыкание фрагмента $R(w)$ по новой системе (J, σ).

Теорема 2.38. *Вход-выходное слово w является контрольным экспериментом для ОД-k эталона при $k \leqslant 11$ относительно F_n и ι тогда и только тогда, когда замыкание Q изоморфно эталону.*

3. Теоретико-графовые характеризации представлений автомата

В данном разделе основное внимание уделяется задаче характеризации представлений автомата относительно подклассов N-полного класса автоматов, образующихся при наложении определенных ограничений на их структурно-алгебраические и поведенческие свойства. Показано, что теорема 2.30, дающая характеризацию представлений относительно n-полного класса, является представителем целого класса аналогичных утверждений, к получению которых можно подойти с некоторых общих позиций. При этом существенно используются понятия и методы теории бинарных отношений и графов, что позволяет в ряде случаев оценить относительную сложность задачи распознавания представлений в терминах теории NP-полноты [10].

Далее в разделе автомат $A = (S_A, X, Y, \delta_A, \lambda_A)$ это детерминированный конечный автомат Мили, возможно, частичный. Все рассматриваемые автоматы имеют одинаковые входной алфавит X и выходной алфавит Y. Для частичных автоматов предполагаются одинаковыми области определения функций переходов и выходов, которые обозначаем для автомата A через $Dom\, A$. Если φ — гомоморфизм автомата B в автомат A, то образ автомата B будем обозначать через $\varphi(B)$, то есть $\varphi(B)$ такой подавтомат автомата A, что для любой дуги (s, x, y, t) последнего в B существует ее прообраз. При $\varphi(B) = A$ автомат B будем называть полным фрагментом автомата A.

При изучении множества $R(A, F, \tau)$ всех представлений автомата A относительно класса F с точностью τ полагаем, что τ — изоморфизм либо изоморфное включение, F — подкласс класса $\mathsf{F}_n(U)$ всех автоматов с числом состояний n, причем эталон A — приведенный автомат с n состояниями.

Пусть автоматы R и A связаны наличием гомоморфизма, $R \leqslant A$, $R = (S, X, Y, \delta, \lambda)$. Априори или в результате анализа автомата R определяются два отношения на множестве его состояний: отношение совместимости и отношение несовместимости. Первое допускает отождествление состояний, а второе запрещает такое отождествление при гомоморфизме A в любой автомат из класса F. В частности, такие отношения могут вводиться на основе верифицированных идентификаторов состояний, как это описано в предыдущем разделе.

3.1. Отношения совместимости

Отношение σ на множестве состояний фрагмента R назовем верифицированным отношением совместимости, если для любых его состояний a, b и гомоморфизма φ фрагмента R в любой автомат $B \in F$ из того, что $(a, b) \in \sigma$, следует, что $\varphi(a) = \varphi(b)$. Такое отношение σ может определяться как «внутренними» свойствами автомата R и класса F (например, верифицированными идентификаторами состояний), так и «навязываться» извне, за счет дополнительной информации, не проявляющейся явно в эксперименте с автоматами.

Пусть φ — гомоморфизм R в $B \in F$ и $\ker\varphi = \varphi \circ \varphi^{-1}$ — его ядро, являющееся конгруэнцией на множестве состояний автомата R. Этот гомоморфизм может быть не единственным. Пусть Φ — множество всех гомоморфизмов автомата R в автомат B. Тогда $\varepsilon_B = \bigcap\limits_{\varphi\in\Phi} \ker\varphi$ — наименьшая (по включению) конгруэнция среди всех конгруэнций, определяемых гомоморфизмами R в B. Если B пробегает все элементы класса F, то пересечение всех конгруэнций ε_B определяет конгруэнцию $\varepsilon_F(R) = \bigcap\limits_{B\in F} \varepsilon_B$ на множестве состояний автомата R.

Всякое подмножество $\sigma \subseteq \varepsilon_F(R)$ назовем верифицированным (относительно класса F) отношением совместимости на множестве состояний автомата R.

В общем случае σ не является конгруэнцией, но может быть естественным образом расширено до нее, с помощью процесса, соответствующего детерминизации автомата R, определяемого отношением σ совместимости его состояний, до конгруенции σ^*, наименьшей среди всех конгруэнций, содержащих σ [11]. По ней корректно (на основании утверждения, аналогичного лемме 2.29) определяется фактор-автомат автомата R, который назовем замыканием R по σ и обозначим через $[R]_\sigma$.

Обозначим через $E_F(R)$ множество всех верифицированных конгруэнций, упорядоченное отношением включения.

Справедливо утверждение [11].

Теорема 3.1. *Множество $E_F(R)$ верифицированных конгруэнций есть решетка с операциями* $\inf(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$, $\sup(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = (\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2)^*$, *единицей* $1 = \varepsilon_F(R)$ *и нулем* $0 = i_s$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in E_F(R)$, *где* i_s — *диагональ множества состояний s автомата R, соответствующая пустому отношению совместимости.*

Отношения совместимости σ такие, что $\sigma^* = \varepsilon_F(R)$, несут максимальную информацию о возможности отождествления состояний, пустое отношение $\sigma = \varnothing$, $\sigma^* = i_s$ указывает на отсутствие какой-либо информации об отождествлении состояний.

Пусть σ_1 верифицированное отношение совместимости, $R_1 = [R]_{\sigma_1}$. Через F_R обозначим множество тех автоматов $B \in F$, для которых $R \leqslant B$, то есть, $F_R = F(R) \cap F$, где $F(R)$ — класс описываемых фрагментом R автоматов из множества $\mathsf{F}(U)$.

Теорема 3.2. *Если σ — верифицированное (относительно класса F) отношение на множестве состояний автомата R, то описываемый автоматом R класс F_R совпадает с классом F_{R_1}, описываемым его фактор-автоматом $R_1 = [R]_\sigma$. При этом всякий гомоморфизм φ автомата R в автомат $B \in F$ может быть представлен как $\varphi = \eta \circ \beta$, где η — естественный гомоморфизм R в R_1, а β — гомоморфизм R_1 в B.*

3.2. Отношения несовместимости

Отношение ρ на множестве состояний фрагмента R назовем верифицированным отношением несовместимости, если для любых его состояний a, b и гомоморфизма φ фрагмента R в любой автомат $B \in F$ из того, что $(a,b) \in \rho$, следует, что $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Иными словами, если $\mu_B = \bigcup\limits_{\varphi \in \Phi} \ker \varphi$, где объединение берется по всем гомоморфизмам φ из R в B, то ρ — верифицированное отношение несовместимости тогда и только тогда, когда $\rho \subseteq S \times S \setminus \bigcup\limits_{B \in F} \mu_B = \rho_F(R)$, где объединение берется по всем $B \in F$, для которых существует гомоморфизм R в B.

Пусть σ — некоторое отношение совместимости на множестве состояний автомата R, а ρ — отношение несовместимости на нем. Посредством отношения совместимости отношение несовместимости может быть расширено (снова конструктивно) до некоторого максимального отношения ρ^* несовместимости, согласованного с σ, которое назовем верифицированным замыканием ρ.

На фактор-автомате $R_1 = R/\varepsilon$ отношение ρ^* индуцирует на множестве состояний S/ε автомата R_1 отношение верифицированной несовместимости ρ_1 по правилу: $(\pi_i, \pi_j) \in \rho_1$, если в ρ^* существует такая пара (s, t), что $s \in \pi_i$, $t \in \pi_j$.

Множество верифицированных замыканий отношений несовместимости, согласованное с верифицированной конгруэнцией ε, упорядоченное отношением включения, обозначим через $\mathsf{P}^*_R(F, \varepsilon)$. Оно имеет наибольшее верифицированное отношение несовместимости $\rho_F(R)$. Справедливо утверждение, аналогичное теореме 3.1.

Теорема 3.3. *Для любой верифицированной конгруэнции $\varepsilon \in E_R(F)$ множество $\mathsf{P}^*_R(F, \varepsilon)$ является решеткой с операциями $\inf\{\rho_1, \rho_2\} = \rho_1 \cap \rho_2$ и $\sup\{\rho_1, \rho_2\} = (\rho_1 \cup \rho_2)^*_\varepsilon$, $\rho_1, \rho_2 \in \mathsf{P}_R(F, \varepsilon)$, нулем, равным пустому отношению $\varnothing$, и единицей, равной $\rho_F(R)$.*

3.3. Ассоциированные графы

Пару $P = (\sigma, \rho)$ верифицированных отношений совместимости σ и несовместимости ρ будем называть верифицированной парой для автомата R (относительно класса F). Пусть $P = (\sigma, \rho)$ — верифицированная пара для R относительно класса F. С R и P свяжем обыкновенный неориентированный граф $G(R, P) = (V_R, U_R)$, определенный следующим образом: множество его вершин V_R есть множество S/ε классов верифицированной конгруэнцией $\varepsilon = \sigma^*$; если $v = [s]$ и $w = [t]$ — классы этой конгруэнции, представителями которой являются состояния s и t соответственно и $(s, t) \in \rho^*_\varepsilon$, то $(v, w) \in U_R$.

На состояниях x автомата $[R]$ отношение ρ индуцирует верифицированное отношение несовместимости ρ': если $[s]$ и $[t]$ — вышеуказанные классы, то есть состояния автомата $[R]_\sigma$, то $([s], [t]) \in \rho'$ тогда и только тогда, когда $(s, t) \in \rho^*_\varepsilon$. Поэтому граф $G(R, P)$ можно понимать как задание индуцированного верифицированного отношения ρ' несовместимости на множестве состояний автомата $[R]_\sigma$, так как ρ' — антирефлексивно и симметрично.

Граф $G(R,P)$ будем называть ассоциированным с автоматом R посредством пары P, или, более коротко, ассоциированным с парой (R,P).

Пусть $G=(V,U)$ — некоторый обыкновенный неорграф. Напомним, что правильной n — раскраской графа G называется такое отображение φ множества вершин графа в некоторое n-элементное множество K, при котором смежные вершины отображаются в разные элементы из K. Две раскраски φ_1 и φ_2 называются изоморфными, если $\ker\varphi_1=\ker\varphi_2$. Граф называется однозначно n-раскрашиваемым, если все его n-раскраски изоморфны [9].

Поставим в соответствие автомату $R=(S,X,Y,\delta,\lambda)$ семейство $X(R)$ подмножеств множества $X(R)$: $X_s\in X(R)$, $s\in S$, если $X_s=\{x\in X\,|\,(s,x)\in Dom\,R\}$. Через $\Gamma(X(R))$ обозначим граф пересечений семейства X, у которого множество вершин $V(X(R))$, и $\{s,t\}\in U(X(R))$ если $X_s\cap X_t\neq\varnothing$.

3.4. Характеризация представлений и их сложность

Далее задача идентификации автомата рассматривается при следующих ограничениях.

Все рассматриваемые классы являются подмножествами множества $\mathsf{F}_c(U)$ всех приведенных автоматов в алфавите $U=X\times Y$. Автоматы, если не оговорено противное, неинициальные. Для простоты полагаем, что все автоматы из $F\subseteq\mathsf{F}_c(U)$ связные, и если $A\in F$ — выделенный автомат-эталон, то он не вкладывается изоморфно ни в какой другой автомат $B\in F$.

Пусть заданы класс $F\subseteq\mathsf{F}_c(U)$, эталон $A\in F$ и фрагмент R_A автомата A. Обозначим через $I(A,R,F)$ множество $F(R_A)\cap F$. Под задачей идентификации автомата A в классе F понимаем нахождение такого фрагмента $R\in F(A)$, что $I(A,R,F)=\{A\}$ (единственность понимается с точностью до изоморфизма), то есть идентификация осуществляется с точностью, равной изоморфизму).

Фрагмент R, решающий эту задачу, есть представление автомата A относительно класса F с точностью τ, являющейся изоморфизмом.

Основной интерес представляют нетривиальные представления, не содержащие в явном виде информацию о полном функционировании анализируемого автомата.

Наиболее изученными среди нетривиальных представлений являются контрольные эксперименты, как простые, так и кратные. Такие представления обладают наиболее бедными отношениями совместимости и несовместимости, и по структуре графов переходов фрагментов их можно классифицировать как древовидные. Они образуют подкласс класса ациклических представлений, в которых возможно отождествление некоторых висячих вершин. В широком смысле циклические представления это такие представления, которые в графе переходов имеют сильносвязные подграфы, и класс тривиальных представлений является подмножеством этого класса.

Используя теорему 1.1, можно привести примеры, показывающие, что существование одного из видов представлений, например, нетривиальных циклических, не влечет существование, например, контрольных экспериментов (древовидных представлений).

Варьирование классами в задаче идентификации приводит к различным по сложности конкретным задачам описания соответствующих представлений. Само задание классов может осуществляться различными способами. В предыдущих разделах приведены варианты таких описаний с помощью различных дескрипторов автоматов.

Пусть $R \in \mathsf{R}(A, F, \tau)$ — нетривиальное представление автомата A, и $|S_A| = n$. Верифицированная пара $P = (\sigma, \rho)$ для R относительно F определяет структуру раскрасок графа $G(R, P)$. Далее будем рассматривать только подклассы F n-полного класса, и эталоны с n состояниями. Назовем класс F n-плотным для эталона A, если для любого его фрагмента R такого, что $\varphi(R) \neq A$ для некоторого гомоморфизма φ, следует, что R есть фрагмент некоторого другого автомата B из F (более широкое понятие m-плотного класса рассмотрено в [45]). Потребуем, чтобы рассматриваемые классы были n-плотными для эталонов.

Покажем, что некоторые хорошо известные классы являются n-плотными для всех принадлежащих им автоматов.

Теорема 3.4. *n-полный класс F_n является n-плотным для любого принадлежащего ему автомата с n состояниями.*

Пусть $\Lambda_A^i = \{\lambda_s^i \mid s \in S_A\}$, и λ — функция выходов автомата $A \in F_N$. Обозначим $L_N^i(A) = \{B \in F_N \mid \Lambda_B^i = \Lambda_A^i\}$.

Теорема 3.5. *Класс $L_N^1(A)$ является N-плотным для A.*

Класс $L_N^1(A)$ полностью определяется сохранением одношаговой функции выходов автомата A при произвольном изменении функции переходов.

Другим предельным случаем можно считать сохранение функции переходов автомата A при произвольном изменении функции выходов.

Обозначим через $D_N(A)$ множество всех автоматов из F_N, которые являются приведенными формами автоматов, полученных из A всевозможными изменениями отметок его дуг.

Теорема 3.6. *Класс $D_N(A)$ является N-плотным для приведенного автомата A с N состояниями.*

Пусть A — ОД-1 автомат, $|S_A| = n$ и F — n-плотный для A класс.

Теорема 3.7. $R \in \mathsf{R}(A, F, \tau)$ *тогда и только тогда, когда существует такая верифицированная пара $P = (\sigma, \rho)$ для R относительно F, что выполняются условия:*

1) существует гомоморфизм φ автомата R в эталон A;

2) $\Phi^1(R) = \Phi^1(A)$;

3) граф $G(R, P)$ однозначно n-раскрашиваемый.

Приведенные достаточные и необходимые условия для распознавания представлений постулируют только существование верифицированной пары. Для ряда классов дается конструктивный способ построения таких верифицированных пар, позволяющий сводить задачу анализа фрагментов на свойство быть представлением к задаче раскраски некоторого графа.

Основным средством построения верифицированных пар являются идентификаторы состояний. Напомним, что фрагмент R автомата A с фиксированным состоянием t называется идентификатором состояния s автомата A, если для любого гомоморфизма φ фрагмента R в A выполняется равенство $\varphi(t) = a$.

Как обычно, Φ_A обозначает множество всех вход-выходных слов (слов в алфавите $X \times Y$), порождаемых автоматом A, а Φ_A^k — его подмножество из слов длины k. Если R — некоторый, вообще говоря, частичный автомат, s — его состояние, то λ^k_{Rs} есть множество всех вход-выходных слов (x,y) длины k, порождаемых состоянием s; $\Phi^k_R = \bigcup\limits_{s \in S_R} \lambda^k_{Rs}$. Множество первых проекций λ^1_{Rs} и ψ^1_{Rs} обозначим через X^+_{Rs} и X^-_{Rs} соответственно (напомним, что ψ^k_{Rs} обозначает множество вход-выходных слов длины k, оканчивающихся в состоянии s). Если фрагмент R ОД-1 автомата A таков, что $\Phi^1_R = \Phi^1_A$, то множество Φ^1_R является множеством простых начальных идентификаторов состояний любого автомата B из класса F_n, фрагментом которого является R, то есть при любом гомоморфизме R в B состояния автомата R, порождающие одну и ту же пару $(x,y) \in X \times Y$, отображаются в одно и то же состояние. Тогда на основании множества Φ^1_R как множества верифицированных идентификаторов (см. часть 2) может быть определена верифицированная пара $P = (\sigma, \rho)$.

Пусть A — ОД-1-автомат. Если $F = F_n$, $A \in F_n$ и A есть ОД-1-автомат, то для любого полного фрагмента $R \leqslant A$ Φ^1_A является множеством верифицированных идентификаторов состояний автомата A. По этому множеству определяется пара верифицированных отношений σ_n и ρ_n на множестве состояний фрагмента R: $(a,b) \in \sigma$, если $\lambda_R(a,x) = \lambda_R(b,x)$ (то есть $\lambda'_{R_a} \cap \lambda'_{R_b} \neq \varnothing$) для некоторого $x \in X$; $(a,b) \in \rho$, если $\lambda_R(a,x) \neq \lambda_R(b,x)$ для некоторого $x \in X$. Тогда $\sigma_n = \sigma^*$, $\rho_n = \rho^*_{\sigma_n}$, и $P_n = (\sigma_n, \rho_n)$ — верифицированная пара. По этой паре определяется ассоциированный граф $G(R, P_n)$, и из теорем 3.4 и 3.7 получаем теорему 2.30, в которой граф $G(R) = G(R, P_n)$. Заметим, что в этом случае граф $G(R) = \Gamma(X(R))$.

Пусть теперь A — групповой ОД-1-автомат, то есть A такой, что при любом фиксированном $x \in X$ $\delta_A(s,x)$ есть перестановка на множестве S_A, $F = G_n \subseteq F_n$ — класс групповых автоматов, и R — полный фрагмент A.

Пусть на множестве S_R заданы отношения σ_1 и ρ_1: $\sigma_1 = \sigma$; $(a,b) \in \rho_1$, если для некоторого $x \in X$ $\lambda_R(a,x) \neq \lambda_R(b,x)$ либо существуют состояния a' и b' такие, что $\delta_R(a',x) = a$, $\delta_R(b',x) = b$ и $\lambda_R(a',x) \neq \lambda_R(b',x)$. Положим $\sigma_g = \sigma^*_1 = \sigma_n$, $\rho_g = \rho^*_{1\sigma_g}$, $P_g = (\sigma_g, \rho_g)$.

Лемма 3.8. *Класс G_n является n-плотным для любого группового ОД-1 автомата при $|S| \geqslant 2$, $|X| \geqslant 2$.*

Из леммы 3.8 и теоремы 3.7 следует

Теорема 3.9. *Автомат R есть представление группового ОД-1 автомата A относительно класса G_n тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

1) существует гомоморфизм автомата R в эталон A;

2) $\Phi^1_R = \Phi^1_A$;

3) граф $G(R, P_g)$ однозначно n-раскрашиваемый.

Из этой теоремы следует, что в отличие от случая, когда в качестве класса F выбирается класс F_n всех автоматов с n состояниями, нетривиальные представления группового автомата относительно класса G_n (точнее, их замыкания) допускают висячие вершины, и контрольные эксперименты, как частный случай представлений, могут содержать неподтвержденные переходы. На основании этой теоремы могут быть построены минимальные представления для этого случая.

Рассмотрим теперь представления автоматов без потери информации. Пусть A — ОД-1-автомат, и A — автомат без потери информации порядка 1 (БПИ-1-автомат [4, 7]), то есть A такой, что для любого его состояния s и различных $x_1, x_2 \in X$ справедливо неравенство $\lambda_A(s, x_1) \neq \lambda_A(s, x_2)$. Пусть класс $I_n \subseteq F_n$ есть класс всех БПИ-1-автоматов. В этом случае для полного фрагмента $R \leqslant A$ определим отношения $\sigma_\omega, \rho_\omega$ следующим образом:

$\sigma_\omega = \sigma_n$; $(a, b) \in \rho_\omega$, если $(a, b) \in \rho_n$ или для некоторых $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ выполняется равенство $\lambda_R(a, x_1) = \lambda_R(b, x_2)$. Тогда $P_\omega = (\sigma_\omega, \rho_\omega)$ — верифицированная пара, и с этой парой ассоциирован граф $G(R, P_\omega)$. В этом случае для класса I_n справедлив аналог леммы 3.8 и теоремы 3.9 с соответствующей заменой ассоциированных графов.

Заметим, что структура ассоциированного графа в этом случае является более регулярной по сравнению с предыдущими случаями.

Вернемся снова к представлениям локально порожденных автоматов, рассмотренных в предыдущем разделе.

Пусть A — ОД-1 автомат, и F_A — множество всех автоматов, локально порожденных A. В классе F_n можно выделить неизбыточное множество автоматов, из которых в совокупности порождается весь класс F_n. Такое множество назовем базисом локальной порождаемости класса F_n и обозначим через M_n(его структура описана в [44]).

Пусть $F = F_A$. Так как функция выходов λ_A сохраняется при локальной порождаемости, то в качестве множества верифицированных идентификаторов для ОД-1 автоматов можно выбрать множество $\Lambda_A^1 = \{\lambda_{As}^1 \mid s \in S_A\}$, где $\lambda_{As}^1 = \{(x,y) \in X \times Y \mid \lambda_A(s,x) = y\}$. Определим пару отношений σ_l и p_l на множестве состояний фрагмента $R \leqslant A$: $(a,b) \in \sigma_1$, если существует такое состояние $s \in S_A$, что $\lambda_{Ra}^1 \cup \lambda_{Rb}^1 \subseteq \lambda_{As}^1$; ρ — отношение несовместимости состояний. Положим $\sigma_l = \sigma_1^*$, $\rho_l = \rho_{\sigma_l}^*$, и тогда $P_l = (\sigma_l, \rho_l)$ — верифицированная пара. Заметим, что здесь $\sigma_1^* = \sigma_1$.

В этом случае также справедлив аналог леммы 3.8 и

Теорема 3.10. *Пусть A связный ОД-1-автомат, $F = F_A$, точность τ — изоморфизм. $R \in (A, F_A, \tau)$ тогда и только тогда, когда пара $P_l = (\sigma_l, \rho_l)$ является определяющей для фрагмента R относительно класса F_A.*

Из определения пары P_l в случае, когда R — представление ОД-1 автомата, следует, что граф $G(R, P_l)$ изоморфен полному графу K_n, где n — число состояний автомата. Очевидно, что K_n однозначно n-раскрашиваем. Тогда аналог теоремы 2.30 в рассматриваемом случае для связных автоматов приобретает вид

Теорема 3.11. *Автомат R есть представление ОД-1 автомата A относительно класса F_A тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

1) *существует гомоморфизм автомата R в эталон A;*
2) *$\Phi_R^1 = \Phi_A^1$;*
3) *граф $G(R, P_l)$ изоморфен графу K_n.*

Если в качестве представлений будем рассматривать контрольные эксперименты, то для связных автоматов, обладающих такими экспериментами относительно класса F_A, из этой теоремы вытекает

Следствие 3.12. *Слово $w \in (X \times Y)^*$ есть контрольный эксперимент ОД-1 автомата A относительно класса F_A тогда и только тогда, когда $w \in \Phi_A$ и $w = w_1(x,y)$, где w_1 — обход автомата A.*

Полученный критерий для контрольных экспериментов позволяют дать еще одну характеризацию контрольных экспериментов ОД-1 автоматов относительно локально порожденного класса автоматов через уже упоминавшиеся доминирующие множества.

Пусть F — некоторый класс автоматов, A — выделенный в нем автомат-эталон. Напомним, что доминирующим множеством класса F называется такое его подмножество F', что выполняется равенство $\Phi_A(F) = \Phi_A(F')$ ($\Phi_A(F)$ — множество контрольных экспериментов A относительно F). Наименьшее по мощности доминирующее множество называется минимальным.

Пусть $F = F_A$ и $F_1(A) \subseteq F_A$ есть множество автоматов, непосредственно порожденных автоматом A, то есть множество таких автоматов, функции переходов которых отличаются от функций переходов автомата A ровно для одной пары $(s, x) \in S \times X$. Каждой такой паре соответствует множество $F_1(s, x) = \{B \in F_1(A) \,|\, \delta(s, x) \neq \delta_B(s, x)\}$. Выберем из каждого класса $F_1(s, x)$ по представителю и образуем из них множество R_1.

Обозначим через $K(A)$ множество всех таких дуг $(s, x, y, t) \in A$, $\delta(s, x) = t$, $\lambda(s, x) = y$, что частичный автомат A', из которого удалена хотя бы одна из этих дуг, не имеет обхода. Пусть D — подавтомат автомата A, не содержащий одноэлементных компонент связности. Если $A \neq D$, то полагаем $K(A) = K(D)$. Удалим из множества R_1 все автоматы $B \in F_1(s, x)$, где (s, x) соответствует дуге из $K(A)$, и получившееся множество обозначим через $R_{\min}$.

Теорема 3.13. *Множество $R_{\min}$ есть минимальное доминирующее множество класса F_A для ОД-1 автомата A, $|R_{\min}| \leqslant mn$, и существует автомат, для которого $|R_{\min}| = (m-1)n + 1$.*

В заключение рассмотрим характеризацию представлений ОД-автоматов относительно базиса класса F_n по локальной порождаемости. При фиксированной функции выходов подмножество базиса, состоящее из всех автоматов с одной и той же функцией выходов λ обозначим через M_λ (автоматы полагаем определенными на одних и тех же множествах состояний S, входов X и выходов Y). В [44] показано, что при $m \leqslant \frac{1}{2}(n-1)$, $m = |X|$, $n = |S|$, в автомате $A \in M_\lambda$ отсутствуют петли, параллельные дуги и циклы длины 2.

Пусть A — ОД-1 автомат, $A \in M_n$, $R \in F_r(A)$. Определим отношения σ_M, ρ_M на множестве S_R: $(a, b) \in \sigma_n$; $(a, b) \in \rho_2$, если $(a, b) \in \rho$ либо расстояние между a и b в графе переходов R без учета ориентации дуг равно 1 или 2; тогда $\sigma_M = \sigma_n$, $\rho_M = \rho^*_{2\sigma_M}$, и $P_M = (\sigma_M, \rho_M)$ есть верифицированная пара, а $G(R, P_M)$ — ассоциированный граф.

И в этом случае при $m \leqslant \frac{1}{2}(n-1)$ справедливы аналоги леммы 3.8 и теоремы 3.9.

В заключение раздела остановимся на задаче анализа сложности представлений и задаче распознавания свойства «быть представлением», при которых ключевую роль играют полученные теоремы характеризации представлений. На их основе проводится сведение указанной задачи к задаче анализа раскрасок некоторого графа и относительной оценки ее сложности в терминах NP-полноты. Используемые далее понятия теории NP- полноты понимаются в смысле [10].

Как обычно, P (NP) обозначает класс задач, распознаваемых детерминированными (недетерминированными) машинами Тьюринга за полиномиальное время. Под сводимостью понимается сводимость, полиномиальная по времени [10].

Пусть для автомата A определен некоторый класс F_A автоматов. Задача распознавания представлений состоит в том, чтобы по заданному автомату A и частичному автомату R определить, будет ли R принадлежать дополнению множества представлений автомата A относительно класса F_A.

Исходной информацией для алгоритма, решающего задачу распознавания, будут пары (R, A), которые можно закодировать в виде строк из нулей и единиц. Если автомат A имеет m входных сигналов, n состояний и l выходных сигналов, то для задания функций переходов и выходов достаточно строки длиной $mn \log nl$, где $\log n$ — длина двоичной записи числа n. Если R имеет k состояний, то для его кодирования достаточно строки длиной $mk \log(kl + 1)$ с учетом кодирования символа неопределенности. Таким образом, в конечном алфавите получим слово, описывающее исходную информацию для работы алгоритма распознавания.

Результаты, касающиеся сложности задачи распознавания представлений для рассмотренных случаев [43, 46, 48, 49] могут быть суммированы в следующем утверждении.

Теорема 3.14. *Задача распознавания представлений ОД-1 автомата в случаях: n-полного класса, класса групповых автоматов, класса автоматов без потери информации, базиса локальной порождаемости, является NP-полной. Для случая локально порожденного класса она является полиномиальной.*

Можно показать, что это утверждение справедливо и для частного случая представлений — контрольных экспериментов, во всех рассмотренных случаях. Кроме того, показано, что сужение класса БПИ автоматов до класса автоматов существенно без потери информации [4] оставляет задачу распознавания автоматов в классе NP-полных задач.

Полученные теоремы характеризации контрольных экспериментов относительно различных классов автоматов позволяют получить нижние оценки их длин. Остановимся на случаях локально порожденного класса и n-полного класса.

Обозначим наименьшую возможную длину кратчайшего контрольного эксперимента относительно класса автоматов через $d_{\min}$, а длину наибольшего среди всех минимальных по всевозможным эталонам через $d_{\max}$.

Теорема 3.15. *Если A ОД-1 автомат и F — локально порожденный класс, то выполняется неравенство*

$$mn + 1 \leqslant d_{\min} \leqslant d_{\max} \leqslant mn + \frac{1}{2}(m-1)n(n-1) + 1,$$

причем достижимы и нижняя и верхняя оценки.

Теорема 3.16. *При $n \geqslant 2^{m-1} - 1$ длина кратчайшего контрольного эксперимента $d_{\min}$ для любого ОД-1 автомата A относительно n-полного класса удовлетворяет неравенству $d_{\min} \geqslant (2m-1)n - 2^{m-1} + 2$, причем оценка достижима при $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2^{m-1} - 1$.*

Из теоремы 3.16 при $m = o(\log n)$, следует, что $d_{\min}$ асимптотически равна $(2m-1)n$. В то же время относительно локально порожденного класса длина кратчайшего эксперимента равна $mn + 1$ для любых n и m. Таким образом, по нижним оценкам длины контрольного эксперимента имеется существенный разрыв между локально порожденным и n-полным классами автоматов. Это связано с тем, что на структуре эксперимента для этого автомата в первую очередь проявляют себя особенности класса неисправностей, которые не «забиваются» свойствами структуры эталона. В то же время существуют автоматы, которые «затирают» особенностями своей структуры влияние класса неисправностей на структуру контрольного эксперимента. Так как на автоматах такого типа достигаются верхние оценки длины кратчайших экспериментов, то эти оценки должны быть близки для локально порожденного и n-полного классов автоматов. Можно показать, что асимптотически верхние оценки длины кратчайших экспериментов относительно локально порожденного и n-полного классов автоматов совпадают. Это же справедливо и для случая базиса локальной порождаемости.

Таким образом, верхние оценки длин контрольных экспериментов ОД-1 автоматов относительно трех рассмотренных классов асимптотически равны.

4. Эксперименты в финитно-определенных классах

В данном разделе изучаются свойства представлений — контрольных и распознающих экспериментов с автоматами относительно классов, названных финитно-определенными классами 1 и 2 рода. Финитно-определенными классами 1 рода названы классы автоматов, заданные недетерминированным автоматом-спецификацией, а финитно-определенными классами 2 рода — классы автоматов, наделенных специальными маркерами состояний (они были определены в разделе 1). Основным направлением исследований в этом случае является изучение связи топологических свойств этих классов с условиями существования и свойствами контрольных и распознающих экспериментов. Основным аппаратом исследования выступают введенные операторы аппроксимации.

В последнее время в качестве моделей дискретных систем выступают недетерминированные автоматы [23, 24, 37, 38, 50, 51]. Это вызывает необходимость развития нового направления в теории экспериментов — экспериментов с недетерминированными автоматами.

В ряде работ (см., например, [50]) разрабатывались методы построения проверяющего теста для сети автоматов. При этом входы и (или) выходы исследуемой компоненты сети недоступны. Особенности проведения эксперимента с сетью автоматов следующие:

1) Могут возникать неисправности, не обнаруживаемые на выходе сети и такие неисправности исключаются.
2) Не всякое слово может быть получено на входе тестируемой компоненты.

В [50] для исследования сетей автоматов предложен метод построения сетевого эквивалента компоненты сети — недетерминированного автомата, который полностью описывает поведение этой компоненты. Проверочный тест строится по этому эквиваленту, причем считается известной верхняя оценка числа состояний черного ящика.

В [51, 52] представлены два класса автоматов — класс работоспособных автоматов, реализуемых некоторым недетерминированным автоматом, и класс неработоспособных автоматов, представленный автоматами с числом состояний, не превосходящим известную верхнюю оценку. Так как неисправность автомата может значительно увеличить число состояний неисправного автомата, то актуальна задача исследования недетерминированных автоматов при отсутствии верхней оценки числа состояний.

В работе [24] изучена проблема построения различающих экспериментов для классов, реализуемых двумя недетерминированными автоматами, причем первый описывает работоспособное, а второй — неработоспособное поведение исследуемого детерминированного автомата. Рассмотрены случаи как с известной, так и неизвестной верхней оценкой числа состояний.

Дальнейшее развитие эти исследования получили в [37, 38]. В них поставлена и решена проблема принадлежности исследуемого черного ящика, который является реализацией одного из двух недетерминированных автоматов, классу реализаций одного из них. В этих работах найдены конструктивные критерии существования таких алгоритмов — экспериментаторов и методы их построения.

Приведенные замечания показывают, что исследование финитно-определенных классов 1 рода достаточно важно и актуально. Для них получены критерии конечности (бесконечности) класса $F \in \mathsf{F}$ и его подклассов $\lim F$ и $]F[$. Показана замкнутость множества F_1 относительно оператора lim. Найден ряд конструктивных критериев существования контрольных экспериментов относительно класса G и автомата-эталона A, принадлежащих одному из классов F, $\lim F$ и $]F[$ для некоторого $F \in \mathsf{F}_1$ для бэровской метрики, исследована финитная распознаваемость в метрике β классов $F \in \mathsf{F}_1$ и его подклассов. Эти результаты получены в работах [17, 53, 54, 55].

Итак, исследуются подклассы класса $\mathsf{A}_I(U)$ всюду определенных инициальных, конечных, приведенных инициально связных детерминированных автоматов Мили. Для простоты нижний индекс в записи класса $\mathsf{A}(U)$ опускается. Приведем основные определения.

Пусть $G = (G, U, \delta, G_0)$ — всюду определенный, слабо инициальный, недетерминированный автомат (НДА), у которого G — конечное множество состояний, G_0 — подмножество начальных состояний, $U = X \times Y$ — внешний алфавит, $\delta : G \times U \to 2^G$ — функция переходов. Обозначим через $gw = g(p, q)$ множество всех тех состояний, в которые НДА G может переходить из состояния g под действием входного слова p, порождая выходное слово q. Для $g \in G_0$ множество L_g состоит из всех вход-выходных слов w с непустым множеством gw. Множество L_g^k есть сужение L_g на слова длины не большей k.

Слабо инициальный недетерминированный автомат G называется наблюдаемым [24, 25], если для всех $u \in U$, $g \in G$ выполнено соотношение $|gu| \leqslant 1$, и инициально связным, если для всякого $g \in G$ существует такое $g_0 \in G_0$, $w \in L_{g0}$, для которых $g \in g_0$. В дальнейшем, если не оговорено противное, под недетерминированным автоматом (НДА) будем понимать всюду определенный, слабо инициальный, наблюдаемый, инициально связный, недетерминированный автомат. Поведением НДА G назовем $L_G = \{L_g\}$, $g \in G_0$. Инициальный автомат $A \in \mathsf{A}(U)$ есть реализация НДА G, если $L_A \subseteq L_G$. Класс всех реализаций НДА G обозначим $R(G)$. При этом будем говорить, что G определяет класс $R(G)$ или G является его носителем. Класс автоматов $F \subseteq \mathsf{A}(U)$ назовем финитно-определенным классом 1-го рода и обозначим $F \in \mathsf{F}_1$, если существует НДА G, определяющий класс F. Напомним, что через G_g обозначается подавтомат НДА G, получаемый объявлением состояния g начальным. Ядром $\ker G$ произвольного НДА G назовем множество состояний g, для которых G_g является инициальным детерминированным автоматом. Цикл в НДА G есть пара (g, w), где $g \in G$ и w — вход-выходное слово, у которого $g = gw$.

Кроме этих классов рассматриваются (возможно) бесконечные классы $\mathsf{A}(U, M)$ автоматов. Здесь $M \subseteq U$, и в каждом автомате из такого класса вход-выходной сигнал $(x, y) \in M$, называемый маркером, порождается не более чем одним состоянием, причем множество M заранее известно экспериментатору. Маркеры присутствуют в ряде реальных автоматов в качестве дополнительных оповещающих сигналов или служебных режимов. Обозначим через M_x множество всех маркеров (x_1, y) с $x_1 = x$. Класс автоматов F назовем финитно-определенным классом 2-го рода и обозначим $F \in \mathsf{F}_2$, если существует множество маркеров M, для которого $\mathsf{A}(U, M) = F$. Класс $\mathsf{A}(U) \in \mathsf{F}_2$, так как $\mathsf{A}(U) = \mathsf{A}(U, \varnothing)$. Полагаем, что $\varnothing = \mathsf{A}(U, U \cup \{u_1\})$, где $u_1 \notin U$. Через $\mathsf{A}(U, n)$ обозначим подкласс $\mathsf{A}(U)$, состоящий из всех автоматов, число состояний которых не превосходит n.

4.1. Алгебраические свойства множества финитно-определенных классов

В подразделе исследуются структуры множеств F_1 и F_2. Введем над НДА операции прямой суммы и декартового произведения. Прямой суммой $G + H$ произвольных НДА G и H назовем НДА, получаемый расположением рядом G и H с предварительным переобозначением их состояний. Очевидно, что прямая сумма НДА G и H определяет класс автоматов $R(G) \cup R(H)$.

Декартовым произведением $G \times H$ НДА G и H назовем следующий НДА:

$$G \times H = (G \times H, U, \delta_{GH}, G_0, H_0),$$

где: $\delta_{GH}((s_1, s_2), z) = (\delta_G(s_1, z), \delta_H(s_2, z))$ при $\delta_G(s_1, z) \neq \varnothing \neq \delta_G(s_2, z))$ и $\delta_{GH}((s_1, s_2), z) = \varnothing$ в противном случае.

Структура финитно-определенных классов 1-го рода дана в следующей теореме:

Теорема 4.1. *Множество F_1 является дистрибутивной решеткой относительно теоретико-множественных операций пересечения и объединения, в котором $\varnothing$ есть ее нуль, а $\mathsf{A}(U)$ — единица.*

Эта теорема расширяет аналогичный результат работ [24, 25] на случай слабо инициальных НДА.

Пусть β — бэровская метрика, введенная в разделе 1. Пространство $(\mathsf{A}_I(U), \beta)$ будем называть бэровским пространством автоматов. Пусть $r = |Y|$.

Следствие 4.2.

1) *При $r > 1$ множество F_1 бесконечно и счетно.*
2) *Всякий конечный класс F принадлежит F_1.*
3) *Окрестности бэровского пространства автоматов и их конечное объединение принадлежат F_1.*
4) *Множество F_1 не является булевой алгеброй относительно теоретико-множественных операций пересечения, объединения и дополнения.*

Пункт 2 предложения 4.2 показывает коренное отличие веденного здесь понятия реализации от аналогичного понятия из [23, 24], для которого не всякий конечный класс реализуем инициальным недетерминированным автоматом.

Рассмотрим теперь структуру множества F_2. Покажем, что это множество не замкнуто относительно операции объединения.

Предложение 4.3. *Пусть F_1, F_2 — произвольные классы из F_2. Справедливы утверждения:*

1) *Класс $F_1 \cap F_2 \in \mathsf{F}_2$.*
2) *Объединение $F_1 \cup F_2$ принадлежит множеству F_2 точно тогда, когда $F_1 \subseteq F_2$ или $F_2 \subseteq F_1$.*

Из предложений 2 и 3 следует незамкнутость множества F_2 относительно теоретико-множественного объединения. Введем операцию ω по правилу: $\mathsf{A}(U, M_1)\omega\mathsf{A}(U, M_2) = \mathsf{A}(U, M_1 \cap M_2)$ для произвольных M_1, M_2 из U.

Теорема 4.4. *Существует изоморфизм булевой алгебры* $\langle 2^U, \cap, \cup \rangle$ *в булеву алгебру* $\langle \mathsf{F}_2, \cap, \omega \rangle$.

Структура классов, являющихся финитно-определенными 1-го и 2-го рода одновременно дана в следующем утверждении.

Теорема 4.5. *Класс* $F \in \mathsf{F}_1 \cap \mathsf{F}_2$ *точно тогда, когда* F *пуст, совпадает с* $\mathsf{A}(U)$ *или является конечным классом из* F_2.

Из этой теоремы видно, что множества F_1 и F_2 описываются несводимыми друг к другу финитными средствами, что порождает достаточно выразительные множества классов автоматов.

Рассмотрим операторы алгебраического замыкания и аппроксимации, которые служат основным средством изучения контрольных и распознающих экспериментов в финитно-определенных классах 1-го и 2-го рода.

Оператор $\theta : 2^{\mathsf{A}(U)} \to 2^{\mathsf{A}(U)}$ называется оператором алгебраического замыкания [1], если выполнены условия:

1) Для любого класса автоматов F имеет место $F \subseteq \theta(F)$;

2) Для произвольного класса F выполнено $\theta(\theta(F)) = \theta(F)$;

3) Для любых $F_1, F_2 \subseteq \mathsf{A}(U)$ из $F_1 \subseteq F_2$ вытекает $\theta(F_1) \subseteq \theta(F_2)$.

Алгебраическим замыканием класса F относительно оператора θ назовем класс $\theta(F)$.

Рассмотрим операторы θ_i, $i = 1, 2$, ставящие в соответствие произвольному классу минимальный по включению класс $\theta_i(F) \in \mathsf{F}_i$, $i = 1, 2$, который содержит F.

Предложение 4.6. *Операторы* θ_i, $i = 1, 2$, *являются операторами алгебраического замыкания.*

Далее исследуем аппроксимацию произвольных классов F классами вида $\theta_1(O_\varepsilon(A) \cap F)$, где $A \in \mathsf{A}(U)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, для чего введем операторы $\theta_F : \mathsf{A}(U) \times \mathbb{R}^+ \to \mathsf{F}_1$ аппроксимации F, удовлетворяющие условиям:

1) Для любых $A \in \mathsf{A}(U)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ выполнено $O_\varepsilon(A) \cap F \subseteq \theta_F(A, \varepsilon) \subseteq O_\varepsilon(A)$;

2) Из неравенств $0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$ вытекает $\theta_F(A, \varepsilon_1) \subseteq \theta_F(A, \varepsilon_2)$;

3) Для любого $A \notin \lim F$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $\theta_F(A, \varepsilon) \subseteq F$;

В классе операторов аппроксимации фиксированного класса F введем операции $\cap$ и $\cup$:

$$(\theta_F^1 \cap \theta_F^2)(A, \varepsilon) = \theta_F^1(A, \varepsilon) \cap \theta_F^2(A, \varepsilon),$$
$$(\theta_F^1 \cup \theta_F^2)(A, \varepsilon) = \theta_F^1(A, \varepsilon) \cup \theta_F^2(A, \varepsilon).$$

Структура операторов аппроксимации дана в следующей теореме.

Теорема 4.7. *Множество операторов аппроксимации θ_F фиксированного класса является дистрибутивной решеткой относительно операций $\cap$ и $\cup$, причем оператор $0_F(A, \varepsilon) = \theta_1(O_\varepsilon(A) \cap F)$ является ее нулем.*

Рассмотрим условия существования контрольного эксперимента относительно $F \subseteq \mathsf{A}(U)$ и эталона $A \subseteq \mathsf{A}(U)$. Напомним, что множество W вход-выходных слов в алфавите U называется контрольным экспериментом относительно A и F, если $W \subseteq L_A$ и для всех $B \in F$ включение $W \subseteq L_A$ влечет изоморфизм автоматов A и B.

Теорема 4.8. *Дан произвольный оператор аппроксимации θ_F. В метрическом пространстве $\langle \mathsf{A}(U), \beta \rangle$ контрольный эксперимент относительно автомата-эталона A и класса F существует точно тогда, когда существует $\varepsilon > 0$, для которого выполнено $0_F(A, \varepsilon) \subseteq \{A\}$.*

Теорема показывает, что проверку условия $O_\varepsilon(A) \cap F \subseteq \{A\}$ существования контрольного эксперимента для любого F можно заменить проверкой условия $\theta_F(A, \varepsilon) \subseteq \{A\}$ для финитно-определенного класса $\theta_F(A, \varepsilon)$ 1-го рода. Далее в данном разделе предложены алгоритмы такой проверки для бэровских метрик.

Из теоремы 8 нетрудно получить

Предложение 4.9. *Дан оператор θ_F аппроксимации и метрика ρ. Справедливы утверждения:*

1) *Контрольный эксперимент относительно автомата-эталона* $A \in F$ *и класса* F *существует точно тогда, когда существует* $\varepsilon > 0$*, для которого* $\theta_F(A, \varepsilon) = \{A\}$.
2) *Автомат* $A \in \lim F$ *тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *выполнено* $|\theta_F(A, \varepsilon)| > 1$.

В теории автоматов кроме условий существования контрольных экспериментов требуется знать алгоритм их проведения. Для метрики β справедлив следующий результат:

Теорема 4.10. *Дан класс* $F \in \mathsf{F}_1 \cup \mathsf{F}_2$. *Алгоритм построения носителя класса* $\theta_F(A, \varepsilon)$ *существует для любых* $A \in \mathsf{A}(U)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *и бэровской метрики* β.

Полученные утверждения позволяют единообразно исследовать контрольные эксперименты в финитно-определенных классах и получать алгоритмы их проведения. На базе этих теорем найдены конструктивные критерии и алгоритмы построения таких экспериментов.

4.2. Эксперименты в финитно-определенных классах 1 рода

В данном подразделе исследуются классы $F \in \mathsf{F}_1$, $\lim F$ и $]F[$ в бэровском пространстве $(\mathsf{A}(U), \beta)$ автоматов. Выбор метрики β объясняется наличием для нее алгоритмов построения операторов аппроксимации и важностью ее для практических целей. Кроме того, как было показано, топологические свойства классов автоматов тесно связаны с условиями существования контрольных экспериментов. Справедлива простая

Лемма 4.11. *Пусть НДА* G *определяет* F. *Тогда класс* F *рекурсивен.*

Очевидно, что не всякий бесконечный класс автоматов содержит все собственные предельные автоматы, но для классов из F_1 выполнено

Предложение 4.12. *Пусть НДА G определяет F. Класс $[F]$ определяется этим же автоматом G, то есть замкнут по предельным автоматам.*

Рассмотрим конструктивный критерий конечности классов из F_1 в терминах свойств ядра его носителя:

Теорема 4.13. *Пусть НДА G определяет класс F. Класс F бесконечен точно тогда, когда в G существует хотя бы один цикл вне $\ker G$.*

Данное утверждение расширяет аналогичный результат [25] на случай слабо инициальных недетерминированных автоматов.

По утверждению 1.1 наличие контрольного эксперимента относительно автомата-эталона A и класса F тесно связано с условием принадлежности A классу $\lim F$. Конструктивный критерий проверки условия $A \in \lim F$ для $F \in \mathsf{F}_1$ дает

Теорема 4.14. *Пусть НДА G определяет класс F. Автомат A с начальным состоянием является предельным автоматом класса F точно тогда, когда существует такое начальное состояние $g_0 \in G_0$ и вход-выходные слова w, w', для которых $(g_0 w', w)$ — цикл вне ядра G и $a_0 w' w = a_0 w'$, $w' w \in L_A$.*

Данный результат показывает, что критерий существования контрольных экспериментов для классов из F_1 является конструктивным. На этой основе получены алгоритмы проведения контрольных экспериментов. Существует также алгоритм проверки принадлежности A классу $\lim F$, для любого $F \in \mathsf{F}_1$. Таким образом, класс $\lim F$, а значит и класс $]F[$ являются рекурсивными. Более того, для класса F с носителем G класс $\lim F$ определяется некоторым НДА H, алгоритм построения которого также получен.

Теорема 4.15. *Пусть НДА G определяет F. Тогда класс $\lim F \in \mathsf{F}_1$.*

Открывания классов из F_1, как будет показано далее, играют центральную роль в изучении контрольных и распознающих экспериментов. Критерий принадлежности $]F[\in \mathsf{F}_1$ для $F \in \mathsf{F}_1$ дает

Предложение 4.16. *Пусть НДА G определяет F. Класс $]F[\in \mathsf{F}_1$ тогда и только тогда, когда F конечен.*

Приведенные результаты показывают, что ряд мощностных и топологических свойств классов из F_1, в отличие от свойств произвольных подклассов класса $\mathsf{A}(U)$ проверяется конструктивно.

Остановимся теперь на некоторых свойствах распознающих экспериментов в классах $G \in \mathsf{F}_1$, $G = \lim F$ и $G =]F[$ для некоторого $F \in \mathsf{F}_1$. Напомним понятие распознающего эксперимента для класса F (в бэровской метрике): алгоритмом распознавания автоматов из F назовем алгоритм, который для произвольного автомата $A \in F$ выполняет по шагам следующие действия: на каждом i-м шаге $i \geqslant 1$, на автомат A подаются слова из конечного множества P_i, регистрируются реакции автомата A на эти слова, то есть регистрируется сужение L_A/P_i поведения L_A на множество P_i, и на основе этого сужения (и априорной информации о классе F) и таких же сужений, полученных на предыдущих шагах эксперимента, делается одно из двух возможных заключений: а) алгоритм завершен, и выдается таблица автомата A (номер автомата A в выбранной эффективной нумерации автоматов), б) алгоритм незавершен и порождает множество P_{i+1} входных слов. При этом для каждого $A \in F$ алгоритм завершается через конечное число шагов. Класс F назовем финитно-распознаваемым, если для него существует некоторый алгоритм распознавания. Пустой класс считается финитно-распознаваемым.

В [37] показано, что равносильны следующие утверждения:

1) Класс F является финитно-распознаваемым.
2) Этот класс является подклассом рекурсивно-перечислимого финитно-распознаваемого класса.
3) Для любого $A \in F$ существует эффективный контрольный эксперимент относительно A, F и $\tau = \iota$.

Характеризацию множества всех финитно-распознаваемых классов из F_1 дает

Предложение 4.17. *Пусть класс $F \in \mathsf{F}_1$. Класс F финитно-распознаваем точно тогда, когда он конечен.*

Исследуем теперь распознаваемость дополнений классов из F_1:

Предложение 4.18. *Пусть класс $F \in \mathsf{F}_1$ и его дополнение не пусто. Класс $\bar{F}$ не является финитно-распознаваемым.*

Рассмотрим различные подклассы классов из множества F_1. Следующая теорема описывает структуру всех финитно-распознаваемых подклассов конечного объединения непересекающихся классов из F_1:

Теорема 4.19. *Пусть $F_1, \ldots, F_n$ — попарно непересекающиеся классы из F_1. Равносильны утверждения:*

1) *Класс H является финитно-распознаваемым подклассом объединения классов $\bigcup\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} F_k$;*
2) *Класс $H = \bigcup\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} H_k$, где H_k являются финитно-распознаваемыми подклассами F_k.*

В [17] показано, что в бэровской метрике $]F[$ — открывание произвольного класса $F \in \mathsf{F}_1 \cup \mathsf{F}_2$, финитно-распознаваемо.

Там же показано, что в общем случае не существует максимального по включению финитно-распознаваемого класса. Оказывается, что во множестве всех финитно-распознаваемых подклассов F также в общем случае нет максимального.

Предложение 4.20. *Пусть даны класс $F \in \mathsf{F}_1$ и $H \subseteq F$ — рекурсивно перечислимый финитно-распознаваемый класс, причем класс $]F[- H \cap]F[$ не пуст. Тогда существует такой рекурсивно перечислимый финитно-распознаваемый класс H_1, что $F \supset H_1 \supset H$.*

4.3. Эксперименты в финитно-определенных классах 2-го рода

Далее исследуются свойства классов $\mathsf{A}(U, M)$, $M \subseteq U$, автоматов, в каждом из которых вход-выходной сигнал $(x, y) \in M$, называемый маркером, порождается не более, чем одним состоянием, и M заранее известно экспериментатору, то есть маркеры можно понимать как верифицированные идентификаторы состояний. При этом под автоматами понимаются всюду определенные, инициально-связные автоматы из $\mathsf{A}(U, M)$.

Для классов автоматов $F \in \mathsf{F}_2$ (то есть таких, что для некоторого множества M маркеров $\mathsf{A}(U, M) = F$) найдены конструктивные критерии их конечности/бесконечности в терминах свойств множества маркеров. Рассматриваются кратные контрольные эксперименты, и найдены условия существования/несуществования таких экспериментов для автомата относительно класса $\mathsf{A}(U, M)$, дополнения его подкласса $\mathsf{B}(U, M)$ всех автоматов, в каждом цикле которых существует состояние, порождающее некоторый маркер, его подкласса $\mathsf{C}(U, M)$ всех автоматов, не порождающих ни одного маркера и т. п. Найден критерий (в терминах структуры графа автомата-эталона) существования простого контрольного эксперимента относительно класса $\mathsf{A}(U, M)$.

Рассмотрены условия существования/несуществования распознающих экспериментов. Показано, что класс $\mathsf{B}(U, M)$ является максимальным подклассом класса $\mathsf{A}(U, M)$, для которого такой эксперимент существует. Обнаружено, что для класса $\mathsf{C}(U, M)$ и дополнения класса $\mathsf{A}(U, M)$ распознающих экспериментов нет. Полученные результаты изложены в работах [17, 56, 57].

Пусть дан класс $\mathsf{A}(U, M) \in \mathsf{F}_2$. Нетрудно привести примеры бесконечного, конечного и состоящего из одного элемента класса $\mathsf{A}(U, M)$. Просмотром таблицы автомата $A \in (U, M)$ легко обнаружить, входит этот автомат в класс $\mathsf{A}(U, M)$ или нет, поэтому класс $\mathsf{A}(U, M)$ рекурсивен. Автомат A из этого множества назовем насыщенным, если для всякого маркера $m \in M$ в автомате существует отмеченное m состояние. Пусть $r = |Y|$.

Лемма 4.21. *Для всех M класс $\mathsf{A}(U, M)$ содержит насыщенный автомат с не более чем r состояниями.*

Обозначим через $\mathsf{A}_{\text{H}}(U, M)$ подкласс всех насыщенных автоматов из $\mathsf{A}(U, M)$. Пустой класс будем считать конечным. Справедлива

Теорема 4.22. *Равносильны утверждения:*

1) Все автоматы в $\mathsf{A}(U, M)$ насыщены;

2) $\mathsf{A}(U, M) = \mathsf{A}(U)$*;*

3) $\mathsf{A}(U, r) \subseteq \mathsf{A}(U, M)$*;*

4) $r = 1$ *или* M *пусто;*

5) $\bar{\mathsf{A}}(U, M)$ *конечно.*

Из утверждений 2 и 5 этой теоремы следует, что класс $\bar{\mathsf{A}}(U, M)$ или пуст (если выполняется утверждение 4 теоремы) или бесконечен (в противном случае).

Напомним, что автомат можно отождествить с его графом, вершинами которого являются состояния, а дугами — тройки (a, u, b), где $u \in U$ и $au = b$. Циклом называется последовательность дуг $(a_1, u_1, a_2), (a_2, u_2, a_3), \dots, (a_k, u_k, a_1)$. При этом говорим, что эти дуги и вершины $a_1, \dots, a_k$ принадлежат этому циклу. Введем подкласс $\mathsf{B}(U, M)$ всех автоматов из $\mathsf{A}(U, M)$, у которых в каждом цикле графа имеется отмеченное состояние. Можно показать, что $\mathsf{B}(U, M)$ не пуст тогда и только тогда, когда M не пусто. Проверка соотношения $A \in \mathsf{B}(U, M)$ легко осуществляется по графу автомата A, поэтому подкласс рекурсивен.

Рассмотрим условия конечности классов $\mathsf{A}(U, M)$ и $\mathsf{B}(U, M)$. Входное слово p называется диагностическим для автомата A, если $a \neq b$ влечет $\lambda(a, p) \neq \lambda(b, p)$ для всех $a, b \in A$. Справедлива

Теорема 4.23. *Равносильны утверждения:*

1) Класс $\mathsf{A}(U, M)$ *конечен;*

2) Подкласс насыщенных автоматов конечен;

3) $\mathsf{A}(U, M) \subseteq \mathsf{A}(U, r)$*;*

4) $r = 1$ *или* $|M_x| = r$ *для некоторого* $x \in X$*;*

5) Существует x*, являющийся диагностическим словом для всех* $A \in \mathsf{A}(U, M)$*;*

6) Каждый насыщенный автомат имеет ровно r *состояний.*

Обозначим разность $\mathsf{A}(U, M) - \mathsf{B}(U, M)$ через $\mathsf{D}(U, M)$.

Теорема 4.24. *Пусть* M *не пусто. Равносильны утверждения:*

1) Класс $\mathsf{A}(U, M)$ *конечен;*

2) Класс $\mathsf{B}(U,M)$ *конечен и не пуст;*

3) Класс $\mathsf{D}(U,M)$ *конечен;*

4) $\mathsf{A}(U,M) = \mathsf{B}(U,M)$.

Приведенные теоремы дают конструктивный критерий конечности классов $\mathsf{A}(U,M)$ и $\mathsf{B}(U,M)$ и характеризует его с различных сторон. Из этих теорем следует, что при непустом M разность $\mathsf{D}(U,M)$ — аналогично разности $\bar{\mathsf{A}}(U,M)$, либо пуста, либо бесконечна. При пустом M эта разность или бесконечна, или состоит из одного автомата.

Следствие 4.25. *Равносильны утверждения:*

1) $\mathsf{A}(U,r) = \mathsf{A}(U,M)$;

2) $\mathsf{A}(U,r) = \mathsf{A}(U)$;

3) $r = 1$.

Теорема 4.26. *Пусть* Z *не пусто.* $M = Z \times Y$ *тогда и только тогда, когда* $\mathsf{A}(U,M) = \mathsf{A}(U,r,Z)$.

Следствие 4.27. $M = U$ *тогда и только тогда, когда* $\mathsf{A}(U,M)$ *совпадает с классом определенно-диагностируемых порядка 1 автоматов.*

Рассмотрим подкласс $\mathsf{C}(U,M)$ класса $\mathsf{D}(U,M)$ всех тех автоматов, каждый из которых не имеет отмеченных состояний, и его дополнение $\mathsf{H}(U,M) = \mathsf{D}(U,M) - \mathsf{C}(U,M)$. Следующие теоремы дают критерии пустоты этих классов.

Теорема 4.28. *Равносильны утверждения:*

1) Класс $\mathsf{C}(U,M)$ *пуст;*

2) Класс $\mathsf{B}(U,M)$ *пуст;*

3) $|M_x| = r$ *для некоторого* $x \in X$.

Теорема 4.29. *Равносильны утверждения:*

1) Класс $\mathsf{H}(U,M)$ *пуст;*

2) Этот класс конечен;

3) Пусты M или $\mathsf{C}(U, M)$.

Эта теорема показывает, что класс $\mathsf{H}(U, M)$ либо пуст, либо бесконечен. В отличие от него класс $\mathsf{C}(U, M)$ может быть бесконечным, пустым и содержать при $r = 1$ и пустом M ровно один автомат. Рассмотрим критерий бесконечности этого класса.

Теорема 4.30. *Равносильны утверждения:*

1) класс $\mathsf{C}(U, M)$ бесконечен;

2) этот класс содержит более одного автомата;

3) $r > 1$, $|M_x| < r$ для всех x и $|M_x| < r - 1$ для некоторого x.

Следствие 4.31. *Равносильны утверждения:*

1) Класс $\mathsf{C}(U, M)$ состоит из одного автомата;

2) $|M_x| = r - 1$ для всех $x \in X$;

3) Класс $\mathsf{C}(U, M)$ не пуст и каждый автомат из этого класса имеет ровно одно состояние.

В заключение отметим, что проверка конечности (бесконечности) и одноэлементности рассмотренных классов проводится по M и U конструктивно за полиномиальное время.

С целью получения условий существования контрольных экспериментов рассмотрим свойства различимости автоматов. Будем говорить, что автоматы A и B k-неотличимы, и писать $(A, B) \in \varepsilon_k$, если $L_A^k = L_B^k$. Как и ранее, через $O_{1/k}(A)$ обозначим класс $\mathsf{A}(U)$ всех автоматов из k-неотличимых от A.

Исследование контрольных экспериментов проводится снова относительно бэровской метрики.

Лемма 4.32. *Пусть M не пусто. Для любого автомата $A \in \mathsf{A}(U)$ и натурального k множество $O_{1/k}(A) \cap \bar{\mathsf{A}}(U, M)$ бесконечно.*

Следствие 4.33. *При непустом M не существует контрольного эксперимента для $A \in \mathsf{A}(U)$ и $\bar{\mathsf{A}}(U, M)$.*

Лемма 4.34. *$O_{1/k}(A)\phi\bar{\mathsf{A}}(U,M)$ для любого эталона $A \in \bar{\mathsf{A}}(U,M)$ и $k \geqslant 2n-2$.*

Непосредственно из этой леммы вытекает

Следствие 4.35. *Для каждого $A \in \bar{\mathsf{A}}(U,M)$ и $\mathsf{A}(U,M)$ существует контрольный эксперимент кратности не большей 4 и длины не большей $2n-2$.*

Пусть даны класс $\mathsf{A}(U,M)$ и натуральное k. Справедлив следующий критерий существования контрольного эксперимента для $\mathsf{A} = \mathsf{A}(U,M)$.

Теорема 4.36. *Равносильны утверждения:*

1) *Существует контрольный эксперимент $\mathsf{A} \in \mathsf{A}(U,M)$ и $\mathsf{A}(U,M)$;*
2) *Существует контрольный эксперимент для A и $\mathsf{A}(U,M(A))$;*
3) *$\mathsf{A} \notin \mathsf{D}(U,M)$;*
4) *L_A^k является контрольным экспериментом для A и $\mathsf{A}(U,M(A))$ при всех $k \geqslant 2n$.*

Заметим, что класс $\mathsf{A}(U,M(A))$ может быть бесконечным при конечном классе $\mathsf{A}(U,M)$.

Из теоремы 4.37 вытекает, что для $\mathsf{A} \in \mathsf{D}(U,M)$ и $\mathsf{A} = \mathsf{A}(U,M)$ контрольных элементов не существует. Рассмотрим условия существования контрольных экспериментов для таких эталонов и подклассов этого класса автоматов.

Пусть W — некоторое конечное подмножество множества L_A. Через $D(W)$ обозначим сужение информационного дерева автомата на подмножество.

Теорема 4.37. *W является контрольным экспериментом для $A \in \mathsf{A}(U) - \mathsf{C}(U,M)$ и $\mathsf{C}(U,M)$ тогда и только тогда, когда дерево $D(W)$ содержит хоть одно отмеченное состояние.*

Из этой теоремы вытекает, что и для $\mathsf{A} \in \mathsf{H}(U,M)$, $\mathsf{A} \subseteq \mathsf{C}(U,M)$ контрольный эксперимент существует. Более того, как будет отмечено далее, в этом случае существует и простой (однократный) эксперимент.

Теорема 4.38. *Для* $\mathsf{A} \in \mathsf{C}(U, M)$ *и непустого* $\mathsf{H}(U, M)$ *не существует контрольного эксперимента.*

Теорема 4.39. *Пусть* $\mathsf{C}(U, M)$ *содержит больше одного автомата. Для* $\mathsf{A} \in \mathsf{C}(U, M)$ *и* $\mathsf{C}(U, M)$ *не существует контрольного эксперимента.*

Из теорем 4.23 и 4.24 вытекает, что при $r > 1$ класс $\mathsf{D}(U, M)$ или пуст, или бесконечен. Теорема 4.28 утверждает, что если $\mathsf{D}(U, M)$ не пуст, то не пуст и $\mathsf{C}(U, M)$. Теоремы 4.39, 4.40 показывают, что для $\mathsf{A} \in \mathsf{C}(U, M)$ и $\mathsf{D}(U, M)$ контрольных экспериментов не существует. По теореме 4.37 длина кратчайших контрольных экспериментов для $\mathsf{A} \in \mathsf{B}(U, M)$ и $\mathsf{A}(U, M)$ не превосходит $2n$. Можно показать, что для всех n эта оценка достижима.

Рассмотрим случай, когда $M = U$. При этом $\mathsf{A}(U, M) = \mathsf{B}(U, M) \subseteq \mathsf{A}(U, r)$ и все автоматы из $\mathsf{A}(U, M)$ являются определенно диагностируемыми порядка 1. Рассмотрим условия, при которых конечное $W \subseteq L_A$ является контрольным экспериментом для A и $\mathsf{A}(U, M)$. По замыканию $B = [D(W)]_u$ и гомоморфизму ψ замыкания B в эталон построим вспомогательный неориентированный граф $G(W)$, у которого множество вершин B и вершины b_1, b_2 графа соединены ребром, если $\psi(b_1) \neq \psi(b_2)$, $\lambda_B(b_1, x), \lambda_B(b_2, x)$ одновременно определены для некоторого x и, стало быть $\lambda_B(b_1, x) \neq \lambda_B(b_2, x)$. Заметим, что граф $G(W)$ есть в точности ассоциированный граф из теоремы 2.30.

Пусть $M = U$ и $n = r$. Тогда справедлива

Теорема 4.40. W *является контрольным экспериментом для* A *и* $\mathsf{A}(U, M)$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

1) $W \subseteq L_A$*;*

2) $\Phi_B^1 = \Phi_A^1$*, где* $B = [D(W)]_u$*;*

3) граф $G(W)$ *однозначно раскрашиваем.*

Пусть теперь $M = U$ и $n < r$. Тогда для каждого x найдется y, для которых $(x, y) \notin \Phi_A^1$. Легко привести пример, когда в этом случае условий 1–3 недостаточно для того, чтобы W был контрольным для A и $\mathsf{A}(U, M)$.

Теорема 4.41. *W является контрольным для A и $\mathsf{A}(U, M)$ тогда и только тогда, когда $[D(W)]_u = A$.*

Рассмотрим условия существования и сложность простого, то есть состоящего из одного слова, контрольного эксперимента.

Теорема 4.42. *Для $A \in \mathsf{A}(U) - \mathsf{C}(U, M)$ и непустого $\mathsf{C}(U, M)$ существует простой контрольный эксперимент длины, не превосходящей n.*

Рассмотрим условия существования простого контрольного эксперимента для $A \in \mathsf{A}(U, M)$ и $\mathsf{A}(U, M)$. Слоем автомата A называется максимальное по включению подмножество B состояний, в котором для любых $a, b \in B$ $aw = b$ для некоторого $w \in L_a$. Слой B называется нетривиальным, если это слово не пусто для некоторых $a, b \in B$. Известно, что слои образуют разбиение множества состояний автомата. Автомат назовем правильным, если существует последовательность $B_0, \ldots, B_k$ всех тех слоев, для которой одновременно выполняются следующие условия:

1) Из i-го слоя, $0 \leqslant i < k$ исходит ровно одна дуга (b_i, u_i, a_{i+1}) оканчивающаяся вне него, в следующем слое; все дуги, начинающиеся в k-ом слое, оканчиваются в нем;
2) Если в состоянии $a \in B_i$, $0 \leqslant i \leqslant k$, оканчивается больше одной дуги эталона, то существует дуга (a, u, b), для которой $u \in M$ и $b \in B_i$;
3) Во всяком цикле каждого слоя существует отмеченное состояние A, порождающее некоторый маркер u, причем состояние принадлежит этому слою.

В правильном эталоне состояние a_i называется начальным, а состояние b_i — конечным состоянием i-го слоя, $0 \leqslant i \leqslant k$. Заметим, что начальным состоянием слоя B_0 является начальное состояние a_0 эталона. Последний слой B_k не имеет по условию 1 конечного состояния. По условию 3 правильный эталон принадлежит классу $\mathsf{B}(U, M)$. Известно, (см., напр. [4], стр. 51 теорема 2.1), что условие 1 равносильно существованию обхода, то есть пути из начального состояния автомата, который переходит через все его дуги. При $m \geqslant 2$ все слои правильного автомата являются нетривиальными и в силу условия 3 содержит маркеры. Поэтому число слоев правильного автомата не превосходит числа маркеров и тем самым не превосходит mr.

Теорема 4.43. *Простой контрольный эксперимент относительно* $A \in \mathsf{A}(U, M)$ *и* $\mathsf{A}(U, M)$ *существует тогда и только тогда, когда* A *правилен.*

Рассмотрим теперь распознающие эксперименты в финитно-определенных классах второго рода.

Теорема 4.44.

1) *Все классы* F, $F \phi \mathsf{B}(U, M)$ *являются финитно-распознаваемыми.*
2) *Пусть* M *не пусто. Все классы* F, $B \subset F \phi \mathsf{A}(U, M)$ *не являются финитно-распознаваемыми.*

Предложение 4.45. *Пусть* M *не пусто. Класс* $F = \mathsf{A}(U, M)$ *финитно-распознаваем точно тогда, когда он конечен.*

Утверждения 4.45, 4.46 показывают, что $\mathsf{B}(U, M)$ является максимальным финитно-распознаваемым подклассом класса $\mathsf{A}(U, M)$.

Рассмотрим условия существования алгоритмов распознавания для других подклассов, порожденных маркерами. Из теоремы 1.1 и теорем о существовании контрольных экспериментов в финитно-определенных классах непосредственно вытекают

Следствие 4.46. *Пусть* M *не пусто. Класс* $\bar{\mathsf{A}}(U, M)$ *не является финитно-распознаваемым.*

Следствие 4.47. *Если класс* $\mathsf{C}(U, M)$ *состоит из автоматов, не имеющих отмеченных состояний и содержит больше одного автомата, то этот класс не финитно-распознавваем.*

Пусть M не пусто. Зафиксируем $x \in X$ и натуральное $k > 1$. Рассмотрим подкласс $\mathsf{B}(U, x, k) \phi \mathsf{A}(U) - \mathsf{C}(U, M)$ всех таких автоматов A, для которых одновременно выполняются условия:

1) Все состояния $a \in A$ достижимы по x, то есть $a = \delta(a_0, x^i)$ для некоторого i;
2) В единственном цикле по x существует отмеченное состояние, то есть если $\delta(a, x^i) = a$, то состояние $\delta(a, x^j)$ отмечено для некоторого j, $0 \leqslant j \leqslant i$;
3) Любые разные и отмеченные одним и тем же маркером состояния k-отличимы.

Можно показать, что для всех $r \geqslant 2$, $x \in X$, и $k \geqslant 2$ класс $\mathsf{B}(U, x, k)$ может быть бесконечным.

Пусть $\bar{\mathsf{A}}(U, x, k) = \bar{\mathsf{A}}(U, M) \cap \mathsf{B}(U, x, k)$, $\mathsf{A}(U, x, k) = \mathsf{A}(U, M) \cap \mathsf{B}(U, x, k)$, $k \geqslant 2$.

Теорема 4.48. *Класс $\mathsf{B}(U, x, k)$ бесконечен тогда и только тогда, когда бесконечен класс $\mathsf{A}(U) - \mathsf{C}(U, M)$ и M_x не пуст.*

Теорема 4.49. *Любой класс $F\phi\mathsf{B}(U, x, k)$ является финитно-распознаваемым.*

Следствие 4.50. *Всякий класс $F\phi\bar{\mathsf{A}}(U, x, k) \cup \mathsf{B}(U, M)$ является финитно-распознаваемым.*

Список литературы

[1] Кон П. Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968. — 352 с.

[2] Брауэр Р. Введение в теорию конечных автоматов. — М.: Радио и связь, 1987. — 392 с.

[3] Богомолов А. М., Барашко А. С., Грунский И. С. Эксперименты с автоматами. — Киев: Наукова думка, 1973. — 144 с.

[4] Богомолов А. М., Грунский И. С., Сперанский Д. В. Контроль и преобразования дискретных автоматов. — Киев: Наукова думка, 1975. — 176 с.

[5] Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. — М.: Наука, 1997. — 386 с.

[6] Грунский И. С., Козловский В. А., Пономаренко Г. Г. Представления конечных автоматов фрагментами поведения. — Киев: Наукова думка, 1990. — 232 с.

[7] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985. — 320 с.

[8] Трахтенброт Б. А., Барздинь Я. М. Конечные автоматы (поведение и синтез). — М.: Наука, 1970. — 400 с.

[9] Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир, 1973. — 300 с.

[10] Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. — М.: Мир, 1979. — 536 с.

[11] Грунский И. С., Козловский В. А. Синтез и идентификация автоматов. — Киев: Наукова думка, 2004. — 246 с.

[12] Гилл А. Введение в теорию конечных автоматов. — М.: Наука, 1966. — 272 с.

[13] Глушков В. М. Абстрактная теория автоматов // Успехи мат. наук. — 1961. 16. Вып. 5 (101). — С. 3–62.

[14] Мур Э. Ф. Умозрительные эксперименты с последовательностными машинами // Сб. Автоматы. — М.: ИЛ, 1956. — С. 179–210.

[15] Bhattacharyya A. Checking experiments on sequential machines. — New York: J. Wiley and Sons, 1989. — 155 p.

[16] Kohavi Z. Switching and finite automata theory. — New York: Mc Graw Hill, 1970. — 522 p.

[17] Максименко И. К. Эксперименты в финитно-определенных метрических пространствах автоматов: Автореферат канд. физ.-мат. наук; 01.01.09 / СГУ. — Саратов, 2000.

[18] Богомолов С. А. О восстановлении автоматов по их следам: Автореферат канд. физ.-мат. наук, 01.01.09 / ВЦ АН СССР. — М.: 1986. — 12 с.

[19] Спивак М. А. К синтезу конечного автомата по его множеству экспериментов // Кибернетика. — 1969. № 5. — С. 15–20.

[20] Буевич В. А., Каландарашвили Н. Г., Таль А. А. Об описании конечного автомата с помощью конечного множества вход-выходных слов // Автоматика и телемеханика. 1970. № 1. — С. 112–122.

[21] Буевич В. А., Каландарашвили Н. Г., Таль А. А. Конечные автоматы — эквивалентность и поведение. — М.: Наука, 1984. — 192 с.

[22] Грунский И. С. Анализ поведения конечных автоматов. — Луганск: изд-во Луганск. гос. пед. ун-та, 2003. — 318 с.

[23] Евтушенко Н. В., Лебедев А. В., Петренко А. Ф. О проверяющих экспериментах с недетерминированными автоматами // Автоматика и вычислительная техника. — 1991. № 6. — С. 81–85.

[24] Лукьянов Б. Д. О различающих и контрольных экспериментах с недетерминированными автоматами // Кибернетика и системный анализ. — 1995. № 5. — С. 69–76.

[25] Лукьянов Б. Д. Детерминированные реализации недетерминированных автоматов // Кибернетика и системный анализ. — 1996. № 4. — С. 34–50.

[26] Общая алгебра. Т. 1. / Под общ. ред. Л. А. Скорнякова. — М.: Наука, 1990. — 592 с.

[27] Петренко А. Ф. Автоматные методы анализа совместимости средств взаимодействия в открытых сетях.: Автореферат докт. техн. наук; 05.13.13 / ИЭП Латв.ССР. — Рига, 1988. — 42 с.

[28] Петренко А. Ф. Эксперименты над протокольными объектами // Автоматика и вычислительная техника. — 1987. № 1. — С. 16–21.

[29] Petrenko A. F., Yevtushenko N., Dsouli R. Grey box finite state machine base testing strategies // Depart d'informatique et recherch. operat. Univ de Moutreal, 1994. Publ # 991. — 22 p.

[30] Захаров В. Н., Поспелов Д. А., Хазацкий В. Е. Системы управления. Задание. Проектирование. Реализация. — М.: Энергия, 1972. — 344 с.

[31] Крывый С. А., Матвеева Л. Е. Формальные методы анализа свойств систем // Кибернетика и системный анализ. — 2003. № 2. — С. 15–36.

[32] Основы технической диагностики / Под ред. П. П. Пархоменко. — М.: Энергия, 1976. — 464 с.

[33] Fault-tolerant computing: theory and techniques. V. 1. — Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1986. — 416 p.

[34] Корноушенко Е. К. Контроль логико-динамических систем по прореженной информации // Изв. РАН Техническая кибернетика. — 1992. № 1. — С. 171–182.

[35] Hennie F. C. Fault detecting experiments for sequential circuits // Proc. 5 Annual Symp. «Switch. Circuits Th. and Logic. Design». — 1964. — P. 95–110.

[36] Василевский М. П. О распознавании неисправностей автомата // Кибернетика. — 1973. № 4. — С. 93–108.

[37] Бородай С. Ю. Эксперименты в эффективно заданных классах автоматов: Автореферат канд. физ.-мат. наук; 01.01.09 / СГУ. — Саратов, 1997. — 21 с.

[38] Бородай С. Ю. Условные и безусловные эксперименты с классами реализаций НД-автоматов // Тезисы докл. XI Международ. конф. по проблемам теор. кибернетики. — Ульяновск: Изд-во СВНЦ, 1996. — С. 27–28.

[39] Кузнецов А. Б., Трахтенброт Б. А. Исследование частично рекурсивных операторов средствами теории бэровского пространства // ДАН СССР. — 1955. Т. 105. № 5. — С. 897–900.

[40] Максименко И. И. Распознавание в эффективно-заданных классах автоматов // Труды ИПММ НАН Украины. — Донецк, 1998. — Т. 2. — С. 115–123.

[41] Корноушенко Е. К. Диагностирование дискретных динамических систем по накопленной информации: Автореферат докт. тех. наук; 05.13.01 / ИПУ. — Москва, 1992. — 28 с.

[42] Козловский В. А. О распознавании автомата относительно локально порожденного класса // ДАН СССР. — 1981. 285. № 5. — С. 1047–1049.

[43] Козловский В. А. О распознавании локальных неисправностей автомата: автореферат канд. физ.-мат. наук; 01.01.09 / ВЦ АН СССР. — М., 1981. — 16 с.

[44] Козловский В. А. Локальные неисправности автомата и их обнаружение // Математические вопросы кибернетики / Под ред. С. В. Яблонского. — М.: Наука, 1991. Вып. 3. — С. 167–186.

[45] Козловский В. А., Копытова О. М. Представления автоматов относительно m-плотных классов // Матер. VIII Межд. семинара «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, 2–6 февраля 2004 г.) — М.: Изд. МГУ. — С. 277–280.

[46] Козловский В. А. О представлениях групповых автоматов // Кибернетика и системный анализ. — 1996. № 2. — С. 21–28.

[47] Козловский В. А. О структуре контрольных экспериментов с автоматом // Кибернетика. — 1978. № 3. — С. 19–33.

[48] Kozlovskii V. A. On the complexity of analyzing experiments for checking local faults of an automaton // Proceeding of the Int. Conf. on FCT'87, Springer-Verlag, Lecture Notes in Computer Science. 278. 1987. — P. 259–262.

[49] Грунский И. С., Козловский В. А., Копытова О. М. Представления автоматов и анализ атак на криптосистемы // Искусственный интеллект. 2004. № 4. — Донецк: изд-во ИПИИ «Наука и освита». — С. 764–775.

[50] Евтушенко Н. В., Матросова А. Ю. К синтезу контролепригодных автоматных сетей // Техническая диагностика. — 1991. № 3. — С. 143–152.

[51] Евтушенко Н. В., Петренко А. Ф. Метод построения проверяющих экспериментов для произвольного недетерминированного автомата // Автоматика и вычислительная техника. — 1990. № 5. — С. 73–76.

[52] Евтушенко Н. В., Петренко А. Ф. О проверяющих возможностях кратных экспериментов // Автоматика и вычислительная техника. — 1989. № 3. — С. 9–14.

[53] Максименко И. И. Эксперименты в классе реализаций недетерминированных автоматов // Доклады НАН Украины. — 1999. № 7. — С. 95–99.

[54] Грунский И. С. Идентификация управляющих систем автоматного типа // Труды международной конференции «Математика в индустрии» (ICIM'98). Таганрог, 1998. — С. 107–109.

[55] Грунский И. С., Максименко И. И. О распознавании детерминированных автоматов, задаваемых НД-автоматами // Труды III международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем». — Красновидово, 1998. — С. 23–29.

[56] Грунский И. С., Максименко И. И. Эксперименты с маркированными автоматами. / Препринт № 96.02 ИПММ НАН Украины, 1998. — 33 с.

[57] Грунский И. С., Максименко И. И. Об экспериментах с автоматами при отсутствии верхней оценки числа состояний // Кибернетика и системный анализ. — 1999. № 4. — С. 59–71.